

信号包络提取方法——从希尔伯特变换到小波变换¹

张绪省 朱贻盛 成晓雄* 程煜明

(上海交通大学仪器工程系 上海 200030)

*(上海交通大学图像所 上海 200030)

摘 要 本文分别讨论了希尔伯特变换和小波变换的原理、性质和在提取信号包络方面的应用,并进行了分析、对比;说明了小波变换(采用已调高斯小波)除了能够对信号实现正交、提取包络外,还具有带通滤波的功能;从而能提取出优于希尔伯特变换的信号包络。

关键词 信号处理, 小波, 希尔伯特变换

中图分类号 TN911.7

1 引言

在许多科学领域的信号处理中,都需要提取信号的包络信息。如,在机械故障诊断中,用振动信号的包络进行诊断是一种行之有效的方法。目前最常用的信号包络提取方法就是希尔伯特(Hilbert)变换。近年来又兴起一种新的时频分析方法——小波(Wavelet)变换,由于它具有良好的时-频局部化特性和多尺度分析的功能,应用日益广泛。利用小波变换(采用已调高斯小波)提取信号包络的效果,比希尔伯特变换更好。

2 希尔伯特变换及其在提取信号包络方面的应用

一个实信号 $x(t)$ 的希尔伯特变换定义为^[1]

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (1)$$

于是得到 $x(t)$ 的解析信号

$$g(t) = x(t) + j\hat{x}(t). \quad (2)$$

$g(t)$ 的幅值

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \quad (3)$$

便是原始实信号 $x(t)$ 的包络。

对(1)式进行傅里叶变换,得

$$\hat{X}(f) = X(f) \cdot \mathcal{F}[1/(\pi t)] = X(f) \cdot [-j\text{sgn}(f)], \quad (4)$$

\mathcal{F} 表示对函数进行傅里叶变换, $\text{sgn}()$ 为符号函数。(4)式说明 $\hat{X}(f)$ 是 $X(f)$ 在频域中作相移,在正频域内延迟 $\pi/2$,在负频域内超前 $\pi/2$,即希尔伯特变换实际上是一个 90° 移相器。同时也说明 $x(t)$ 与其希尔伯特变换 $\hat{x}(t)$ 是正交的关系。

图 1 是直接利用希尔伯特变换提取的某机械振动冲击响应信号(图 3 中 SIGNAL 所示)的包络。图 2 是包络信号的幅值谱。由图 1 可看出,信号包络不够光滑,毛刺太多(即含有随机干扰成分),影响了包络提取精度。反映在幅值谱(图 2)上,谱峰太多,且存在大量高频分量,不易从中找到与各种机械损伤对应的频域特征。

¹ 1995-04-04 收到, 1995-09-04 定稿

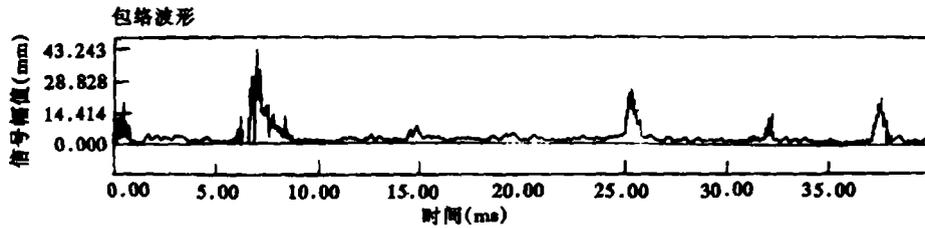


图 1 用希尔伯特变换提取的振动冲击响应信号包络

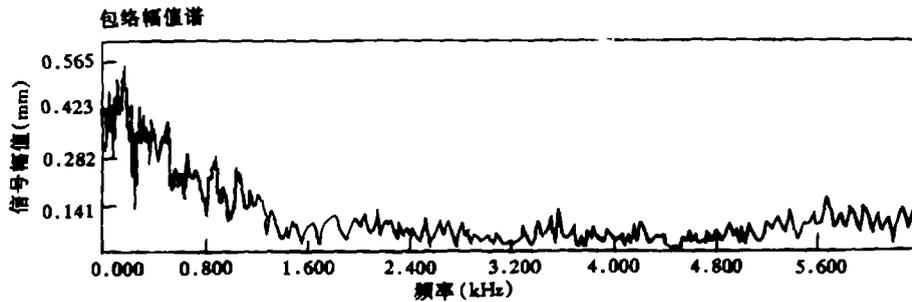


图 2 用希尔伯特变换提取的振动冲击响应信号包络幅值谱

幅值排队

序号	频率 (kHz)	幅值 (mm)	序号	频率 (kHz)	幅值 (mm)	序号	频率 (kHz)	幅值 (mm)
1	<0.175	0.565>	2	<0.100	0.520>	3	<0.050	0.486>
4	<0.275	0.450>	5	<0.225	0.445>	6	<0.325	0.416>
7	<0.375	0.402>	8	<0.500	0.396>	9	<0.650	0.305>

3 小波变换及其在提取信号包络中的应用

3.1 小波变换的原理及性质 满足条件: $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0$ 的函数 $\psi(t)$ 称为一个基本小波。所谓小波就是由 $\psi(t)$ 经过伸缩和平移而派生出来的一族函数 $\{\psi_{a,b}(t)\}$ ^[2]:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in R, \quad a \neq 0, \quad (5)$$

其中 a 为尺度参数, b 为位置参数。有一种基本小波为复小波: $\psi_g(t) = \exp(j\omega t) \cdot \exp(-t^2/2)$, 称为已调高斯小波。其实部 $\psi_{gr}(t) = \cos \omega t \cdot \exp(-t^2/2)$, 虚部 $\psi_{gi}(t) = \sin \omega t \cdot \exp(-t^2/2)$ 。小波函数具有波动性、衰减性和带通性, 在频域和时域同时具有良好的局部性, 且随尺度 a 变化而自动调节时-频分辨率。

从傅里叶变换的角度看, 已调高斯小波的实部是一偶函数, 经傅里叶变换后仍为实偶函数。所以实部作为滤波器是一无相移滤波器; 而其虚部由 $\mathcal{F}[\psi_{gi}(t)] = -j \operatorname{sgn}(\mathcal{F}[\psi_{gr}(t)])$ 可知, 比实部相移 -90° , 但两者的幅频特性相同。这正是已调高斯小波可用来实现信号包络提取的根据。

小波变换定义为^[3]

$$W_f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (6)$$

(6) 式可进一步改写为: $W_f(a, b) = f(t) * (1/\sqrt{|a|})\psi(-t/a)$ 卷积形式。这样 $W_f(a, b)$ 就是信号 $f(t)$ 通过一个传递函数为 $\sqrt{|a|}\hat{\psi}(-a\omega)$ 的滤波器的输出。可见, 小波变换就相当于一系列带通

滤波器对信号进行多通带滤波(一个尺度对应一个通带),从而得到信号不同频带内的信息。带通滤波器的中心频率和带宽与尺度成反比,且带宽随中心频率的变化而自动调节。中心频率越低其带宽越窄;中心频率越高其带宽越宽;体现了对信号的自适应分析能力。

3.2 用小波变换提取信号包络 为了求得信号包络,这里采用已调高斯小波 $\tilde{\psi}_{a,b}(t) = \psi_{r,a,b}(t) + j\psi_{i,a,b}(t) = (1/\sqrt{|a|}) \times \exp\left(j\frac{\omega(t-b)}{a}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right)$, 对信号进行小波变换:

$$W_{fe}(a,b) = W_{fr}(a,b) + jW_{fi}(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\tilde{\psi}_{a,b}(t)dt. \quad (7)$$

就得到信号 $f(t)$ 经带通滤波后的解析信号 $W_{fe}(a,b)$ 。其中实部 $W_{fr}(a,b)$ 和虚部 $W_{fi}(a,b)$ 具有相同的频率成分,但 $W_{fi}(a,b)$ 比 $W_{fr}(a,b)$ 延迟 90° ,二者具有正交关系。由 $A(t) = \sqrt{W_{fr}^2(a,b) + W_{fi}^2(a,b)}$ 可求得信号 $f(t)$ 的包络。

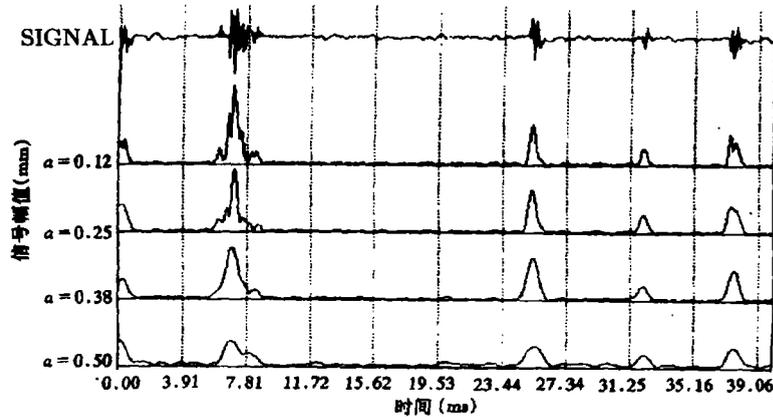


图 3 不同尺度下用小波变换提取的信号包络

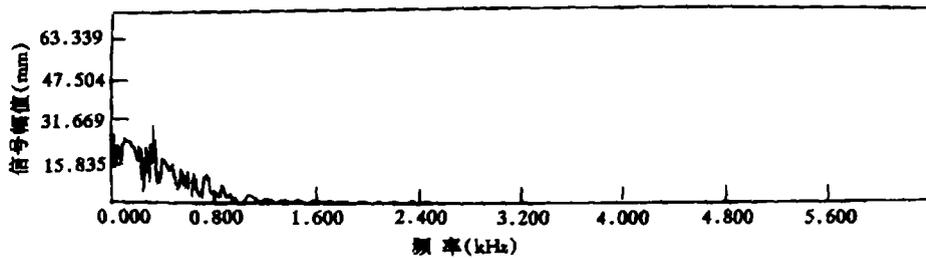


图 4 用小波变换 ($a=0.38$ 时) 提取的振动冲击响应信号包络幅值谱
幅值排队

序号	频率 (kHz)	幅值 (mm)	序号	频率 (kHz)	幅值 (mm)	序号	频率 (kHz)	幅值 (mm)
1	<0.000	63.33892>	2	<0.325	30.37613>	3	<0.100	25.40792>
4	<0.050	22.34381>	5	<0.225	21.95129>	6	<0.275	21.85756>
7	<0.400	17.51846>	8	<0.475	15.81756>	9	<0.550	13.33292>

图 3 是对同一振动冲击响应信号 SIGNAL, 利用已调高斯小波变换在不同尺度 ($a=0.12, 0.25, 0.38, 0.50$) 下提取的包络。图 4 是求得的图 3 中 $a = 0.38$ 时包络幅值谱。可看出: 利用已调高斯小波变换提取的信号包络比直接利用希尔伯特变换提取的要光滑。从图 4 所示的频谱更易识别出故障信号频率, 因为它消除了高频干扰, 且低频部分谱峰突出, 易辨识, 如 325Hz

处有一明显谱峰, 精度提高很多。再求出其它三个尺度 ($a = 0.12, 0.25, 0.50$) 下的包络幅值谱, 我们发现: 随尺度 a 的增大, 包络变得越来越光滑, 毛刺迅速减少, 但幅值谱低频部分 (小于 800Hz) 相对来说无多大变化, 谱峰——对应, 而且都在 325Hz 处出现一突出谱峰, 这是一故障特征频率, 进一步分析可找出该机械的故障所在。

以 FFT 为基础而实现的希尔伯特变换是在信号的整个频率区间上进行的, 抑制噪声的能力差, 而已调高斯小波变换除具有对信号实现正交, 提取出信号包络的功能外, 还有带通滤波的能力。适当选取适当尺度 a , 就可改变滤波器的中心频率和带宽, 使滤波器的频带覆盖信号中感兴趣的频带, 即可提取出较理想的包络, 突出有用信息, 灵活性强。所以与希尔伯特变换相比较, 小波变换是较好的信号包络提取方法。

参 考 文 献

- [1] 雷继尧, 何世德, 等. 工程信号处理技术. 重庆大学出版社, 1990, 96-97.
- [2] 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析. 西安电子科技大学出版社, 1994, 1-17.
- [3] [美] 崔锦泰著, 程正兴, 译. 小波分析导论. 西安交通大学出版社, 1995, 80-86.

THE METHODS OF EXTRACTING SIGNAL ENVELOPE— FROM HILBERT TRANSFORM TO WAVELET TRANSFORM

Zhang Xusheng Zhu Yisheng Cheng Xiaoxiong Cheng Yuming

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

Abstract The principles, properties of Hilbert transform and wavelet transform and their applications to extracting signal envelope are discussed respectively. Some comparisons are made to illustrate that modulated Gaussian wavelet transform not only can orthogonalize signal, but also has band-pass filtering function, so it is a more ideal method for extracting signal envelope in contrast with Hilbert transform.

Key words Signal processing, Wavelet, Hilbert transform

张绪省: 男, 1970年生, 博士生, 生物医学工程及仪器专业, 数字信号处理技术.

朱贻盛: 男, 1945年生, 教授, 生物医学工程及仪器专业, 数字信号处理技术.

成晓雄: 男, 1969年生, 博士生, 图像处理及模式识别研究所, 模式识别及人工智能.