

利用弱结构扰动理论确定非线性电路唯一稳态¹

杨志义 冯 平*

(西北工业大学计算机科学与工程系 西安 710072)

*(解放军后勤工程学院电工教研室 重庆 400016)

摘 要 该文利用弱结构扰动理论得到了确定电路的唯一稳态的新条件, 扩展了已有的结果. 该文对电路元件的约束, 仅要求其成份关系的斜率有界即可, 放松了已有的经典结果中要求电路元件斜率为正的限制.

关键词 非线性电路, 唯一稳态, 弱结构扰动理论

中图分类号 TN711.4

1 引言

非线性非自治电路的唯一稳态的研究, 是一个非常重要而又很困难的问题. 国际电工委员会电路与系统分会主席, 著名非线性电路理论专家 L. O. Chua 教授, 对这一问题有非常广泛、深入的论述, 并在其经典著作中概述了目前已有的结果^[1]. 他指出, 如果电路中元件的成份关系是严格递增的 (即斜率为正), 则对于不同的电路可以得到不同的保证电路具有唯一稳态的条件. 文献 [2,3] 改进了文献 [1] 的部份工作. 但对电路中元件的成份关系, 仍要求是严格递增的.

对于大量元件不满足严格递增条件的电路, 如含有隧道二极管的电路^[4], 目前还没有相应的结果. 因此, 建立适用范围更广的判据, 在理论与实用两个方面, 都有重要的意义.

本文利用弱结构扰动理论的相关方法, 得到了确定电路的唯一稳态的新条件, 即仅要求电路中的元件成份关系的斜率有界就可以, 扩展了已有的结果.

2 数学模型

考虑非线性电路 N 中的元件满足以下关系:

(1) 对非线性电感 N_L 有 $k_{l0} \leq [(i_{l1} - i_{l2})/(\varphi_1 - \varphi_2)] \leq k_{l1}$, 其中 k_{l0}, k_{l1} 为常数.

(2) 对非线性电容 N_C 有 $k_{c0} \leq [(v_{c1} - v_{c2})/(q_1 - q_2)] \leq k_{c1}$, 其中 k_{c0}, k_{c1} 为常数.

(3) N_R 为线性电阻.

(4) N_U 为电压源向量 U_S .

假定 N 为完备电路, 则有

$$\begin{bmatrix} v_l \\ i_c \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} i_l \\ v_c \end{bmatrix} + H_s U_s \quad (1)$$

其中 H 是 $(N_L + N_C) \times (N_L + N_C)$ 阵^[1], H_s 是 U_s 的系数矩阵.

假定 $X_1 = [i_{l1}, v_{c1}, v_{l1}, i_{c1}]$ 和 $X_2 = [i_{l2}, v_{c2}, v_{l2}, i_{c2}]$ 为该电路的任两个有界解, 其中 i_{l1}, v_{l1} 为电感元件的电流和电压矢量; i_{c1}, v_{c1} 为电容元件的电流和电压矢量. 并记为 $\Delta v_{li} = v_{l1i} - v_{l2i}$; $\Delta i_{cj} = i_{c1j} - i_{c2j}$; $i = 1, 2, \dots, N_L$; $j = 1, 2, \dots, N_C$.

于是, 得到该电路的增量方程为

$$\begin{bmatrix} \Delta v_l \\ \Delta i_c \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \Delta i_l \\ \Delta v_c \end{bmatrix} \quad (2)$$

并注意到 $d\Delta\varphi/dt = \Delta v_l$, $d\Delta q/dt = \Delta i_c$, 以及电路的元件成份关系有

$$dX/dt = A(t)X \quad (3)$$

¹ 2002-01-10 收到, 2002-08-26 改回

其中 φ 是电感磁链矢量, q 是电容电荷矢量, $X = \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta q \end{bmatrix}$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$. 显然, 如果 (3) 式的零解 $X = 0$ 是全局渐进稳定的, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X\| \rightarrow 0$, 则电路 N 有唯一的稳态.

下面推导 (3) 式的零解全局渐进稳定的条件.

3 唯一稳态定理

将方程 (3) 式改写为

$$dx/dt = (A + \Delta A(t))x \quad (4)$$

式中 $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $\Delta A(t) = (\Delta a_{ij}(t))_{n \times n}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$. 这里 A 是常数阵, $\Delta A(t)$ 是时变阵. 如果矩阵 A 的范数记为 $\|A\|_p$, $p = 1, 2, \dots, \infty$, 相应的测度为 $\mu_p(A)$. 根据文献 [5], 取 $M_p = \max_{t > 0} \|\Delta A(t)\|_p$, 在不引起混淆的情况下, 后面讨论将 p 略去.

引理 1^[5] 对于矩阵 A 有 $\|\exp(At)\| \leq \exp[\mu(A)t]$ 成立. 于是有

定理 1 对 (4) 式, 如果 A 是 Hurwitz 矩阵, 并且 $\mu_p(A) + M_p < 0$, 则电路 N 有唯一稳态.

证明 由 (4) 式有 $x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp\{A(t-\tau)\}\Delta A(\tau)x(\tau)d\tau$, 所以

$$\|x(t)\| \leq \|\exp(At)x(0)\| + \int_0^t \|\exp\{A(t-\tau)\}\| \times \|\Delta A(\tau)\| \times \|x(\tau)\|d\tau$$

由引理 1 得

$$\|x(t)\| \leq [\exp \mu(A)t] \times \|x(0)\| + M \int_0^t [\exp \mu(A)(t-\tau)] \times \|x(\tau)\|d\tau$$

记 $w(t) = \|x(t)\|$, 故

$$w(t) \leq [\exp \mu(A)t]w(0) + M \int_0^t [\exp \mu(A)(t-\tau)] \times w(\tau)d\tau$$

与其对应的有

$$z(t) = [\exp \mu(A)t]z(0) + M \int_0^t [\exp \mu(A)(t-\tau)] \times z(\tau)d\tau$$

是方程 $dz/dt = \mu(A)z(t) + Mz(t) = [\mu(A) + M]z(t)$ 初值为 $z(0)$ 的解. 并注意到

$$z(0) = w(0) \quad (5)$$

又由文献 [5] 得知 $z(t) \geq w(t)$, 如果 $\mu_p(A) + M_p < 0$, 则 (3) 式的零解是渐近稳定的. 于是有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x\| \rightarrow 0$, 即电路有唯一稳态.

4 数字模拟

在图 1 中, $e(t) = E \sin \omega t$, R_1 , R_2 是线性电阻, C 是线性电容, L 是非线性电感, 它们满足 $K_{\min} \leq [(i_{l1} - i_{l2})/(\varphi_1 - \varphi_2)] = K \leq K_{\max}$. 其中 $K_{\min}$, $K_{\max}$ 为常数. 对图 1 的电路, 其增量状态方程为

$$\begin{bmatrix} d\Delta\varphi/dt \\ d\Delta v_c/dt \end{bmatrix} = \frac{1}{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} -R_1 R_2 K & -R_2 \\ R_2 K/C & -1/C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta v_c \end{bmatrix} \quad (6)$$

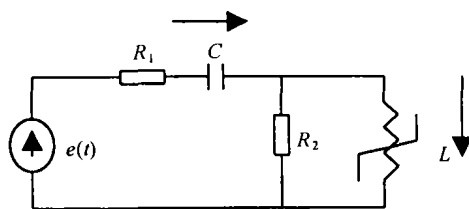


图 1 数字模拟电路

由定理 1 可得该电路有唯一稳态的条件是

$$\left. \begin{aligned} R_1 + R_2 &> 0 \\ -R_1 \times R_2 \times K + |R_2| &< 0 \\ -1/C + |R_2 \times K/C| &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

或

$$\left. \begin{aligned} R_1 + R_2 &> 0 \\ -R_1 \times R_2 \times K + |R_2 \times K/C| &< 0 \\ -1/C + |R_2| &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

或

$$\left. \begin{aligned} R_1 + R_2 &> 0 \\ R_1 \times R_2 \times K + 1/C &> 0 \\ R_1 \times R_2 \times K/C - 2(R_2 - R_2 \times K/C) &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (6c)$$

假设 L 为递减元件, 即 $K_{\max} < 0$, 取 $K_{\max} = -0.03$, $K_{\min} = -0.65$, $C = 1.69\mu\text{F}$, $R_1 > 700\text{k}\Omega$, $-500\text{k}\Omega < R_2 < 0$.

以上参数满足 (6b), 该电路有唯一稳态. 用计算机模拟, 与此结论相符合. 如果用已有的方法^[1-3], 无法处理该问题.

5 结 束 语

本文利用弱结构扰动的相关方法, 得到了电路元件成份关系不是严格递增的条件下, 电路的唯一稳态条件, 并给出了一个算例, 其结果与理论分析吻合.

参 考 文 献

- [1] L. O. Chua, Nonlinear circuit theory, [J] in Proc. 1978 European Conf. on Circuit Theory and Design, vol.2, Guest Lectures, New York, Sept. 4-8, 1978, 65-172.
- [2] M. Hasler, P. Verburgh, Uniqueness of the steady state for small source amplitudes in nonlinear nonautonomous circuits [J] Int. Journal of Circuit Theory and Application, 1985, 13(5), 3-17.
- [3] M. Hasler, P. Verburgh, On the uniqueness of the steady state for nonlinear circuits with time-dependent sources, IEEE Trans. on CAS, 1984, CAS-31(11), 702-713.
- [4] N. Balabanian, T. A. Bickart, Electrical Network Theory, [M] New York, John Wiley & Sons, Inc. 1969, 50-51.

[5] 杨开字, 矩阵分析, 哈尔滨, 哈尔滨工业大学出版社, 1988 年, 45-47.

THE STUDY OF THE UNIQUE STEADY STATE OF
NONLINEAR CIRCUITS BY
WEAKLY STRUCTURED PERTURBATION THEORY

Yang Zhiyi Feng Ping*

(Dept. of Computer Sci. and Tech., Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China)

**(Elec. Eng., Teaching and Research Sect., Logistical Eng. Univ., Chongqing 400016, China)*

Abstract The unique steady state of nonlinear circuits is studied by weakly structured perturbation theory. By means of this method, a new criterion of the unique steady state of the nonlinear circuits is obtained. The restriction to the elements of circuits is just the slope of the constitutive relation is bounded, which is much looser than the classic results published previously. The new criterion in this paper has much wider applicable range than the results already known.

Key words Nonlinear circuit, Unique steady state, Weakly structured perturbation theory

杨志义: 男, 1952 年生, 教授, 主要研究网络与分布计算技术和电路理论.

冯 平: 男, 1962 年生, 讲师, 主要研究电路理论与应用.