

最小二乘法分离频率相近的正弦信号

王哲英^① 马明旭^② 朴凤贤^③ 王哲锋^④

^①(沈阳工业大学材料科学与工程学院成型教研室 沈阳 110023)

^②(中国科学院沈阳自动化研究所 沈阳 110016)

^③(沈阳航空工业学院 沈阳 110034)

^④(东北大学材料与冶金学院 沈阳 110004)

摘要 传统的快速傅里叶变换(FFT)可以有效地对正弦信号进行分析,但对于分析频率相近的正弦信号却存在很大的误差。该文提出了采用最小二乘法来分析该问题。该算法在观测矩阵的基础上,利用2范数最小的终止准则,通过求解超定方程组,辨识频率相近信号组成的特征参数。仿真结果表明,该方法可以精确地分析频率相近信号各组成部分,有效地抑制噪声的干扰,具有较好的噪声稳定性和频域分析能力,从而提高信号处理的效率与精度。

关键词 信号处理, FFT, 最小二乘法

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)01-0060-06

The Separation of Similar Frequency Sinusoidal Signal Based on the Least Square Method

Wang Zhe-ying^① Ma Ming-xu^② Piao Feng-xian^③ Wang Zhe-feng^④

^①(Metal Forming Research Office, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, China)

^②(Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016, China)

^③(Shenyang Institute of Aeronautical Engineering, Shenyang 110034, China)

^④(Material & Metallurgy Academic, Northeastern University, Shenyang, 110004, China)

Abstract Traditional FFT can effectively analyze the sinusoidal signal, but the very big error exists for analyzing the similar frequency sinusoidal signal. In this article, adopting Least Square (LS) method which can separate similar frequency sinusoidal signal is put forward. Characteristic parameters of separating similar frequency sinusoidal signal can be identified by satisfying termination criterion of 2-norm minimum and solving overdetermined equations on observation matrix. The simulation result shows that each component of similar frequency signal such as amplitude, phase angle can be separated from original signal, the interference of noise can effectively be restrained, noise stability and the frequency domain analysis ability become better, so the efficiency and precision of signal processing can be raised.

Key words Signal processing, FFT, Least square

1 引言

在工程应用(如旋转机械故障诊断^[1], 仪器仪表信号的分析, 传感器信号的分析)中, 正弦信号的提取及处理是信号处理^[2]中的一类重要的问题, 在这类问题中如果忽视了频率相近正弦信号的分离与提取这个问题, 不仅会对研究对象状态误分析、误预报, 而且会对以后控制系统的设计与开发造成很大误差, 甚至使整个控制系统失灵。

在正弦信号谐波过程的频谱估计方法^[3-5]中, 以快速傅里叶变换提取法为代表, 通过对输入信号进行频谱分析, 可以

较好地观测和分析原信号, 但实际上利用该方法分析和提取频率相近的信号却存在很大误差。鉴于这种情况, 本文采用最小二乘法在观测矩阵的基础上, 利用2范数最小的终止准则, 通过求解线性方程组, 辨识频率相近正弦信号组成的特征参数。该方法的特点是基于观测数据的矩阵分析方法, 该方法计算稳定性好, 频谱分辨能力高, 而且可以有效地消除观测矩阵的噪声扰动, 改善估计性能。利用最小二乘法可以有效地辨识频率相近信号各组成成分, 其中辨识信号的频率已在文献[6]中论述, 本文在此基础上讨论辨识频率相近信号组成的幅值和相角。

2 算法描述

一般由含有噪声的正弦波的叠加可以表示成

$$x(n) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(\omega_k t + \theta_k) + \text{rand}(n) \quad (1)$$

而对于纯谐波过程，不含噪声的模型为

$$y(n) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(\omega_k t + \theta_k) \quad (2)$$

式中 $\{A_k, \omega_k : k=1, \dots, K\}$ 是未知常数， $\{\theta_k : k=1, \dots, K\}$ 是在 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布的独立随机变量， ω_k 是正弦信号的角频率， $\text{rand}(n)$ 是均匀分布的随机噪声。

正弦信号检测的目的就是给定 n 个观测数据 $\{x(1) \dots x(n)\}$ 来估计未知参数。经典的谱估计方法(如周期图法和自相关法)都可用 FFT 快速计算，特别是周期图法是建立在 FFT 算法的基础上，假定数据窗以外的数据全为零，同时无法实现功率谱密度原始定义中的求平均值和求极限的运算，所以方差性能较差，分辨率较低。但以参数模型法为主要内容的现代谱估计方法不同于经典的频谱估计方法，它可以有效地改善谱估计的分辨率，所以采用现代谱估计方法辨识信号频率明显要好于采用 FFT 方法估计信号频率。因此对于上述模型式(2)，可以利用 AR(2K)线性预测模型估计出各正弦信号的频率：

$$\sum_{k=0}^{2K} a_k y(n-k) = 0, \quad n=2K+1, \dots, N \quad (3)$$

由于 $\{a_k\}$ 具有中心元素对称性，该式表示 $N-2K$ 个方程，有 K 个未知数。由于实际应用中信号都要受噪声的干扰，所以采用文献[6]的总体最小二乘法(TLS^[6])，求出 $\{a_k\}$ 的估计值，则以下 z 的多项式：

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{2K} a_k z^{2K-k} \quad (4)$$

的 $2K$ 个根均为 z 平面单位圆上的共轭复根，可按下式：

$$\omega_k = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(z_k)}{\text{Re}(z_k)} \right] \quad (5)$$

这样就可以由 $\{\omega_k\}$ 求出各正弦信号的频率 $\{f_k\}$ ，下面讨论正弦信号频率求出后，利用最小二乘法去求信号的幅值与相角。

2.1 两个频率相近信号参数估计算法模型

假设上式中的 L 和 k 都等于 1，两个频率相近的信号便可取作如下的形式：

$$\begin{aligned} & A_1 \cos(\omega_1 \cdot t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 \cdot t + \theta_2) \\ &= A_1 \cos \omega_1 t \cos \theta_1 - A_1 \sin \omega_1 t \sin \theta_1 + A_2 \cos \omega_2 t \cos \theta_2 \\ &\quad - A_2 \sin \omega_2 t \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (6)$$

设 $x_1 = A_1 \cos \theta_1, x_2 = A_1 \sin \theta_1, x_3 = A_2 \cos \theta_2, x_4 = A_2 \sin \theta_2$,

待估计的参数为 x_1, x_2, x_3, x_4 ，各次的观测值为 $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ ，可得出 $Ax=b$ 的线性方程组，求解该线性方程组就可以辨识出信号的特征参数

$$\begin{bmatrix} \cos \omega_1 t_1 & -\sin \omega_1 t_1 & \cos \omega_2 t_1 & -\sin \omega_2 t_1 \\ \cos \omega_1 t_2 & -\sin \omega_1 t_2 & \cos \omega_2 t_2 & -\sin \omega_2 t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \omega_1 t_n & -\sin \omega_1 t_n & \cos \omega_2 t_n & -\sin \omega_2 t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

这里的 n 为观测点数，在对连续信号离散化时，为了使信号抽样后的信号可以较好地恢复和重现原连续信号，在保证 Shannon 采样定理的同时，一般选取观测点数 n 比待估参数个数 4 要大得多，可以用最小二乘法来估计上式待估参数，它就是通过使 2 范数：

$$\|Ax-b\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^4 a_{ij} \cdot x_j - b_i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n > 4 \quad (8)$$

达到最小值时所获得的最小二乘法估计。然后采用 Householder 变换法来计算此最小二乘估计。在这里引入一个 $n \times n$ 维的正交阵 Q ，为 4 个 H 变换阵的乘积，使得

$$Q \cdot A = T = \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

其中 $\bar{T}$ 为 4×4 维上三角矩阵， $\mathbf{0}$ 为 $(n-4) \times 4$ 维的零矩阵。

因为 $\|Q\| = I$ 所以有： $\|Ax-b\|_2 = \|QAx-Qb\|_2 = \|Tx-Qb\|_2$ 。

令 $C = Qb$ 且 $\bar{C}$ 为 C 的前 4 个分量，有

$$\|Tx-Qb\|_2 = \left(\|\bar{T}x-\bar{C}\|^2 + \sum_{i=m+1}^n (C_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m=4, n>m \quad (9)$$

式(9)中右边的第 2 项不含有待估计参量 x ，为使上式达到最小值，取 $\bar{T}x = \bar{C}$ ，由此可得 x 的最小二乘估计式为 $x = \bar{T}^{-1} \bar{C}$ ，然后进一步得到 $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ 的估计值：

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & A_2 &= \sqrt{x_3^2 + x_4^2}, \\ \theta_1 &= \arctg(x_2 / x_1), & \theta_2 &= \arctg(x_4 / x_3) \end{aligned} \quad (10)$$

2.2 多个频率相近信号参数估计算法模型

类似地，若上式中有 m 个频率相近的信号，那么便有如下形式：

$$\begin{aligned} & A_1 \cos(\omega_1 \cdot t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 \cdot t + \theta_2) + \dots + A_m \cos(\omega_m \cdot t + \theta_m) \\ &= A_1 \cos \omega_1 t \cos \theta_1 - A_1 \sin \omega_1 t \sin \theta_1 \\ &\quad + A_2 \cos \omega_2 t \cos \theta_2 - A_2 \sin \omega_2 t \sin \theta_2 + \dots \\ &\quad + A_m \cos \omega_m t \cos \theta_m - A_m \sin \omega_m t \sin \theta_m \end{aligned} \quad (11)$$

设 $x_1 = A_1 \cos \theta_1$, $x_2 = A_1 \sin \theta_1$, $x_3 = A_2 \cos \theta_2$, $x_4 = A_2 \sin \theta_2$,
 $x_{2m-1} = A_m \cos \theta_m$, $x_{2m} = A_m \sin \theta_m$, 这样待估计的参数成为
 $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}$ 各次的观测值为 $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n$,

$$\begin{bmatrix} \cos \omega_1 t_1 & -\sin \omega_1 t_1 & \cos \omega_2 t_1 & -\sin \omega_2 t_1 & \cdots \\ \cos \omega_1 t_2 & -\sin \omega_1 t_2 & \cos \omega_2 t_2 & -\sin \omega_2 t_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \omega_1 t_n & -\sin \omega_1 t_n & \cos \omega_2 t_n & -\sin \omega_2 t_n & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

设上述方程的系数矩阵为 A , 矩阵 A 的秩为 $r(A)$, 下面讨论观测点数 n 与待估量个数 $2m$ 关系对该方程的解的影响情况:

(1) 当观测点数 n 与待估量参数 $2m$ 关系使得 $r(A) < 2m$ 时, 方程的个数小于待估量的个数, 该方程会有许多解, 所以不能由该方程很好确定待估量。

(2) 当观测点数 n 与待估量参数 $2m$ 关系使得 $r(A) = 2m$ 时, 方程的个数等于待估量的个数, 有唯一一组解, 可以唯一确定待估量。

(3) 当观测点数 n 与待估量参数 $2m$ 关系使得 $r(A) > 2m$ 时, 方程的个数大于待估量的个数, 该方程属于一种矛盾方程组, 对于这种矛盾方程组一般不存在通常意义下的解, 即对任意 n 维向量 A , 一般 $Ax - b \neq 0$, 因此对于这类情况, 要采用最小二乘法来求得待估量。利用该方法求得的待估量, 能够保证误差分量按照某一向量范数(一般求取 2 范数)取最小值, 从而为矛盾方程找到了最优参数估计。

这样根据两个频率相近信号参数估计的算法模型及最小二乘法算法原理就可以为方程式(12)找到最优的参数估计 $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$, 从而推导出多个频率相近信号参数估计的算法模型

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta_1 = \arctg(x_2 / x_1) \\ A_2 &= \sqrt{x_3^2 + x_4^2}, \quad \theta_2 = \arctg(x_4 / x_3), \dots \\ A_m &= \sqrt{x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2}, \quad \theta_m = \arctg(x_{2m} / x_{2m-1}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

最后由式(13)可求出各频率相近正弦信号的幅值和相角。

2.3 频率相近信号分析时应注意的问题

通过以上分析可知, 对于多个(m 个)频率相近的信号, 其待估量为 $2m$, 在对该种信号进行分析时, 其方程的个数与采样的间隔时间、采样点选择的多少有直接的关系, 因此在对频率相近的信号进行分析时, 其观测点 n 的选择是个很重要的参量。在对连续信号离散化时, 为了使信号抽样后的

信号可以较好地恢复和重现原连续信号, 在保证 Shannon 采样定理的同时, 一定要使观测点数 n 大于或等于待估量 $2m$, 这样才能发挥最小误差的作用。在对实际问题进行分析时, 如果观测点的个数 n 未能达到待估量的个数 $2m$, 可以通过适当的增加采样点个数来增加观测点 n , 使其达到或超过待估量的个数 $2m$ 。

3 仿真结果与讨论

仿真实例 1 下面的信号是由两个频率相近($f_1 = 1 \text{ Hz}$, $f_2 = 0.95 \text{ Hz}$)的信号组成, 其问题模型可以表示为

$$Q(t) = 5 \cos(2 \cdot \pi \cdot t + \pi / 4) + 10 \cos(2 \cdot \pi \cdot 0.95 \cdot t - \pi / 3) + 0.2 \text{rand}(n) \quad (14)$$

首先把信号对时间 t 离散化, 该信号的采样总时间为 $T = 18 \text{ s}$, 观测点取 $n = 128$, 观测序列 $i = 1:n$, 采用间隔时间为 $cT = T/n = 0.14$, 采样频率为 $cf = n/T = 7.1$, 因此满足 Shannon 采样定理, 并且由于是两个频率相近的信号($m = 2$), 那么待估量为 $4(2m = 4)$, 所以观测点个数要大于待估量, 可以采用最小二乘法来进行分析。下面是经过快速傅里叶变换算法频谱分析后结果:

图 1(a)是式(14)原混合信号随时间的变化图, 图 1(b)是经过 FFT 分析后的幅频图, 图 1(c)是 FFT 分析的相频图, 由这个图可以看出该信号是由两个相近信号所组成。图 2(a)和图 2(b)分别是 FFT 分析后成分 1 信号与原成分 1 的误差曲线, 成分 2 信号与原成分 2 的误差曲线, 可见经 FFT 分析两种成分信号的参数估计误差较大。

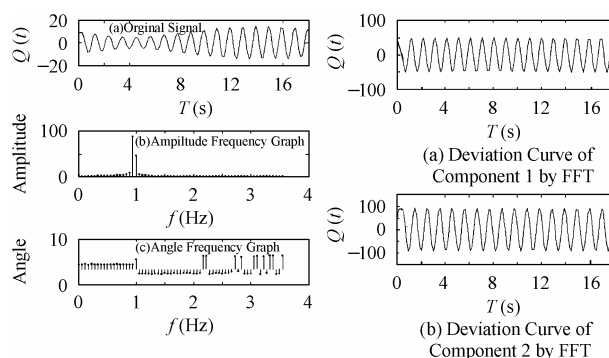


图 1 2 个信号成分的
频谱分析结果

图 2 2 个信号成分 FFT
提取的误差曲线

取式(14)待分析信号, 对时间 t 离散化后, 采样时间、观测点数、观测序列、采样间隔时间及采样频率都保持不变, 那么利用最小二乘法算法分析后, 仿真结果如图 3 所示。图 3(a)和图 3(b)分别是利用 LS 算法分析得到的成分 1 与原成分 1 的误差曲线、成分 2 与原成分 2 的误差曲线, 从图 3(a)和图 3(b)可以看出经过 LS 分析后两个信号成分的误差曲线明显

降低,较好的提取了原信号混合信号的两个成分,同时也说明利用 LS 可以精确地分析原信号的幅值和相角,也解决了 FFT 分析信号相位滞后的问题。图 4 中的图 4(a)和图 4(b)鲜明地显示了利用 FFT 和 LS 方法,在分析频率相近信号时,LS 方法的独特的作用。表 1 是 FFT 分析两个频率相近信号的参数列表与 LS 分析该信号的参数列表。

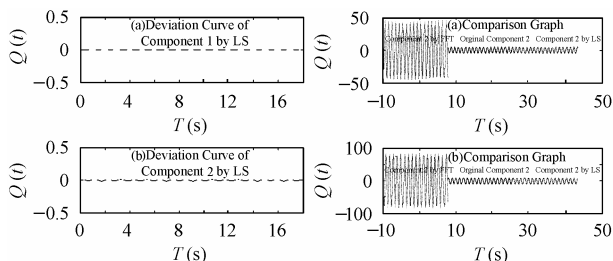


图 3 2 个信号成分 LS

提取的误差曲线

图 4 2 个信号成分 FFT 与 LS

分析结果的比较

仿真实例 2 下面的信号是由 3 个频率相近($f_1=1\text{ Hz}$, $f_2=0.98\text{ Hz}$, $f_3=1.02\text{ Hz}$)的信号组成,其问题模型可以表示为

$$P(t) = 5\cos(2 \cdot \pi \cdot t + \pi/4) + 10\cos(2 \cdot \pi \cdot 0.98 \cdot t - \pi/3) + 20\cos(2 \cdot \pi \cdot 1.02 \cdot t + \pi/3) + 0.2\text{rand}(n) \quad (15)$$

同样先把信号对时间 t 离散化,该信号的采样总时间为 $T=18\text{ s}$,观测点取 $n=128$,观测序列 $i=1:n$,采用间隔时间为 $cT=T/n=0.14$,采样频率为 $cf=n/T=7.1$,因此满足 Shannon 采样定理,并且由于是两个频率相近的信号($m=3$),那么待估量为 $6(2m=6)$,所以观测点个数要大于待估量,可以采用最小二乘法来进行分析。离散化后信号经过快速傅里叶变换算法分析后结果如图 5 所示。图 5(a)是式(15)原混合信号随时间的变化图,图 5(b)是经过 FFT 分析后的幅频图,图 5(c)是 FFT 分析的相频图,由这个图可以看出该信号是由 3 个相近信号所组成。图 6 中的图 6(a),图 6(b),图 6(c)分别是经 FFT 分析成分 1 信号与原成分 1 的误差曲线,成分 2 信号与原成分 2 的误差曲线,成分 3 信号与原成分 3 的误差曲线,由这个图可以看出 3 种成分信号的参数估计误差都较大。

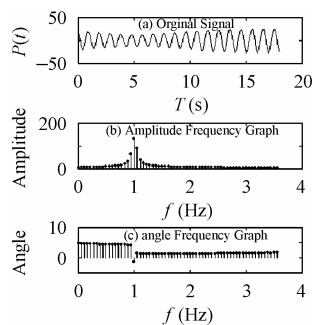


图 5 3 个信号成分

的频谱分析结果

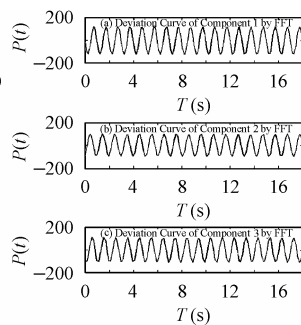


图 6 3 个信号成分 FFT

提取的误差曲线

取式(15)待分析信号,对时间 t 离散化后,采样时间、观测点数、观测序列、采样间隔时间及采样频率同上都保持不变,那么利用最小二乘法算法分析后,仿真结果如图 7 所示。图 7(a),图 7(b)和图 7(c)分别是经过 LS 分析后成分 1 与原成分 1 的误差曲线,成分 2 与原成分 2 的误差曲线,成分 3 与原成分 3 的误差曲线,由该图可以明显看出误差明显降低,较好地分离了原信号的各个组成部分,同时也说明利用 LS 可以精确地分析原信号的幅值和相角,也解决了 FFT 分析信号相位滞后的问题。图 8(a),图 8(b)和图 8(c)更进一步地说明了在分析频率相近信号时,LS 方法的独特的作用。表 2 是 FFT 分析 3 个频率相近信号的参数列表与 LS 分析该信号的参数列表。

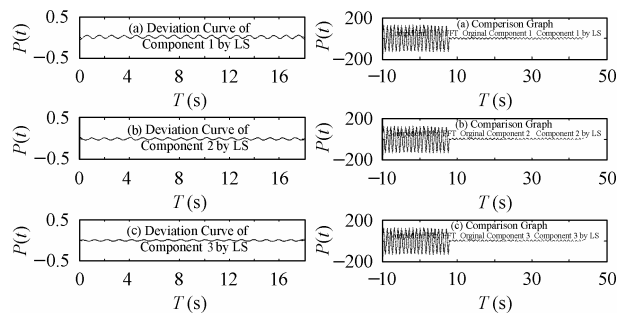


图 7 3 个信号成分 LS

提取的误差曲线

图 8 3 个信号成分 FFT 与 LS

分析结果的比较

仿真实例 3 下面的信号是由 5 个频率相近的信号组成,其模型可以表示为

表 1 2 个成分信号的 FFT 分析结果与 LS 分析结果的比较

项	目	待分析的原信号	FFT 分析结果	LS 分析结果
幅 值	成分 1	5.0000	45.8776	5.0085
	成分 2	10.0000	84.4687	10.0059
相 角	成分 1	0.7854	3.4506	0.7851
	成分 2	-1.0472	1.8540	-1.0471

表 2 3 个成分信号的 FFT 分析结果与 LS 分析结果的比较

项	目	待分析的原信号	FFT 分析结果	LS 分析结果
幅 值	成分 1	5.0000	130.5217	4.9972
	成分 2	10.0000	106.2612	9.9882
	成分 3	20.0000	115.6887	20.0343
相 角	成分 1	0.7854	- 1.4439	0.7699
	成分 2	- 1.0472	0.5184	- 1.0529
	成分 3	1.0472	- 0.4565	1.0497

$f_1=1\text{ Hz}, f_2=1.01\text{ Hz}, f_3=1.02\text{ Hz}, f_4=0.99\text{ Hz}, f_5=0.98\text{ Hz}$
 $L(t)=5\cos(2\cdot\pi\cdot t+\pi/4)+10\cos(2\cdot\pi\cdot1.01\cdot t-\pi/3)$
 $+20\cos(2\cdot\pi\cdot1.02\cdot t+\pi/3)+15\cos(2\cdot\pi\cdot0.99\cdot t-\pi/4)$
 $+15\cos(2\cdot\pi\cdot0.98\cdot t-\pi/4)+0.2\text{rand}(n)$ (16)

同样先把信号式(16)对时间 t 离散化, 该信号的采样总时间为 $T=18\text{s}$, 观测点取 $n=128$, 观测序列 $i=1:n$, 采用间隔时间为 $cT=T/n=0.14$, 采样频率为 $cf=n/T=7.1$, 因此满足 Shannon 采样定理, 并且由于是两个频率相近的信号($m=5$), 那么待估量为 $10(2m=10)$, 所以观测点个数要大于待估量, 可以采用最小二乘法来进行分析, 表 3 是两种方法估计的结果。

通过观察仿真实例 2、3 可以发现当信号最小频率差变小, 从 0.02Hz 变为 0.01Hz 时, FFT 分析结果与实际结果相差更大了, LS 分析结果仍可与原结果较为接近, 但参数估计的相对误差明显增大, 出现这种现象的原因, 很可能是两个仿真实例的频率分辨率未能达到原信号频率差而导致的。仿真实例 2, 3 中的频率分辨率都为 $\Delta f=1/T=1/18=0.056\text{ Hz}$, 信号的最小频率差分别为 0.02Hz 和 0.01Hz , 所以该频率分辨率不能很好分析频率差为 0.02Hz 和 0.01Hz 的信号。下面我们调整采样总时间为 $T=105\text{s}$, 这时频率分辨率为 0.0095Hz , 仍采用两种方法, 其分析结果如表 4。

由上述结果可以看出, 通过调整采样总时间, 使频率分辨率达到信号的频率差可以有效地使提高 LS 分析信号的精度, 信号各参数的相对误差都明显减小, 各个成分幅值和相角的估计都很精确, 但这时 FFT 分析的结果是 NaN(表示无值), 所以在分析频率相近的信号时, FFT 方法已经不能为信号做参数估计了。

4 结束语

文献[6]中基于总体最小二乘法可以有效地提取信号的各个频率分量,但对于频率相近正弦信号的幅值、相位的分离问题未详细阐述,如采用传统的快速傅里叶变换的方法,会产生很大误差。本文针对频率相近的信号分离的问题,采用

最小二乘法来分析,在观测矩阵的基础上,利用 2 范数最小的终止准则,通过求解线性方程组,辨识频率相近正弦信号组成的特征参数。该方法的特点是基于观测数据矩阵分析的方法,计算稳定性好,频谱分辨能力高,而且可以有效地消除观测矩阵的噪声扰动,改善估计性能。该方法避免了 FFT 方法的时频转换,直接从信号的观测值提取信号,无需计算信号的自相关矩阵,计算时间短,计算效率高。该方法能够处理短序列,难分辨的多正弦信号情况,噪声稳定性好。通过理论推导和 Matlab 仿真表明,基于最小二乘法的频率相

表 3 5 个成分信号的 FFT 分析结果与 LS 分析结果的比较

项	目	待分析的原信号	FFT 分析结果	LS 分析结果
幅 值	成分 1	5	118.3692	6.8009
	成分 2	10	116.3711	7.3164
	成分 3	20	114.3730	19.2533
	成分 4	15	116.4881	12.1590
	成分 5	15	114.6070	15.4767
相 角	成分 1	0.7854	0.9838	0.0237
	成分 2	- 1.0472	1.0073	- 0.9066
	成分 3	1.0472	1.0308	1.0441
	成分 4	- 0.7854	1.5235	- 0.9434
	成分 5	- 0.7854	2.0631	- 0.7218

表 4 当改变采样总时间时 5 个成分信号的 FFT 分析结果与 LS 分析结果的比较

项 目		待分析的原信号	FFT 分析结果	LS 分析结果
幅 值	成分 1	5	NaN	5.0005
	成分 2	10	NaN	10.0021
	成分 3	20	NaN	19.9887
	成分 4	15	NaN	14.9932
	成分 5	15	NaN	14.9941
相 角	成分 1	0.7854	NaN	0.7830
	成分 2	− 1.0472	NaN	− 1.0486
	成分 3	1.0472	NaN	1.0476
	成分 4	− 0.7854	NaN	− 0.7846
	成分 5	− 0.7854	NaN	− 0.7852

近信号的分离方法可以很有效地实现频率相近信号的分离，提取信号的特征参数。

differential probe signals. *Material Evaluation*, 1984, 42(8): 1136 – 1148.

参 考 文 献

[1] 李界家, 吴成东等. 最小二乘辨识算法在故障检测中的应用研究. 自动化仪表, 2003, 24(4): 19 – 22.

[2] 胡广书. 数字信号处理——理论、算法与实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001: 133 – 176.

[3] Cadzow J A. Signal enhancement — a composite property mapping algorithm. *IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 1988, 36(1): 46 – 62.

[4] Udupa S S, Lord W. A Fourier descriptor classification scheme for

[5] Hu, B Gosine. RG A new eigenstructure method for sinusoidal signal retrieval in white noise estimation and pattern recognition, *IEEE Tran on Signal Processing*, 1997, 45, (12): 3073 – 3083.

[6] 喻胜, 闫波等. 一种提取噪声中正弦信号的总体最小二乘法. 电子测量与仪器学报, 2000, 14(2): 6 – 10.

王哲英: 女, 1973 年生, 讲师, 研究方向为材料加工自动化.

马明旭: 男, 1973 年生, 工程师, 研究方向为机械电子工程.

朴凤贤: 女, 1974 年生, 讲师, 研究方向为鲁棒控制及学习.

王哲锋: 男, 1970 年生, 工程师, 研究方向为材料加工工程.