

## 二维分形粗糙面电磁散射的分形规律研究<sup>1</sup>

郭立新 吴振森

(西安电子科技大学理学院 西安 710071)

**摘要** 采用二维归一化带限 Brown 分形函数来模拟二维分形粗糙面, 利用基尔霍夫近似给出了该粗糙面的电磁散射场和散射强度方差的计算公式, 主要讨论了散射场分布与分维的关系, 获得了散射场波峰拟合线的斜率与分维  $D$  满足线性关系这一重要规律。

**关键词** 分形粗糙面, 基尔霍夫近似, 电磁散射

**中图分类号** O441, O157.3

### 1 引言

近年来有关随机粗糙表面电磁散射的理论和实验研究发展很快, 越来越引起了人们的重视, 许多理论和工程上的问题需要对粗糙面上的散射问题进行研究<sup>[1,2]</sup>。有关粗糙面散射理论在雷达目标成像、材料物理、环境遥感、辐射定标、天文学等领域都有广泛的应用。

以往的粗糙面散射研究中, 通常采用特定的已知周期函数或随机函数作为粗糙表面的数学模型, 但在自然界中粗糙面既非纯周期也非完全随机的。从统计意义上来讲, 一般的二维随机粗糙面在一定的标度之间都存在着自相似性或自仿射性, 它具有分形的特点<sup>[3,4]</sup>, 目前在国际上越来越多的工作者将分形几何用于自然背景中特别是粗糙面的散射。近年来有关一维分形粗糙面散射的研究较多, 如 Berry 等人研究了光波对分形粗糙面的衍射效应及脉冲波对随机粗糙面的反射作用<sup>[5]</sup>; Agnon 等人对分形海表面的粗糙度作了遥感分析<sup>[6]</sup>; Sanchez-Gil 等人又对具有自仿射结构的金属分形粗糙面的极化效应和场增强效应作了研究<sup>[7]</sup>; 作者也曾将分形方法用于研究一维粗糙面散射<sup>[8]</sup>, 但到目前为止对更为接近于实际的二维分形粗糙面散射研究较少, 所做的研究也仅限于散射场分形特征的定性说明。要全面研究粗糙面散射问题, 同一维分形粗糙面的模拟相类似, 必须建立二维分形模型, 这里我们采用二维带限 Brown 曲面作为粗糙表面的模型, 利用基尔霍夫近似研究粗糙面散射特性与分形描述量 (主要是分维) 之间的定量关系。

### 2 分形粗糙面散射场的一般公式

已知重要的二维带限 Brown 分形函数<sup>[4,9]</sup>

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{2\delta}[1 - b^{(2D-6)}]^{1/2}}{\{M[b^{(2D-6)N_1} - b^{(2D-6)(N_2+1)}]\}^{1/2}} \sum_{n=N_1}^{N_2} b^{(D-3)n} \sum_{m=1}^M \left\{ \sin\left\{Kb^n\left[x \cos\left(\frac{2\pi m}{M}\right) + y \sin\left(\frac{2\pi m}{M}\right)\right]\right\} + \phi_{nm} \right\} \quad (1)$$

$\delta$  为粗糙面的高度起伏均方根。归一化的目的是使我们可以给出具有任意  $\delta$  的粗糙面  $F(x, y)$ 。 $b$  为空间基频 ( $b > 1$ ),  $D$  为分维 ( $2 < D < 3$ ),  $K$  为空间波数,  $\phi_{nm}$  为  $(0, 2\pi)$  上均匀分布

<sup>1</sup> 2000-10-20 收到, 2001-07-26 定稿

教育部高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金和自然科学基金资助项目 (项目编号: 60101001)

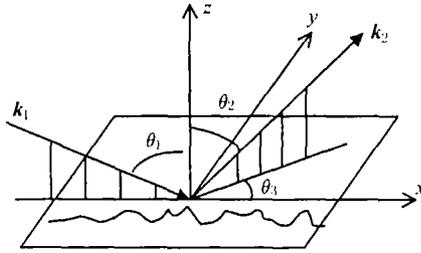


图1 二维带限分形粗糙面散射几何示意图

的随机相位。该函数具有零均值。空间波数  $K$  决定空间频谱的位置。 $F(x, y)$  的无标度区间一般取  $[2\pi/(Kb^{N_1}), 2\pi/(Kb^{N_2})]$ 。 $N = N_2 - N_1 + 1$  (代表谐波次数)。随着  $N$  的增加, 越来越多的频率分量叠加到该函数上。当分维  $D$  增加时, 高频分量比重加大, 低频分量作用减小。事实上, 该分形函数是确定性周期结构和随机结构的一个组合, 该函数在  $M$  和  $N$  不太大时, 在  $x$  和  $y$  方向上是各向异性的, 它具有自仿射结构和较大的偏导数, 这一分形粗糙表面为多测度表面。由于自然界中实际的粗糙表面一般既不是纯随机的也不是完全纯周期的, 且经常是各向异性的, 因此 (1) 式所给的分形函数能较好地反映自然界中粗糙面的物理特性, 是较好的物理模型。利用基尔霍夫近似二维分形粗糙面的散射场可表示为 [2]

$$\psi_{\text{sca}}(r) = -\frac{ik \exp(ikr)}{4\pi r} 2\xi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \exp[ik\phi(x', y')] dx' dy' \quad (2)$$

其中

$$\xi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{2} \left( \frac{AA'}{C} + \frac{BB'}{C} + D \right) \quad (3)$$

$$\phi(x', y') = Ax' + By' + CF(x', y') \quad (4)$$

其中  $A = (1 - R) \sin \theta_1 + (1 + R) \sin \theta_2 \cos \theta_3$ ,  $B = (1 + R) \cos \theta_3 - (1 - R) \cos \theta_1$ ,  $C = (1 + R) \sin \theta_1 \sin \theta_2$ , 而  $A' = \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_3$ ,  $B' = -\sin \theta_2 \sin \theta_3$ ,  $D = -(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$ 。 $R = \pm 1$  分别对应入射波为平行极化和垂直极化情况下的 Fresnel 反射系数。(2) 式中  $\theta_1$  为入射角,  $\theta_2$ 、 $\theta_3$  为散射方位角,  $-L_x \leq x \leq L_x$ ,  $-L_y \leq y \leq L_y$  为二维分形粗糙面的尺度, 其散射几何示意图如图 1 所示。

研究粗糙面散射场更合适的物理量常采用平均散射场表示, 它定义为

$$\bar{\psi}_{\text{sca}}(r) = \langle \psi_{\text{sca}}(r) \rangle_{\phi_{n,m}} \quad (5)$$

由 (2) 式经过推导可得

$$\bar{\psi}_{\text{sca}}(r) = -\frac{ikL_xL_y e^{-ikr}}{\pi r} 2\xi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \left[ \prod_{n=N_1}^{N_2} J_0^M(C_k b^{(D-3)n}) \right] \text{sinc}(kAL_x) \text{sinc}(kBL_y) \quad (6)$$

其中

$$C_k = -2k\delta \cos \theta_1 \left[ \frac{2(1 - b^{2(D-3)})}{[b^{2(D-3)N_1} - b^{2(D-3)(N_2+1)}] \Lambda I} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{sinc}(x) \equiv \sin x/x \quad (7)$$

定义平均散射强度为

$$\bar{I}(\mathbf{r}) = \langle I(\mathbf{r}) \rangle_{\phi_{nm}} = \langle \psi_{\text{sca}}(\mathbf{r}) \psi_{\text{sca}}^*(\mathbf{r}) \rangle_{\phi_{nm}} \quad (8)$$

忽略边缘效应, 分形粗糙面的平均散射强度可写为<sup>[9]</sup>

$$\begin{aligned} \bar{I}(\mathbf{r}) = & \frac{4k^2 L_x^2 L_y^2 \xi^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\pi^2 r^2} \sum_{u_1, N_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{u_M, N_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{u_{i,j}=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{u_1, N_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{u_M, N_2=-\infty}^{\infty} \\ & \left[ \prod_{n=N_1}^{N_2} \prod_{m=1}^M J_{u_{i,j}}(C_k b^{(D-3)n}) \right]^2 \text{sinc}^2 \left[ \left( kA + K \sum_{n=N_1}^{N_2} b^n \sum_{m=1}^M u_{i,j} \cos\left(\frac{2\pi m}{M}\right) \right) L_x \right] \\ & \times \text{sinc}^2 \left[ \left( kB + K \sum_{n=N_1}^{N_2} b^n \sum_{m=1}^M u_{i,j} \sin\left(\frac{2\pi m}{M}\right) \right) L_y \right] \end{aligned} \quad (9)$$

散射场的统计参量  $\sigma_I$  (散射强度方差) 可以定义为<sup>[2,9]</sup>

$$\sigma_I = \frac{\bar{I}(\mathbf{r}) - \bar{\psi}_{\text{sca}}^2(\mathbf{r})}{I_0} = \frac{\langle \psi_{\text{sca}}(\mathbf{r}) \psi_{\text{sca}}^*(\mathbf{r}) \rangle_{\phi_{nm}} - \langle \psi_{\text{sca}}(\mathbf{r}) \rangle_{\phi_{nm}} \langle \psi_{\text{sca}}(\mathbf{r}) \rangle_{\phi_{nm}}^*}{\psi_{\text{sca}0}(\mathbf{r}) \psi_{\text{sca}0}^*(\mathbf{r})} \quad (10)$$

其中  $\psi_{\text{sca}0}(\mathbf{r})$  为粗糙面镜反射方向的反射场 ( $\theta_1 = \theta_2, \theta_3 = 0$ ), 它可由 (2) 式得到。经过推导 (10) 式可表示为

$$\begin{aligned} \sigma_I = & \frac{\xi^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) C_k^2}{4 \cos^2 \theta_1} \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=1}^M b^{2(D-3)n} \text{sinc}^2 \left[ \left( kA + K b^n \cos \frac{2\pi m}{M} \right) L_x \right] \\ & \times \text{sinc}^2 \left[ \left( kB + K b^n \sin \frac{2\pi m}{M} \right) L_y \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$\sigma_I$  代表的是强度相关的非相干分量平均值, 它主要用来分析除镜向以外的散射场, (1) 式中的有关分形参量对其有显著的影响。采用 (11) 式的优点在于只需考虑散射场和散射强度的平均效应而无需考虑较难获得的散射波前的相位项的影响。

### 3 二维分形粗糙面散射场分布的分形规律

我们首先利用 (11) 式计算了导体粗糙面散射场平均非相干强度方差  $\sigma_I$  在反射面内 ( $\theta_3 = 0^\circ$ ) 随  $\theta_2$  的分布。这里取  $N=10$ ,  $M=10$ ,  $L_x = L_y = 40\lambda$ ,  $K\lambda = 1/2$ ,  $b=1.6$ ,  $\delta = 0.05\lambda$ ,  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_3 = 0^\circ$ 。(如图 2 所示)。经过计算我们发现, 在其它条件不变的情况下, 改变分形  $D$  的大小, 散射场强度方差的图形十分相近, 各峰值的位置和数目基本是一样的, 只不过各峰值大小不太一样。观察  $0^\circ \sim 30^\circ$  间这 4 个波峰, 其位置依次为  $9.99^\circ$ ,  $17.19^\circ$ ,  $21.87^\circ$ ,  $24.84^\circ$ , 当  $D=2.3$  时, 带限分形粗糙面粗糙度较小, 这 4 个由谐波耦合而成的波峰峰值差别较大, 峰顶连线的拟合直线斜率  $s_1=0.12770$ 。随着  $D$  的增加, 粗糙面粗糙程度继续提高, 这 4 个波峰峰值差别会逐渐变小, 这些峰值大小是由带限分形曲面凹陷之间的耦合强度所决定的, 当  $D=2.95$  时, 各峰值的差别更小, 拟合线斜率  $s_1=0.00820$ 。可以预见, 在  $D \rightarrow 3$  时, 因表面变得更加粗糙, 这时已不满足基尔霍夫方法的成立条件, 不能用该方法进行计算, 而应寻找其它求解方法。

波峰峰值大小的变化同样可用 Bragg 耦合衍射 (动量守恒原理) 来解释, 描述粗糙面的带限分形函数是  $N$  个谐波函数的加权和, 入射波波长充当了探测粗糙面空间结构的尺码。当入射波照射到该粗糙表面上时, 它与不同的谐波分量相互耦合, 将能量散射到不同的特定方向, 这种衍射 (散射) 称为 Bragg 衍射。这一耦合的强度大小由控制各个谐波分量幅度的分维  $D$  所决定。低分维值使得入射波与低频谐波分量耦合较强, 因而使得散射能量集中在某些特定空间方向上, 而对于分维值越高, 入射波与各种谐波耦合强度近乎相等, 使得各主要峰值也近似相等,  $\sigma_I$  的峰值随  $D$  的这种变化关系使得我们有可能从峰值点拟合线的斜率变化中提取粗糙面的分维值。事实上, 空间波数  $K$  和空间基频  $b$  也严重地影响着散射分布, 尤其对峰值的位置和数目有较大影响, 值得注意的是在满足基尔霍夫近似的条件下, 无论  $K, b$  如何变化, 其在镜反射面内的散射方向图均类似于图 2, 限于篇幅不再详细讨论。这里我们主要讨论散射场分布与分维的关系。为研究峰值点拟合线斜率随分维的变化关系, 我们求得了在不同空间波数  $K$  下峰顶拟合线的斜率  $s_1 (0^\circ < \theta_2 < 30^\circ, b=1.6, \theta_1 = 30^\circ)$  随分维  $D$  的变化, 如表 1 所示:

表 1 峰顶拟合线斜率  $s_1$  与  $D$  的关系

$D$	2.05	2.30	2.50	2.67	2.95
$s_1 (K\lambda = 1)$	0.12167	0.08998	0.06463	0.04346	0.00759
$s_1 (K\lambda = 1/2)$	0.17360	0.12770	0.09034	0.06024	0.00820
$s_1 (K\lambda = 1/4)$	0.18433	0.13589	0.09680	0.06427	0.00896
$s_1 (K\lambda = 1/8)$	0.25177	0.18683	0.13389	0.08869	0.01492

图 3 将表 1 中的  $s_1$  与  $D$  的对应点画于图上, 我们发现各点几乎在一条直线上。

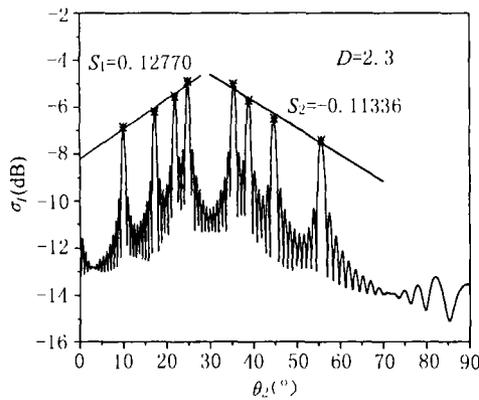


图 2  $\sigma_I$  在镜反射面内随  $\theta_2$  的分布

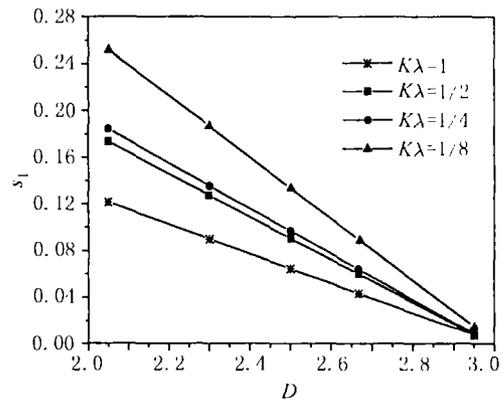


图 3 峰顶拟合线斜率  $s_1$  与  $D$  的关系

我们会很容易地写出不同空间波数  $K$  下各条直线的方程:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 0.38151 - 0.12675D \approx 0.12675(3 - D), K\lambda = 1 \\ s_1 &= 0.55027 - 0.18379D \approx 0.18379(3 - D), K\lambda = 1/2 \\ s_1 &= 0.58405 - 0.19491D \approx 0.19491(3 - D), K\lambda = 1/4 \\ s_1 &= 0.79234 - 0.26348D \approx 0.26348(3 - D), K\lambda = 1/8 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

通过 (12) 式, 不难发现斜率  $s_1$  与  $D$  之间均满足

$$s = A_1(K, b, \theta_1) \times (3 - D) \quad (13)$$

在这一关系式中,  $A_1(K, b, \theta_1)$  是随不同的  $K, b, \theta_1$  而变化的常数。这与 Jaggard 等人在文献 [10] 中所研究的一维分形粗糙面的波峰包络线斜率在  $K\lambda = \pi/5$  时  $s \approx 2.7(2 - D)$  的结论是相类似的。图 4 中给出了  $A_1(K, b, \theta_1)$  随不同  $K, b, \theta_1$  而变化的一组曲线。从图 4 可以看出,  $A_1(K, b, \theta_1)$  随  $K$  的增大而减小, 对于相同的空间波数和空间基频, 入射角越大,  $A_1(K, b, \theta_1)$  越小。对于相同的空间波数和入射角, 空间基频  $b$  不同,  $A_1(K, b, \theta_1)$  也有显著变化。因此一旦分形粗糙面的空间波数、空间基频和入射角确定下来, 在镜反射面内小角度散射角内, 散射场波峰拟合斜率与分维  $D$  便满足 (13) 式所示的确定线性关系, 因此分维  $D$  也是决定散射场方向图的决定性因素。

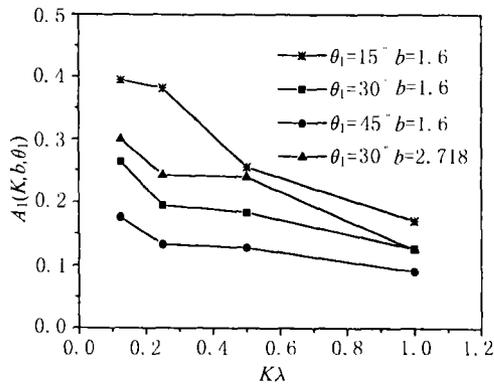
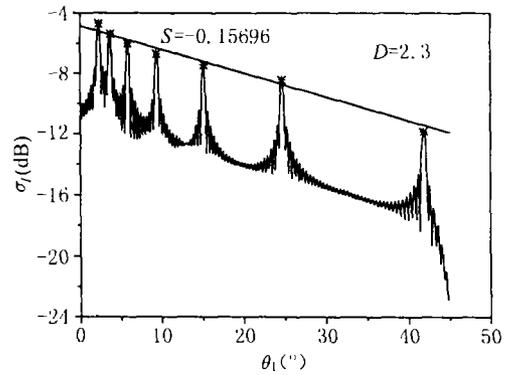
图 4  $A_1(K, b, \theta_1)$  随  $K, b, \theta_1$  的变化

图 5 后向散射强度方差的角分布及峰顶拟合线

类似地我们还对  $30^\circ$  以后各峰顶连线作了拟合 (如图 2 所示), 同样计算了拟合线斜率  $s_2$ , 结果发现  $s_2$  与  $D$  之间也满足一定的线性关系:

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= 0.08506D - 0.25400 \approx 0.08506(D - 3), K\lambda = 1 \\ s_2 &= 0.13177D - 0.40178 \approx 0.13177(D - 3), K\lambda = 1/2 \\ s_2 &= 0.14526D - 0.43502 \approx 0.14526(D - 3), K\lambda = 1/4 \\ s_2 &= 0.19469D - 0.58732 \approx 0.19469(D - 3), K\lambda = 1/8 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

同样我们发现斜率  $s_2$  与  $D$  之间均近似满足以下关系:

$$s_2 = A_2(K, b, \theta_1) \times (D - 3) \quad (15)$$

同样常系数  $A_2(K, b, \theta_1)$  随不同的  $K, b, \theta_1$  的变化而变化, 其变化趋势类似于对  $A_1(K, b, \theta_1)$  的分析。根据 (11) 式我们同时给出了分形粗糙面向后散射强度方差的角分布 (如图 5 所示,  $\theta_3 = 0^\circ, K\lambda = 1/2, b=1.6$ )。同样我们对峰顶拟合线的斜率做了计算, 给出了拟合线斜率与分维的如下关系式:

$$\left. \begin{aligned} s &= 0.13255D - 0.39792 \approx 0.13255(D - 3), K\lambda = 1 \\ s &= 0.19177D - 0.57518 \approx 0.19177(D - 3), K\lambda = 1/2 \\ s &= 0.21456D - 0.64502 \approx 0.21456(D - 3), K\lambda = 1/4 \\ s &= 0.26020D - 0.78132 \approx 0.26020(D - 3), K\lambda = 1/8 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

从上式仍可得出拟合线斜率  $s$  与分维  $D$  之间满足线性关系:

$$s = B(K, b) \times (D - 3) \quad (17)$$

其中  $B(K, b)$  是随不同的  $K, b$  而变化的常数。通过 (12) — (17) 式不难看出, 对于满足 (1) 式的分形粗糙面, 无论是在镜反射面内, 还是在后向, 散射强度方差角分布中波峰峰顶拟合线的斜率与分维  $D$  之间均满足一定类似的线性关系, 因此分维  $D$  对散射场分布起决定性作用。事实上, 基于以上所发现的规律, 我们可以反过来只需通过测量散射场各峰值点, 计算出峰顶拟合线的斜率值, 就可以为反演出由方程 (1) 所描述的粗糙面分维值提供依据, 更重要的是我们还可以通过散射方向图中峰顶拟合线斜率来定量表面的粗糙度。当然对于  $A_1(K, b, \theta_1)$ ,  $A_2(K, b, \theta_1)$  和  $B(K, b)$ , 还未找到一个确定或经验性公式, 这是值得进一步研究的问题。

#### 4 讨论与结论

事实上对于一个真实的粗糙表面, 如果它的统计规律同分形粗糙面相类似或相近, 我们就可以采用一定的数学处理, 用模拟的分形粗糙面来替代真实的粗糙面。我们曾用干涉显微镜和表面轮廓仪法测得了铝表面高度起伏的轮廓曲线, 并获得了自相关函数。我们还从模拟的带限分形函数出发, 经统计计算同样求得了自相关函数, 结果发现当分形函数在一定分维下, 两种途径获得的相关函数是相近的, 它们具有相似的高度起伏分布、相近的高度起伏均方根和自相关函数及功率谱。这样实际的粗糙面在经过一定的数学定量处理后, 便可以被分形粗糙面所替代, 得出的散射场也会符合实际的。本文所得到的结果可应用于粗糙面重建的逆散射问题, 也可用它来进行粗糙表面的分类。

另外对于二维带限 Brown 分形粗糙面, (1) 式中的每一个参量和外尺度都影响着散射角分布。例如表面尺寸选择不能太小, 否则散射方向图就不能提供足够的描述表面粗糙特征的信息, 不能完全反映分形表面的自相似性。空间基频  $b$  和空间波数  $K$  决定着散射场中波峰的数目和位置, 求和数  $N$  和  $M$  也不能太小, 否则粗糙面将变得非常光滑, 分形的特征无法体现。在其它参量固定不变的条件,  $D$  对  $\sigma_I$  的影响主要是各峰值的大小, 而各峰的数目和位置变化不大。在外尺度及空间基频  $b$  确定的情况下 (在基尔霍夫近似条件以内), 散射场波峰拟合线的斜率与分维  $D$  所满足的线性关系是本文中得到的重要结论, 它对粗糙面遥感和测量等方面有重要的意义。

#### 参 考 文 献

- [1] A. Ishimaru, Wave Propagation and Scattering in Random Media, New York, Academic Press, 1978, chap. 21.
- [2] P. Beckmann, The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces, New York, Academic Press, 1978, chap. 3.
- [3] B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, New York, Freeman, 1982, chap. 1.
- [4] K. Falconer, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application, New York, Wiley, 1990, chap. 1.
- [5] M. V. Berry, Diffractional echos, J. Phys. A, 1981, 14(6), 3101-3110.
- [6] Y. Y. Agnon, M. Stiassnie, Remote sensing of the roughness of a fractal sea surface, J. Geophysical Research, 1991, 96(C7), 12773-12779.
- [7] J. A. Sanchez-Gil, J. V. Garcia-Ramos, Strong surface field enhancements in the scattering of p-polarized light from fractal metal surfaces, Opt. Communications, 1997, 134(1), 11-15.
- [8] L. X. Guo, Z. S. Wu, Electromagnetic scattering from one-dimensional fractal surface, Chinese Phys. Letters, 1994, 11(5), 257-260.
- [9] N. Lin, et al., Wave scattering from fractal surface, J. of Modern Opt., 1995, 42(1), 225-241.

- [10] D. L. Jaggard, *et al.*, Scattering from fractally corrugated surfaces, *J. Opt. Soc. Am.*, 1987, 7(6), 1131-1139.

FRactal CHARACTERISTICS INVESTIGATION ON  
ELECTROMAGNETIC SCATTERING FROM  
TWO DIMENSIONAL ROUGH SURFACE

Guo Lixin    Wu Zhensen

(*School of Sciences, Xidian University, Xi'an 710071, China*)

**Abstract** A normalized two dimensional band-limited Weierstrass fractal function is used for modeling the rough surface. Based on Kirchhoff theory, an analytic solution of the average electromagnetic scattering field and the variance of scattering intensity are derived with emphasis on examining the relation of fractal dimension with the scattering pattern. The important conclusion is obtained that the diffracted envelope slopes of scattering pattern can be approximated to a slope of linear equation.

**Key words** Fractal rough surface, Kirchhoff approximation, Electromagnetic scattering

郭立新: 男, 1968 年生, 博士, 教授, 现从事电磁波和光波在复杂系统和随机介质中的传播和散射、计算机电磁成像和非线性物理研究工作.

吴振森: 男, 1946 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为: 非均匀介质、随机介质中电磁波 / 光波的传播与散射以及目标电磁散射特性和光散射特性研究.