

一种脉冲噪声中的韧性恒模算法及其稳定性分析

唐洪 邱天爽

(大连理工大学电子与信息工程学院 大连 116024)

摘要 由于无线信道的噪声表现出脉冲性特征, 常规恒模波束形成器的性能出现退化。该文引入 α 稳定分布作为信道脉冲噪声的模型, 提出一种广义化的韧性恒模波束形成器。以分数低阶统计量为工具分析了该韧性恒模波束形成器在脉冲噪声干扰下所能达到的稳定状态。数值模拟对分析结果进行了验证。

关键词 恒模阵列, 波束形成, α 稳定分布, 分数低阶统计量理论

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)07-1196-05

A Robust CM Algorithm in Impulsive Noise Environment and Its Steady-State Analysis

Tang Hong Qiu Tian-shuang

(School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract The traditional Constant Modulus (CM) beamformers are found to degrade in impulsive noise environment. In this paper, α -stable distribution is introduced as a model of impulsive noise. And a robust CM beamformer is proposed. Steady-state of the beamformer is analyzed based on fractional low-order statistics theory. Computer simulations verify the analysis.

Key words Constant modulus array, Beamformer, α -stable distribution, Fractional low-order statistics theory

1 引言

同信道干扰是通信系统中的一个重要问题, 尤其是无线蜂窝通信系统。随着用户的增加, 同信道干扰变得愈来愈严重, 甚至会限制通信容量的进一步扩大。多年来, 对于同信道信号的恢复问题, 已经提出了许多算法。比如, 基于波达方向估计的算法^[1], 利用信号循环平稳性的算法^[2-3], 利用信号恒模特性的算法^[4-8]等, 这些算法都能在一定的假设条件下从同信道干扰环境中恢复期望信号。

在这些算法中往往会发现一个共同的事实: 即这些算法基本上都假设信道噪声是符合高斯分布的。之所以做出这样的假设, 原因有二: 其一, 理论上中心极限定理的支持; 其二, 这样的假设给算法的研究带来了极大的方便, 使得算法存在简便的表达式, 并且容易分析。然而, 近年来的研究表明, 无线信道的噪声往往不是高斯分布的^[9-10]。特别地, 文献[9]对室内无线信道的测量发现此时的信道噪声表现出显著的脉冲性, 与高斯分布相差较大。造成无线信道噪声非高斯性的原因既有人为因素也有自然因素。主要包括各种电子设备辐射的电磁波和一些自然现象产生的电磁干扰。

为了开发出韧性较好的算法, 首先要找到一个随机分布模型能完美地模拟这种无线信道的脉冲噪声。国际非高斯信号处理领域的著名教授Nikias提出以 α 稳定分布作为模拟无线信道脉冲噪声的模型^[11-13]。 α 稳定分布是一种广义化的高斯分布。它具有许多良好的性质, 其中最重要的是稳定性和广义中心极限定理, 因此它可以作为一般的噪声模型。本文以 α 稳定分布作为无线信道的噪声模型, 提出一种韧性较强的恒模波束形成器, 并以分数低阶统计量理论为工具分析这种恒模波束形成器所能达到的稳定状态。

2 α 稳定分布及其性质

α 稳定分布不像高斯分布那样具有封闭的概率密度函数表达式, 但它的特征函数具有统一的表达式:

$$\varphi(t) = e^{\left\{ j a t - \gamma |t|^\alpha \left[1 + j \beta \operatorname{sgn}(t) \omega(t, \alpha) \right] \right\}}, \text{ 其中 } \omega(t, \alpha) = \tan \frac{\alpha \pi}{2}, (\alpha \neq 1),$$

$$\omega(t, \alpha) = \frac{2}{\pi} \log |t|, (\alpha = 1). \alpha \text{ 是特征指数 } (0 < \alpha \leq 2), \alpha \text{ 愈}$$

小脉冲性愈强。 β ($-1 \leq \beta \leq 1$) 是对称系数, $\beta = 0$ 时表示对称分布, 记为 Sa S (Symmetry α -Stable distribution)。 γ ($\gamma > 0$) 是分散系数 (Idispersion parameter)。 a ($-\infty < a < \infty$) 为位置参数 (location parameter)。 $\alpha = 2$ 和 $\beta = 0$ 对应于高斯分布。

一个特征指数为 α 的稳定分布与高斯分布的一个重要区

2004-11-15 收到, 2005-04-25 改回
国家自然科学基金(60372081, 60172072, 30170259)和辽宁省科学技术基金(2001101057)资助课题

别在于前者不具有 α 阶及以上各阶统计量^[11], 即 $E[|X|^p] = \infty, (p \geq \alpha)$ 。于是在这种非高斯脉冲噪声环境下, 二阶统计量的理论不再适用了。此时, 分数低阶统计量理论成为了一种强有力的工具。本文就是在分数低阶统计量理论的指导下展开工作的。

定理 1 位置参数为零的 α 稳定随机变量的分数低阶矩表示为

$$E(|X|^p) = C(p, \alpha) \gamma^\alpha, \quad 0 < p < \alpha \quad (1)$$

$$\text{式中 } C(p, \alpha) = \left[2^{p+1} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma(-p/\alpha) \right] / \left[\alpha \sqrt{\pi} \Gamma(-p/2) \right],$$

伽马函数 $\Gamma(x) = \int_{-\infty}^x t^{x-1} e^{-t} dt$ 。定理 1 的证明参见文献[11]。作为式(1)的推广, 还存在下面一个结论。如果 X_1, \dots, X_n 是独立的 Sa S 随机变量, 当 $0 < p_1 + \dots + p_n < \alpha$ 时, 有

$$E(|X_1|^{p_1} \cdots |X_n|^{p_n}) < \infty \quad (2)$$

如果复随机变量 X 和 Y 是联合 Sa S 分布的, 定义 X 和 Y 的共变关系(Covariation): $[X, Y]_\alpha = \frac{E(XY^{<p-1>})}{E(|Y|^p)} \gamma_Y$, 其中

$1 \leq p < \alpha, Y^{<p-1>} = |Y|^{p-1} Y^*$ 。共变关系具有以下几个重要性, 这些性质对本文算法的分析具有重要作用。

性质 1 如果复随机变量 X 和 Y 是联合 Sa S 分布的, 共变关系具有对第一变量的线性和对第二变量的伪线性。

$$[aX_1 + bX_2, Y]_\alpha = a[X_1, Y]_\alpha + b[X_2, Y]_\alpha$$

$$[X, aY_1 + bY_2]_\alpha = a^{p-1}[X, Y_1]_\alpha + b^{p-1}[X, Y_2]_\alpha$$

性质 2 共变关系不具有对称性, $[X, Y]_\alpha \neq [Y, X]_\alpha$ 。

性质 3 如果复随机变量 X 和 Y 是独立的, 则 $[X, Y]_\alpha = 0$ 。

3 韧性恒模波束形成器

3.1 韧性恒模波束形成器的迭代方程

假设 m 个阵元的天线阵列接收到 d 个不相关恒模信号, 接收数据表示为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (3)$$

式中 $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_m(k)]^T$ 是 $m \times 1$ 的接收数据向量, \mathbf{A} 是 $m \times d$ 的阵列响应矩阵, $\mathbf{s}(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_d(k)]^T$ 是 $d \times 1$ 的信号向量, 每个信号源 $s_i(k)$ ($i=1, \dots, d$) 具有恒模特性, 信号功率为 $\sigma_{s_i}^2$ 。 $\mathbf{n}(k) = [n_1(k), n_2(k), \dots, n_m(k)]^T$ 是噪声向量, $n_i(k)$ ($i=1, \dots, m$) 是一个分散系数为 γ 的复 Sa S 过程。假设天线阵列为均匀线性阵列(实际上恒模算法对阵元几何结构没有要求, 这样假设只是为了方便分析), 则阵列响应矩阵为 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_d)]$, 其中 $\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{-j\phi_i}, \dots, e^{-j(m-1)\phi_i}]^T$, $\phi_i = 2\pi(\Delta l / \lambda) \sin(\theta_i)$, ($i=1, \dots, d$), θ_i 为各用户信号的波达方向, Δl 为阵元间隔, λ 是载波波长。波束形成器的输出为

$$y(k) = \mathbf{W}^H \mathbf{x}(k) = \sum_{i=1}^d \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i) s_i(k) + \mathbf{W}^H \mathbf{n}(k) \quad (4)$$

式中 $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$ 是复权向量, 其作用是对接收信号进行相位和幅度的调整。恒模波束形成器的最终目的就是找到恰当的 \mathbf{W} 使主波束指向某个具有恒模特性的来波方向。

观察式(4), 波束形成器的输出 y 是源信号的线性组合 $\sum_{i=1}^d \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i) s_i(k)$ 与一个复 α 稳定过程 $\mathbf{W}^H \mathbf{n}(k)$ 之和。可见 y 的 α 阶及以上各阶统计量是不存在的, 但是它的 p ($p < \alpha$) 阶统计量是有限的, 结合式(1)和式(2)定义恒模波束形成器的代价函数:

$$J(\mathbf{W}) = E \left\{ \left| |\mathbf{W}^H \mathbf{x}|^q - \delta \right|^p \right\}, \quad qp < \alpha \quad (5)$$

式中 δ 为波束形成器输出端期望信号的幅值。在高斯噪声情况下 q 和 p 可分别取为 1 或 2 的 4 种组合。实际上采用了输出的四阶矩或二阶矩作为代价函数。根据式(2), 在稳定分布噪声下必须使 $qp < \alpha$, 式(5)才有意义。为了以后的简化计算, 本文特别地取 $p=2, q < \alpha/2$ 。采用随机梯度下降法求解式(5)(见附录 A), 得到

$$e(k) = (|y(k)|^q - \delta) |y(k)|^{q-2} y(k) \quad (6a)$$

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) - \mu \mathbf{x}(k) e^*(k) \quad (6b)$$

式(6)就是本文研究的韧性恒模波束形成器迭代方程。式中的 q 不再限制为整数, 可以取小数。若取 $q=2$, 则式(6a)成为

$$e(k) = \left[|y(k)|^2 - \delta \right] \text{sgn}(|y(k)|^2 - \delta) y(k) = (|y(k)|^2 - \delta) y(k) \quad (7)$$

这就是(2, 2)型算法的迭代方程。若取 $q=1$, 则式(6a)成为

$$e(k) = y(k) - \delta y(k) / |y(k)| \quad (8)$$

这就是(1, 2)型算法的迭代方程。这表明, 式(6)的 (p, q) 型算法为(2, 2)型和(1, 2)型算法的广义化, 而(2, 2)型和(1, 2)型算法为 (p, q) 型算法的一个特例。

3.2 韧性恒模波束形成器的收敛模型

我们在文献[14]中建立了一个分析模型来研究该韧性恒模波束形成器式(6)的收敛特性并得出结论: 在 α 稳定分布脉冲噪声环境中, 当阵列同时接收到多个同信道信号时, 波束形成器的初始权向量和信号的功率共同决定了波束形成器将捕获哪一个信号。初始权向量一旦确定, 将捕获功率较大的那一个信号, 并抑制掉其它功率较小的信号, 这一结论与文献[4]也是吻合的。另一方面, 也可以通过调整初始权向量使波束形成器捕获感兴趣的信号。

4 韧性恒模波束形成器的稳定状态

4.1 韧性恒模波束形成器的最优权向量

从 3.2 节知道, 稳定分布噪声环境中韧性恒模波束形成器按照式(6)迭代, 当权向量 $\mathbf{W}(k)$ 收敛以后, 波束形成器必定会捕获一个信号并抑制掉其它信号。本节将研究权向量收敛的稳定点, 给出最优权向量的解析表达式。假定韧性恒模波束形成器捕获 d 个信号中的第 i 个信号, 则波束形成器对第 i 个信号的估计误差表示为 $e_i^b(k) = s_i(k) - y(k)$ 。波束形成

器达到稳定后, 误差 $e_i^b(k)$ 应该达到最小。根据式(1), 定义代价函数:

$$J(\mathbf{W}) = E \left\{ |s_i(k) - y(k)|^p \right\}, \quad 1 \leq p < 2 \quad (9)$$

从式(1)还知道, $\min(E |X|^p) \Leftrightarrow \min(\gamma_X)$, 这里“ \Leftrightarrow ”表示“等价”。令误差 $e_i^b(k)$ 的分散系数为 γ_{e^b} , 于是代价函数式(9)等价地转换为

$$\mathbf{W} = \arg \left\{ \min_{\mathbf{W} \in \mathcal{C}} E \left\{ |s_i(k) - y(k)|^p \right\} \right\} \Leftrightarrow \mathbf{W} = \arg \left\{ \min_{\mathbf{W} \in \mathcal{C}} (\gamma_{e^b}) \right\} \quad (10)$$

根据共变与分散系数的关系, 得到

$$\gamma_{e^b} = [e_i^b(k), e_i^b(k)]_{\alpha} \quad (11)$$

把 $e_i^b(k) = s_i(k) - y(k)$ 和 $y(k) = \mathbf{W}^H \mathbf{x}(k)$ 代入式(11), 经过整理(见附录 B)得到

$$\gamma_{e^b} = \mathbf{W}^H \mathbf{C}_{xx} \mathbf{W} - \gamma_{s_i} \quad (12)$$

式中 \mathbf{C}_{xx} 表示接收信号的共变矩阵。由于我们已经假设韧性恒模波束形成器捕获了第 i 个信号源, 有

$$\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i) = 1 \quad (13)$$

代价函数式(10)可以进一步转换为

$$\mathbf{W} = \arg \left\{ \min_{\mathbf{W} \in \mathcal{C}} (\mathbf{W}^H \mathbf{C}_{xx} \mathbf{W} - \gamma_{s_i}) \right\}, \quad \text{s.t. } \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i) = 1 \quad (14)$$

采用 Langerange 乘子法, 最优权向量应该满足下面的代价函数:

$$G(\mathbf{W}) = \mathbf{W}^H \mathbf{C}_{xx} \mathbf{W} - \gamma_{s_i} + \lambda_i (\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i) - 1) \quad (15)$$

对式(15)求解, 得到韧性恒模波束形成器所能达到的最优权向量:

$$\mathbf{W}_{\text{opt}} = \lambda_i \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_i) \quad (16)$$

把式(16)代入式(13)得到参数 λ_i 的取值:

$$\lambda_i = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta_i) (\mathbf{C}_{xx}^{-1})^H \mathbf{a}(\theta_i)} \quad (17)$$

当噪声较小时 $\mathbf{a}^H(\theta_i) (\mathbf{C}_{xx}^{-1})^H \mathbf{a}(\theta_i) \approx 1/\sigma_{s_i}^2$ 。于是韧性恒模波束形成的所能达到的最优权向量就是 $\mathbf{W}_{\text{opt}} \approx \sigma_{s_i}^2 \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_i)$ 。第5节的数值模拟将对此式验证。当 α 稳定分布噪声的脉冲性减弱并退化为高斯噪声时, 式(16)也是高斯噪声环境中波束形成器的最优权向量^[6, 7]。此时 \mathbf{C}_{xx} 退化为相关矩阵 \mathbf{R}_{xx} , 式(16)也相应地变成 $\mathbf{W}_{\text{opt}} \approx \sigma_{s_i}^2 \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_i)$ 。

4.2 韧性恒模波束形成的输出信干噪比 SINR^{out}

波束形成器权向量 $\mathbf{W}(k)$ 收敛到最优解 \mathbf{W}_{opt} 后, 输出由捕获的信号和噪声组成, 即

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathbf{W}_{\text{opt}}^H \mathbf{X}(k) = \sum_{i=1}^d \mathbf{W}_{\text{opt}}^H \mathbf{a}(\theta_i) s_i(k) + \mathbf{W}_{\text{opt}}^H \mathbf{n}(k) \\ &= s_i(k) + \mathbf{W}_{\text{opt}}^H \mathbf{n}(k) \end{aligned} \quad (18)$$

这里使用了约束条件 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^H \mathbf{a}(\theta_i) = 1$ 和 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^H \mathbf{a}(\theta_j) = 0, (j \neq i)$ 。这里 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^H \mathbf{n}(k)$ 仍然是一个稳定分布的噪声, 假定此噪声的分散系数为 γ_{opt} 。于是波束形成器输出的信干噪比 SINR^{out} 为

$$\text{SINR}_i^{\text{out}} = 10 \lg \left(E \{ |s_i(k)|^2 \} / \gamma_{\text{opt}} \right) \quad (19)$$

而输入信干噪比 SINRⁱⁿ 为

$$\text{SINR}_i^{\text{in}} = 10 \lg \left[E \{ |s_i(k)|^2 \} / \left(\gamma + \sum_{j=1, j \neq i}^d E \{ |s_j(k)|^2 \} \right) \right] \quad (20)$$

则第 i 个信号获得的信干噪比增益 Gain _{i} 表示为

$$\begin{aligned} \text{Gain}_i &= \text{SINR}_i^{\text{out}} - \text{SINR}_i^{\text{in}} \\ &= 10 \lg \left[\left(\gamma + \sum_{j=1, j \neq i}^d E \{ |s_j(k)|^2 \} \right) / \gamma_{\text{opt}} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)就是韧性恒模波束形成器所能达到的最优输出信干噪比增益, 可以发现第 i 个信号获得了很大的增益。另一方面也验证了波束形成器把主波束指向了第 i 个信号。

5 数值模拟

假设有 $m=10$ 个阵元的均匀线性阵列, 接收到 3 个不相关正弦信号, 且每个信号都具有单位功率。 α 稳定分布噪声的特征指数 $\alpha=1.5$, 分散系数 $\gamma=0.1$ 。参数 q 选取为 $q=0.7$ 。现在来验证波束形成器的最优权向量。通过设置波束形成器的初始权向量, 使第 1 个信号被捕获, 则波束形成器的最优权向量为 $\mathbf{W}_{\text{opt}} = \sigma_{s_1}^2 \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_1)$ 。最优权向量 \mathbf{W}_{opt} 有 10 个元素, 对应于 10 个阵元, 它们的幅值和相位如图 1(a), 1(b) 所示。选取一定的迭代步长, 式(6)经过 1000 次迭代达到稳定。 $\mathbf{W}(1000)$ 的幅值和相位如图 1(c), 1(d) 所示。由于本例采用的是均匀线性阵列, 阵元间距为半波长, 所以相邻阵元的相位差为 90° 。对比图 1(a), 1(b) 与图 1(c), 1(d), 可见波束形成器稳定后的权向量与理论值是非常接近的。从图 1(a) 和 1(c) 看出波束形成器的幅值几乎保持恒定的, 验证了我们在附录中关于权向量幅值的假设。

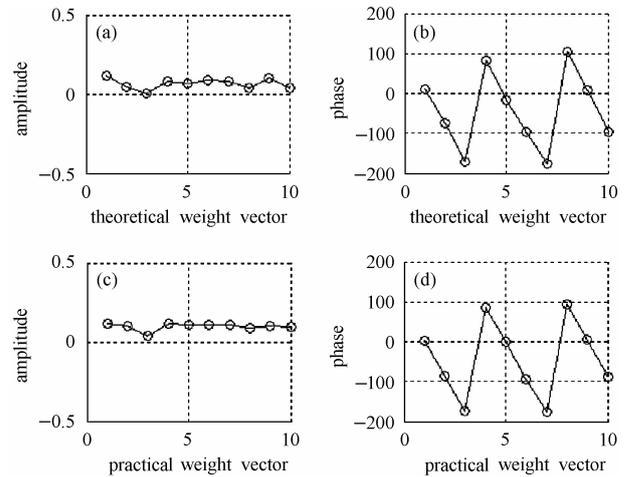


图1 理论上的权向量与迭代求解的权向量 (a)理论计算权向量的幅值, (b)理论计算权向量的相位(单位: 度), (c)迭代方程稳定后权向量的幅值, (d)迭代方程稳定后权向量的相位(单位: 度)

Fig.1 Comparison between the theoretical weight vector and the practical weight vector (a) the amplitude of theoretical weight vector, (b) the phase of theoretical weight vector, (c) the amplitude of practical weight vector, (d) the phase of practical weight vector

当波束形成器达到稳定后, 输出信干噪比和输入信干噪比理论上应该达到式(19)和式(20)的计算结果。式(19)计算的

输出信干噪比为

$$\text{SINR}_i^{\text{out}} = 10 \lg \left(E\{|s_i(k)|^2\} / \gamma_{\text{opt}} \right) = 4.55 \text{ (dB)}$$

而式(6)达到稳定后,波束形成器输出 $y(k)$ 的实际信干噪比为 3.94dB。按照式(20)计算的输入信干噪比:

$$\text{SINR}_i^{\text{in}} = 10 \lg \left[E\{|s_i(k)|^2\} / \left(\gamma + \sum_{j=1, j \neq i}^d E\{|s_j(k)|^2\} \right) \right] = -7.37 \text{ (dB)}$$

可见,第 1 个信号被波束形成器捕获后,理论上第 1 个信号应该获得的增益为 $\text{Gain}_i = 4.55 - (-7.37) = 11.92 \text{ dB}$,而实际上获得的增益为 $3.94 - (-7.37) = 11.31 \text{ dB}$ 。

6 结束语

本文以 α 稳定分布作为无线信道脉冲噪声的模型,提出了一种广义化的韧性恒模波束形成器。利用分数低阶统计量理论为工具分析了该波束形成器在脉冲噪声环境中所能达到的稳定状态。分析表明:尽管在脉冲噪声环境中,该韧性恒模波束形成器也会捕获其中一个信号并抑制掉其它信号。稳定时所能达到的最优权向量与被捕获信号的功率 σ_s^2 ,该信号方向向量 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 和共变矩阵 \mathbf{C}_{xx} 有关,表示为 $\mathbf{W}_{\text{opt}} = \sigma_s^2 \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_i)$,如式(16)。而该信号经过波束形成器后获得的增益表示为式(21)。

附录 A

随机梯度下降法表示为

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) - \mu \nabla J(\mathbf{W}(k)) \quad (\text{A-1})$$

其中 $\nabla J(\mathbf{W}(k))$ 表示代价函数在第 k 时刻的梯度。如果以瞬时梯度代替期望梯度,则 $\nabla J(\mathbf{W}(k))$ 可表示为

$$\begin{aligned} \nabla J(\mathbf{W}(k)) &= \frac{\partial J(\mathbf{W}(k))}{\partial \mathbf{W}^*(k)} = \|y(k)\|^q - \delta\|y(k)\|^{p-1} \\ &\quad \cdot \text{sgn}(\|y(k)\|^q - \delta) |y(k)|^{q-1} \frac{y(k)}{|y(k)|} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

本文特别地取 $p=2$, $q < \alpha/2$, 则

$$\nabla J(\mathbf{W}(k)) = (\|y(k)\|^q - \delta) |y(k)|^{q-2} y(k) \mathbf{x}(k) \quad (\text{A-3})$$

于是得到权向量的迭代求解方程:

$$e(k) = (\|y(k)\|^q - \delta) |y(k)|^{q-2} y(k) \quad (\text{A-4})$$

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) - \mu \mathbf{x}(k) e^*(k) \quad (\text{A-5})$$

附录 B

把 $e_i^b(k) = s_i(k) - y(k)$ 代入式(11),并利用本文第 2 节中共变的性质,则

$$\begin{aligned} \gamma_{e^b} &= [e_i^b(k), e_i^b(k)]_{\alpha} = [s_i(k), s_i(k)]_{\alpha} - [s_i(k), y(k)]_{\alpha} \\ &\quad - [y(k), s_i(k)]_{\alpha} + [y(k), y(k)]_{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

$y(k) = \mathbf{W}^H \mathbf{x}(k)$ 可以写为

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathbf{W}^H \mathbf{x}(k) = \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_1) s_1(k) + \dots + \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i) s_i(k) \\ &\quad + \dots + \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_d) s_d(k) + \mathbf{W}^H \mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

把式(B-2)代入式(B-1)中。假设信号 $s_i(k)$ 和 $s_j(k)$ 是正交的,再次利用共变的性质,式(B-1)中的每一个分量分别表达为

$$\begin{aligned} [s_i(k), y(k)]_{\alpha} &= [s_i(k), \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_1) s_1(k) + \dots + \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i) s_i(k) \\ &\quad + \dots + \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_d) s_d(k) + \mathbf{W}^H \mathbf{n}]_{\alpha} \\ &= (\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i))^{\langle p-1 \rangle} [s_i(k), s_i(k)]_{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

$$\begin{aligned} [y(k), s_i(k)]_{\alpha} &= [\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_1) s_1(k) + \dots + \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i) s_i(k) \\ &\quad + \dots + \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_d) s_d(k) + \mathbf{W}^H \mathbf{n}, s_i(k)]_{\alpha} \\ &= (\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i)) [s_i(k), s_i(k)]_{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

$$\begin{aligned} [y(k), y(k)]_{\alpha} &= [\mathbf{W}^H \mathbf{X}(k), \mathbf{W}^H \mathbf{X}(k)]_{\alpha} \\ &= \mathbf{W}^H [\mathbf{X}(k), \mathbf{X}(k)]_{\alpha} (\mathbf{W})^{\langle p-1 \rangle} \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

把式(B-3)、式(B-4)、式(B-5)代入式(B-1)中,得到

$$\begin{aligned} \gamma_e &= [s_i(k), s_i(k)]_{\alpha} - (\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i))^{\langle p-1 \rangle} [s_i(k), s_i(k)]_{\alpha} \\ &\quad - (\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta_i)) [s_i(k), s_i(k)]_{\alpha} \\ &\quad + \mathbf{W}^H [\mathbf{X}(k), \mathbf{X}(k)]_{\alpha} (\mathbf{W})^{\langle p-1 \rangle} \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

另外,我们还假设波束形成器的权向量只对接收信号的相位进行调整而不改变信号的幅度。这个假设可以由后来的数值模拟验证,见图 1(a), 1(c)。把约束条件式(13)代入式(B-6),得到

$$\gamma_e = \mathbf{W}^H [\mathbf{X}(k), \mathbf{X}(k)]_{\alpha} \mathbf{W} - \gamma_{s_i} = \mathbf{W}^H \mathbf{C}_{xx} \mathbf{W} - \gamma_{s_i} \quad (\text{B-7})$$

参考文献

- [1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. on Antennas Propagation*, 1986, 34(3): 276 - 280.
- [2] Ju-Hong L, Yung-Ting L. Robust adaptive array beamforming for cyclostationary signals under cycle frequency error. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1999, 47(2): 233 - 241.
- [3] Qiang W, Kon Max W. Blind adaptive beamforming for cyclostationary signals. *IEEE Trans. on signal Processing*, 1996, 44(11): 2757 - 2767.
- [4] Gooch R P, Lundell J D. The CM array: An adaptive beamformer for constant modulus signals. In: Proc. IEEE ICASSP-86, Tokyo, Japan, 1986: 2523 - 2526.
- [5] Agee B G. Blind separation and capture of communication signals using a multitarget constant modulus beamformers. 1989 IEEE Military Communication Conference, Boston, Oct. 1989: 340 - 346.
- [6] Shynk J J, Gooch R P. The constant modulus array for cochannel signal copy and direction finding. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1996, 44(3): 652 - 660.
- [7] Shynk J J, Keerthi A V, Mathur A. Steady-state analysis of the multistage constant modulus array. *IEEE Trans. on Signal*

- Processing*, 1996, 44(4): 948 – 962.
- [8] Treichler J R, Larimore M G. The tone capture properties of CMA-based interference suppressors. *IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, 1985, 33(4): 946 – 958.
- [9] Blackard K L, Rappaport T S. Measurements and models of the radio frequency impulsive noise for indoor wireless communications. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1993, 11(7): 991 – 1001.
- [10] Blankship T K, Krizman D M, Rappaport T S. Measurements and simulation of radio frequency impulsive noise in hospitals and clinics. IEEE Vehicular Technology Conference, Virginia USA, 1997, vol. 3: 1942 – 1946.
- [11] Nikias C L, Shao M. *Signal Processing with Alpha-Stable Distribution and Application*. New York; John Wiley & Sons, Inc, 1995: 13 – 56.
- [12] Rupi M, Tsakalides P, Nikias C L, *et al.*. Robust constant modulus arrays based on fractional lower-order statistics., 1999 ICASSP '99 Proceedings, IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Los Angeles, USA, 1999, volume 5: 2945 – 2948.
- [13] Tsakalides P, Nikias C L. Robust adaptive beamforming in alpha-stable noise environments. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Los Angeles, USA, 1996, vol. 5: 2884 – 2887.
- [14] Qiu Tianshuang, Tang Hong, Zha Daifeng. Capture properties of the generalized CMA in alpha stable noise environment. The 7th International Conference on Signal Processing, Beijing, China, 2004: 439 – 442.
- 唐 洪: 男, 1977 年生, 博士生, 研究方向为广义正态信号处理及其在相关领域中的应用.
- 邱天爽: 男, 1954 年生, 教授, 博士生导师, 从事信号与信息处理的研究工作.