

无耗二端口网络 S 散射参数测量的 计算机最优解*

梁昌洪 邱长兴

(西北电讯工程学院, 西安)

摘要 本文提出二端口无耗互易网络 S 参数测量的有约束本征值方法。采用这种方法, 可以把非线性的 S 曲线问题转化为简单的线性问题。全部公式在 IBM-PC 机上编制了通用程序。文中给出了若干实例。

关键词 S 参数; 微波测量; CAM

一、引言

现代测量技术大体包括三个方面的问题: 仪器设备, 实验方法和数据处理。如果说仪器设备是测量的硬件系统, 那么实验方法和数据处理则是软件技术。随着计算机和计算技术的迅速发展, 人们对于测量数据处理愈来愈重视。

微波网络 S 参数的精密测量研究始终是近年来十分活跃的一个分支。这是因为很多参量(例如电压驻波比、反射系数、阻抗, 相移和衰减等等)最终均可归结为 S 参数。

有耗网络 S 参数测量的数据处理在很长一段时间内一直沿用 Deschamps 图解法。此法不仅繁复难画, 而且精度很低。1969年, J. D. Pieterse 和 W. Versnel 提出一种迭代法求解联立方程, 但因需 500 次以上迭代, 计算量过大而未见普及^[1]。1975年, D. Kajfez 给出了双线性变换的加权最小二乘解使这方面的工作有了实质性的进展。然而, 权因子的人为性削弱了它的适应范围^[2]。1983年, 本文作者之一提出了统计回归圆理论, 把最小二乘法运用于比较困难的圆拟合, 配合计算机对测量数据作了进一步的处理^[3]。

但需要提出的是对作为特例的二端口无耗互易网络 S 参数测量数据处理的研究尚不如人意。粗想起来似乎十分简单, 好象仍可采用上述方法直接用有耗网络处理。但是, 我们的计算实践表明这种做法精度极差, 结果不佳。究其原因, 在无耗条件下, 网络的独立实参数已减至三个(例如 $|S_{11}|$ 和相角 $\varphi_{11}, \varphi_{22}$)。不考虑无耗约束条件势必会增加误差分配的不合理性。无耗网络的常规处理方法是波节位移 S 曲线法和正切网络图解法^[4-7]。其繁复程度和精度都不适应当前的要求。而且, 在这些方法中 S_{11} 和 S_{22} 相角的确定依赖于特性面 D_0 和 S_0 , 没有充分地利用统计平均。应该提及, 早在 1963 年张世箕就提出了比

* 1986 年 8 月 11 日收到, 1987 年 7 月 14 日修改定稿。

较先进的最小二乘拟合的数据处理方法^[4]。只是它仅限于弱反射条件(驻波比接近于1)下才能近似成立。

本文从无耗网络特性出发,导出了普遍的等价于正切关系的另一方程。采用有约束的本征值方法,在求出本征值之后,非线性的 S 曲线拟合问题将转化为简单的线性问题。证明了在本文所定义的目标函数条件下,得到的是一组最优解。

通用程序已经在 IBM-PC 机上建立。所给出的实例说明此方法是有效可行的。

二、有约束本征值方法

双口无耗互易网络的 S 参数测量是采用可移动短路器进行的,其一般原理如图1所示。

根据网络理论^[8],双口网络的输入反射系数 Γ_1 ,负载反射系数 Γ_L 和网络 S 参数之间有如下关系:

$$\Gamma_1 = S_{11} + \frac{S_{12}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \quad (1)$$

令 $\Gamma_1 = |\Gamma_1|e^{j\varphi_1}$, $\Gamma_L = |\Gamma_L|e^{j\varphi_L}$ 和 $S_{11} = |S_{11}|e^{j\varphi_{11}}$, $S_{22} = |S_{22}|e^{j\varphi_{22}}$, $S_{12} = |S_{12}|e^{j\varphi_{12}}$ 。由无耗网络么正性可知:

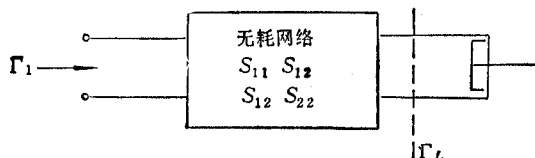


图1 可动短路器测量二口无耗网络 S 参数

$$\left. \begin{aligned} |S_{11}| &= |S_{22}| = k \\ |S_{12}|^2 &= 1 - |S_{11}|^2 = 1 - k^2 \\ 2\varphi_{12} &= \varphi_{11} + \varphi_{22} + \pi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

且假设理想短路器要求 $|\Gamma_1| = |\Gamma_L| = 1$ 。于是,问题的提法可以是,已知第 i 次负载相角 φ_{Li} 所对应的测量值 φ_{1i} ($i = 1, 2, \dots, N, N \geq 3$),要求出网络的三个独立实参量 k , φ_{11} 和 φ_{22} 。将条件(2)式与理想短路器的要求代入(1)式,得到

$$ke^{j\varphi_{11}} + ke^{j(\varphi_{22} + \varphi_1 + \varphi_L)} - e^{j(\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_L)} - e^{j\varphi_L} = 0 \quad (3)$$

用 $e^{-j\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_L + \varphi_{11} + \varphi_{22})}$ 乘上式左右两边,得

$$k \cos \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_L - \varphi_{11} - \varphi_{22}}{2} \right) - \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_L - \varphi_{11} + \varphi_{22}}{2} \right) = 0 \quad (4)$$

附录已证明方程(4)与正切关系

$$\tan \beta_1(D - D_0) = r \tan \beta_2(S - S_0) \quad (5)$$

完全等价。其中 D_0 和 S_0 分别称作输入和输出特性面, $\beta_1 = 2\pi/\lambda_{g1}$, $\beta_2 = 2\pi/\lambda_{g2}$, 且

$$r = - \frac{1+k}{1-k}.$$

现在, 设

$$a = \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_L}{2}\right), \quad b = \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_L}{2}\right)$$

$$c = -\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_L}{2}\right), \quad d = -\sin\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_L}{2}\right)$$

以及

$$x_1 = k \cos\left(\frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{2}\right), \quad x_2 = k \sin\left(\frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{2}\right)$$

$$x_3 = \cos\left(\frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}\right), \quad x_4 = \sin\left(\frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}\right)$$

考虑到各种偶然误差的存在, 对第 i 次测量数据有

$$a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4 = \varepsilon_i \quad (6)$$

其中, ε_i 表示残差, 一般不为零; $i = 1, 2, \dots, N$ 于是, 我们可定义误差目标函数

$$F = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4)^2 \quad (7)$$

要求出 x_1, x_2, x_3 和 x_4 , 使有

$$\min F \quad (8)$$

但考虑到 x_1, x_2, x_3 和 x_4 内只有 k, φ_{11} 和 φ_{22} 三个独立参量, 因此, 尚须加约束条件

$$G = x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0 \quad (9)$$

应用 Lagrange 乘子法构造新函数

$$E = F - \lambda G = \sum_{i=1}^N (a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4)^2 - \lambda (x_3^2 + x_4^2 - 1) \quad (10)$$

于是, 问题的模型又转化为求 x_1, x_2, x_3 和 x_4 , 使

$$\min E(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (11)$$

(11)式要求

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x_1} &= 2 \sum_{i=1}^N (a_i^2 x_1 + a_i b_i x_2 + a_i c_i x_3 + a_i d_i x_4) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial x_2} &= 2 \sum_{i=1}^N (a_i b_i x_1 + b_i^2 x_2 + b_i c_i x_3 + b_i d_i x_4) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial x_3} &= 2 \left\{ \sum_{i=1}^N (a_i c_i x_1 + b_i c_i x_2 + c_i^2 x_3 + c_i d_i x_4) - \lambda x_3 \right\} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial x_4} &= 2 \left\{ \sum_{i=1}^N (a_i d_i x_1 + b_i d_i x_2 + c_i d_i x_3 + d_i^2 x_4) - \lambda x_4 \right\} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \lambda} &= (x_3^2 + x_4^2 - 1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

再设

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \sum_{i=1}^N a_i^2, & A_{12} &= \sum_{i=1}^N a_i b_i, & A_{13} &= \sum_{i=1}^N a_i c_i, & A_{14} &= \sum_{i=1}^N a_i d_i \\
A_{22} &= \sum_{i=1}^N b_i^2, & A_{23} &= \sum_{i=1}^N b_i c_i, & A_{24} &= \sum_{i=1}^N b_i d_i, & A_{33} &= \sum_{i=1}^N c_i^2 \\
A_{34} &= \sum_{i=1}^N c_i d_i & \text{和} & A_{44} &= \sum_{i=1}^N d_i^2
\end{aligned}$$

则(12)式可写成矩阵方程

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \lambda & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

我们称(13)式为有约束的本征值问题。为进一步研究本征值 λ 的物理意义,构造

$$x_1 \frac{\partial E}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial E}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial E}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial E}{\partial x_4} = 0 \quad (14)$$

则易得

$$F - \lambda(x_3^2 + x_4^2) = 0 \quad (15)$$

计及 $x_3^2 + x_4^2 = 1$, 我们得到

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\min} &= \min F \\ x_3^2 + x_4^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

也就是说: 原问题要求的 $\min F$, 现在演变求最小本征值问题。而需要知道的解 (x_1, x_2, x_3, x_4) 即 $\lambda_{\min}$ 所对应的本征矢。(13)式成立的重要条件是系数行列式等于零。展开后可得

$$\begin{aligned}
& (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)\lambda^2 + \{-(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)(A_{33} + A_{44}) + (A_{11}A_{23} + A_{12}A_{13})A_{23} \\
& + (A_{11}A_{24} - A_{12}A_{14})A_{24} - (A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13})A_{13} - (A_{12}A_{24} - A_{14}A_{22})A_{14}\}\lambda \\
& + \{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)(A_{33}A_{44} - A_{34}^2) + (A_{11}A_{24} - A_{12}A_{14})(A_{23}A_{34} - A_{33}A_{24}) \\
& + (A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13})(A_{13}A_{44} - A_{14}A_{34}) + (A_{11}A_{23} - A_{12}A_{13})(A_{24}A_{34} \\
& - A_{23}A_{44}) + (A_{12}A_{24} - A_{14}A_{22})(A_{14}A_{33} - A_{13}A_{34}) + (A_{13}A_{24} - A_{14}A_{23})(A_{13}A_{24} \\
& - A_{14}A_{23})\} = 0 \quad (17)
\end{aligned}$$

解(17)式, 很易求出 $\lambda_{\min}$ 。这时问题进一步转化为求解下述线性方程组

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \lambda_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{34} \end{bmatrix} x_4 \quad (18)$$

其解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \lambda_{\min} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{34} \end{bmatrix} x_4 \quad (19)$$

可简写作

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} x_4 \quad (20)$$

由约束条件 $x_3^2 + x_4^2 = 1$, 得到

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} \quad (21)$$

上式中, x_4 取正根并不失一般性。于是可写出

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} \quad (22)$$

计及 x_1, x_2, x_3 和 x_4 的定义式, 最后得到

$$k = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{1+w^2}} \quad (23)$$

$$\varphi_{11} = \cos^{-1} \left[\frac{w}{\sqrt{1+w^2}} \right] + \cos^{-1} \left[\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right] \quad (24)$$

$$\varphi_{22} = \cos^{-1} \left[\frac{w}{\sqrt{1+w^2}} \right] - \cos^{-1} \left[\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right] \quad (25)$$

由以上推导过程可以看出: 解 $\varphi_{11}, \varphi_{22}$ 和 k 是考虑了 $x_3^2 + x_4^2 = 1$ 的约束条件下 $\min F$ 的最优解。

我们有趣地指出: 直接利用正切关系还可导出另一形式的最小二乘解。不过, 这种正切函数形式的出现, 会由于可能出现极点而影响这种目标函数的应用范围。

三、实验结果比较

为了使本文给出的方法与 S 曲线图解法和弱反射条件下的最小二乘法解加以比较, 已经把以上公式在 IBM-PC 机上编制成通用程序。结果的优劣最后用 $\min F$ 所给出的残差加以比较。

本文所列的实验结果取自文献^[4-6], 如表 1 所示。注意到各种方法的数据差异是有意

表 1 几种方法的结果比较

	文 献	本 文 方 法				所 引 文 献 方 法			
		驻波比 ρ	φ_{11}	φ_{22}	剩余误差 $\min F$	驻波比 ρ	φ_{11}	φ_{22}	剩余误差 $\min F$
1	[5]	1.874817	143.41°	106.81°	2.63×10^{-2}	1.878	138.80°	106.54°	5.52×10^{-2}
2		1.120813	-53.01°	-26.01°	1.62×10^{-4}	1.12	-52.84°	-26.13°	1.70×10^{-4}
3	[6]	3.538278	-11.80°	-21.32°	4.61×10^{-2}	3.6	-94.95°	52.73°	3.34
4	[7]	1.051531	-68.59°	72.83°	3.90×10^{-3}	1.05	89.36°	-94.89	4.16×10^{-1}

思的. 其中, 对于 φ_{11} 和 φ_{22} 两个参量往往随处理方法不同而不同, 但驻波比 ρ 则相当稳定. 似乎不随方法而变动.

四、结 语

本文所提出的二端口无耗互易网络 S 散射参数测量的有约束本征值方法, 通过实验和理论比较表明是有效可行的.

已经在 IBM-PC 机上编制了通用程序. 全部方法很易推广到不等精度加权和可疑数据剔除等实际问题上去.

附录 等价性证明

根据特性面 D_0, S_0 的定义可知^[7]

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{11} &= 2\beta_1 D_0 \\ \varphi_{22} &= 2\beta_2 S_0 + \pi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-1})$$

其中, $\beta_1 = 2\pi/\lambda_{g1}$, $\beta_2 = 2\pi/\lambda_{g2}$, 且 λ_{g1} 和 λ_{g2} 分别是输入和输出系统的波导波长. 方程(4)可改写为

$$\begin{aligned} & \cos \left[\frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_{11}) - \frac{1}{2} (\varphi_L + \varphi_{22}) \right] \\ &= k \cos \left[\frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_{11}) + \frac{1}{2} (\varphi_L + \varphi_{22}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

很易看出

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_{11}) &= \beta_1 (D - D_0) + \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} (\varphi_L - \varphi_{22}) &= -\beta_2 (S - S_0) + \pi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3})$$

令 $A = \beta_1 (D - D_0)$, $B = \beta_2 (S - S_0)$, 则式 (A-2) 成为

$$\sin(A + B) = k \sin(A - B) \quad (\text{A-4})$$

利用三角公式展开, 且定义 $\gamma = -\frac{1+k}{1-k}$, 最后得到

$$\tan \beta_1 (D - D_0) = \gamma \tan \beta_2 (S - S_0) \quad (\text{A-5})$$

即文中方程(4)与正切关系 (A-5) 是等价的.

参 考 文 献

- [1] J. D. Pietrese and W. Versnel, *Appl. Sci. Res.*, **21**(1969), 12—13.
- [2] D. Kajfez, *IEEE Trans. on IM*, **IM-24**(1975), 4—11.
- [3] 梁昌洪, 西北电讯工程学院学报, 1983年, 第3期, 第16—30页.
- [4] 张世箕, 测量误差及数据处理, 科学出版社, 1979年, 第265—274页.
- [5] 周清一, 微波测量技术, 国防工业出版社, 1964年, 第76—91页.
- [6] M. 俾特, H. 辣帕璞德著, 吴培亨译, 微波测量方法, 上海科技出版社, 1964年, 第281—325页.
- [7] 董树义, 微波测量, 国防工业出版社, 1985年, 第26—31页.
- [8] 梁昌洪, 计算微波, 西北电讯工程学院出版社, 1985年, 第319—330页.

COMPUTER-AIDED OPTIMUM SOLUTION FOR SCATTERING PARAMETER MEASUREMENTS OF TWO-PORT LOSSLESS NETWORK

Liang Changhong Qiu Changxing

(Northwest Telecommunication Engineering Institute, Xi'an)

ABSTRACT A new constrained eigenvalue method for scattering parameters measurements of two-port lossless reciprocal network is developed. The non-linear S-curve problem is easily transformed into a simple linear one by this method. The formulas are programmed on the IBM-PC digital computer. Some examples are given.

KEY WORDS S-parameter; Microwave measurement; CAM