

空间波法测地物介电常数的反演方法¹

夏明耀 陈志雨

(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

摘要 空间波法适合于测量大面积目标的介电常数, 所以是测量地物微波介电特性的一种较好的方法。这种方法从测量数据反演复介电常数要用菲涅尔公式, 如果测量数据包含相位信息, 则反演是简单的; 但是如果测量数据只是幅度, 则反演过程需要求解一个二次非线性方程组, 以往都采用近似的数字迭代求解, 迭代过程对初值和测量数据本身都太敏感, 解的存在性、唯一性和稳定性难以判定。本文给出了严格的解析反演法, 并证明了解的唯一性和反演结果对测量误差的敏感性。

关键词 空间波法, 地物介电常数, 解析反演法, 误差分析
中图分类号 TM934.3

1 引言

任何物质的宏观电学特性都用介电常数来描述。在微波地物遥感中, 接收到的所有地物信息, 除目标的几何特性外, 都反映在介电常数中; 要想得到具体的地面目标信息, 必须建立介电常数与这些量的理论联系或经验模型^[1,2]。测量物质的微波介电常数通常有谐振法^[3]、波导法^[4]和开端同轴线法^[5,6]等, 但这些方法用于地物目标都不是很适当的。对于谐振法和波导法, 被测物质需要经过取样和加工, 但地物经取样加工后, 其自然结构和周围环境都会遭到破坏, 由此造成的误差是难以估计的。开端同轴线法虽然可以不取样, 但测试目标的面积较小, 要求表面平整度高, 测试结果也只反映目标物的局部介电特性。空间波法^[4,7,8]可以用来进行地物介电常数测量, 这种方法实际上是测地面目标的微波反射特性, 然后用熟知的菲涅尔公式求得复介电常数。如果测量仪器可以记录相位信息, 则反演是容易的。但是实验如果只记录幅度信息, 由于菲涅尔反射系数与介电常数呈非常复杂的非线性关系, 要严格求解似乎是不可能的, 已知的文献报道中, 都是使用数字迭代求解法^[7,8], 可是迭代过程对初值选取和测量数据本身都过于敏感, 因此对解的存在性、唯一性和误差很难判断和分析。本文给出了解析求解法, 并且证明了解的唯一性和对测量结果的敏感性。这些解析解是有用的。

2 测量与定标

实验用一束近似的平面波照射到平面界面上, 在镜向反射位置接收反射波。平面波反射遵从菲涅尔反射定律, 对于水平极化和垂直极化, 反射系数分别为

$$R_H = \frac{\cos \theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta}}, \quad R_V = \frac{\epsilon_r \cos \theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta}}{\epsilon_r \cos \theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta}}, \quad (1)$$

所以被接收波的强度是

$$E_{hh} = \Lambda R_H, \quad E_{vv} = \Lambda R_V, \quad (2)$$

其中 Λ 是一个比例系数, 与测量系统参数有关, 而与目标的介电特性无关; E_{hh} 表示发射和接收都采用水平极化, 而 E_{vv} 表示发射和接收都采用垂直极化。

¹ 1997-09-30 收到, 1998-06-05 定稿
国家自然科学基金资助课题 (49493401)

虽然 (1) 式只对平面界面才成立, 但是 (2) 式实际上对于某些粗糙表面也是成立的, 只要粗糙面满足两个最常用的模型, 即小扰动模型和基尔霍夫模型^[9]。因此, 空间波法也可以用来测量粗糙表面半空间媒质的介电常数。

如何从测量出的 E_{hh} 和 E_{vv} 得到 R_H 和 R_V , 涉及到一个定标问题。对于绝对定标, 必须知道系统参数 Λ 。也可以采用相对定标法, 测量两个极化波之比 E_{vv}/E_{hh} , 从 (1) 和 (2) 式经过化简后得到

$$\frac{E_{vv}}{E_{hh}} = \frac{R_V}{R_H} = \frac{\sin \theta \tan \theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta}}{\sin \theta \tan \theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta}}. \quad (3)$$

无论是测量 R_H 或 R_V 或 R_V/R_H , 都可以解析地反演出复介电常数 ϵ_r 。

但是许多仪器实际上不能测量相位, 而只能测量反射波的能量, 即 $|E_{hh}|^2$ 和 $|E_{vv}|^2$, 再通过定标求得 $|R_H|^2$ 和 $|R_V|^2$; 也可以采用相对定标法, 测量 $|E_{vv}/E_{hh}|^2$, 即 $|R_V/R_H|^2$ 。对于绝对定标, 如何从 $|R_H|^2$ 和 $|R_V|^2$ 反演出复介电常数, 需要求解一个联立的非线性方程组, 一般都采用数字迭代求解, 迭代是相当不稳定的。对于相对定标, 需要测量两个角度下的 $|E_{vv}/E_{hh}|^2$, 然后反演复介电常数, 似乎只有进行不稳定的数字迭代求解了。其实, 无论是绝对定标还是相对定标, 都是可以解析地进行反演的, 并且只要测量数据足够精确, 反演解必存在且唯一。下面就讨论解析反演法。

3 反演公式

如果实验能够测出 R_H 或 R_V 或 R_V/R_H , 则可以从 (1) 或 (3) 式解析地反演出 ϵ_r :

$$\epsilon_r = \begin{cases} \sin^2 \theta + \Omega_H^2 \cos^2 \theta, & \Omega_H = \frac{1 - R_H}{1 + R_H}; \\ \frac{1 + \sqrt{1 - \Omega_V^2 \sin^2 2\theta}}{2 \Omega_V^2 \cos^2 \theta}, & \Omega_V = \frac{1 - R_V}{1 + R_V}; \\ \sin^2 \theta (1 + \Omega_R^2 \tan^2 \theta), & \Omega_R = \frac{1 - R_V/R_H}{1 + R_V/R_H}. \end{cases} \quad (4)$$

如果不能测量相位信息, 而只能测量反射波的幅度, 则必须同时测量 $|R_H|^2$, $|R_V|^2$ 和 $|R_V/R_H|^2$ 之中的两个; 也可以在两个角度下测量同一个量。先不妨假定测量为绝对定标, 测量量为在同一角度下的 $|R_H|^2$ 和 $|R_V|^2$, 所以 $|R_V/R_H|^2$ 亦为已知。令 $\epsilon_r = x + iy$, $\sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta} = P + iQ$, 其中 $x \geq 1$, $y \geq 0$, $P > 0$, $Q \geq 0$, 并且

$$P^2 - Q^2 = x - \sin^2 \theta, \quad 2PQ = y, \quad (5)$$

则从 (1) 和 (3) 式有

$$|R_H|^2 = \frac{(\cos \theta - P)^2 + Q^2}{(\cos \theta + P)^2 + Q^2}, \quad \left| \frac{R_V}{R_H} \right|^2 = \frac{(\sin \theta \tan \theta - P)^2 + Q^2}{(\sin \theta \tan \theta + P)^2 + Q^2}. \quad (6)$$

令

$$F = \frac{1 + |R_H|^2}{1 - |R_H|^2} \cos \theta, \quad G = \frac{1 + |R_V/R_H|^2}{1 - |R_V/R_H|^2} \sin \theta \tan \theta, \quad (7)$$

从 (6) 式求得 P , Q 的唯一解是

$$P = \frac{1}{2} \frac{1 - \tan^2 \theta}{F - G}, \quad Q^2 = \frac{1 - \tan^2 \theta}{F - G} F - \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{F - G} \right)^2 - \cos^2 \theta. \quad (8)$$

根据 (5) 式得到 x, y 的唯一解:

$$x = 1 - \frac{1 - \tan^2 \theta}{F - G} F + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{F - G} \right)^2, \quad (9)$$

$$y = \frac{1 - \tan^2 \theta}{F - G} \left[\frac{1 - \tan^2 \theta}{F - G} F - \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{F - G} \right)^2 - \cos^2 \theta \right]^{1/2}. \quad (10)$$

因此将测量值 $|R_H|^2$ 和 $|R_V|^2$ 代入 (7) 式, 再将 F, G 代入 (9) 和 (10) 式, 即得到解析的反演结果。

绝对定标测量通常是不方便的, 对平坦表面也许可以使用金属板来进行定标^[4,8], 但是对于粗糙表面, 定标非常困难, 定标方法还未见报道。因此, 相对定标测量具有绝对的优越性。假设测量量为 $|E_{vv}/E_{hh}|^2 = |R_V/R_H|^2$, 利用 (7) 式可以从 (6) 式求得 $Q^2 = 2PG - P^2 - \sin^2 \theta \tan^2 \theta$, 再代入 (5) 式得到

$$\left. \begin{aligned} 2x &= (2P - G)^2 + (2 \tan^2 \theta - G^2), \\ 2y &= (2P) \left[4G(2P) - (2P)^2 - 4 \sin^2 \theta \tan^2 \theta \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

如果采用两个角度 θ_1 和 θ_2 , 测量结果为 $|R_V/R_H|^2(\theta_1)$ 和 $|R_V/R_H|^2(\theta_2)$, 令

$$G_1 = \frac{1 + |R_V/R_H|^2(\theta_1)}{1 - |R_V/R_H|^2(\theta_1)} \sin \theta_1 \tan \theta_1, \quad G_2 = \frac{1 + |R_V/R_H|^2(\theta_2)}{1 - |R_V/R_H|^2(\theta_2)} \sin \theta_2 \tan \theta_2, \quad (12)$$

则根据 (11) 式应有

$$\left. \begin{aligned} (2P_1 - G_1)^2 + (2 \tan^2 \theta_1 - G_1^2) &= (2P_2 - G_2)^2 + (2 \tan^2 \theta_2 - G_2^2) \\ (2P_1) \left[4G_1(2P_1) - (2P_1)^2 - 4 \sin^2 \theta_1 \tan^2 \theta_1 \right]^{1/2} &= (2P_2) \left[4G_2(2P_2) - (2P_2)^2 - 4 \sin^2 \theta_2 \tan^2 \theta_2 \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

令 $u = 2P_1 - G_1$, 从上式中消去 P_2 , 得到关于 u 的四次方程:

$$a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0 = 0, \quad (14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_4 &= K^2, \quad K = (G_1^2 + \sin^2 \theta_1) - (G_2^2 + \sin^2 \theta_2); \\ a_3 &= 4K G_1 (G_1^2 - \sin^2 \theta_1 \tan^2 \theta_1); \\ a_2 &= 4G_1^2 (G_1^2 - \sin^2 \theta_1 \tan^2 \theta_1)^2 - 4G_2^2 (G_2^2 - \sin^2 \theta_2 \tan^2 \theta_2)^2 + \frac{1}{2} K M, \\ M &= G_1^2 (3G_1^2 - 4 \sin^2 \theta_1 \tan^2 \theta_1) - G_2^2 (3G_2^2 - 4 \sin^2 \theta_2 \tan^2 \theta_2) \\ &\quad + N [N + (6G_2^2 - 4 \sin^2 \theta_2 \tan^2 \theta_2)], \\ N &= (G_1^2 - 2 \tan^2 \theta_1) - (G_2^2 - 2 \tan^2 \theta_2); \\ a_1 &= M G_1 (G_1^2 - \sin^2 \theta_1 \tan^2 \theta_1); \\ a_0 &= 4N G_2^2 (G_2^2 - \sin^2 \theta_2 \tan^2 \theta_2)^2 + \frac{1}{16} M^2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

因此, 求逆过程为: (1) 将测量结果代入 (12) 式得到 G_1 和 G_2 ; (2) 将 $\theta_1, G_1, \theta_2, G_2$ 代入 (15) 式求得系数 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ; (3) 解 (14) 式得到 u (四次方程有解析解); (4) 根据 (11)

式得到解析的反演结果:

$$x = \frac{1}{2} [u^2 + (2 \tan^2 \theta_1 - G_1^2)], \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{2} (u + G_1) [4G_1(u + G_1) - (u + G_1)^2 - 4 \sin^2 \theta_1 \tan^2 \theta_1]^{1/2}. \quad (17)$$

由于四次方程 (14) 式有四个解, 我们似乎可以得到 (x, y) 的四组解, 但是只可能有一组是有意义的, 即满足方程 (13) 式, 并且 $x \geq 1, y \geq 0$. 这一点可以这样来说明: 由于 (14) 式是从 (13) 式经过两次平方后化简整理得到的, 如果 (13) 式有两组解, 则 (14) 式应是一个八次方程, 但是它只是一个四次方程, 所以方程组 (13) 式的解必唯一, 即方程 (14) 式的四个解中只有一个是真解.

4 误差分析

上面解析反演法的用法和正确性可以举个例子来说明. 假设有一组测量结果: 入射角 $\theta = 40^\circ$, $|R_H|^2 = 0.332$, $|R_V|^2 = 0.154$, 将其代入 (7) 式得到 $F = 1.99401$, $G = 2.73034$, 再将 θ, F, G 代入 (9) 和 (10) 式即得到反演结果: $x = 7.30828$, $y = 3.31943$. 对于两角度相对定标测量, 假如测量结果为 $\theta_{1,2} = (40^\circ, 60^\circ)$, $|R_V/R_H|_{1,2}^2 = (0.45, 0.09)$, 通过 (12) 式求得 $G_{1,2} = (1.42196, 1.7967)$, 将 $\theta_{1,2}, G_{1,2}$ 代入 (15) 式得到 $a_{4,3,2,1,0} = (2.38087, -15.1923, -29.9887, 133.585, 225.907)$, 再求解 (14) 式得到四个根 $u_{1,2,3,4} = (3.64037, 6.69421, -2.09563, -1.85796)$, 最后由 (16) 式得到反演结果 $(x, y) = \{(6.31925, 3.58214), (22.0993, 18.5399i), (1.88894, -0.7863i), (1.41911, -0.426838i)\}$, 其中只有第一组解是有意义的, 说明了反演的唯一性, 求逆是非常成功的.

我们所关心的另一个问题是反演结果对测量误差的敏感性. 这里只分析两角度相对定标测量的情况, 对其他测量方式可以类似地分析. 假设测量角度为 θ_1, θ_2 , 测量结果是 $S_1 = |R_V/R_H|^2(\theta_1)$, $S_2 = |R_V/R_H|^2(\theta_2)$, 相对测量误差为 $\Delta S_1/S_1, \Delta S_2/S_2$. 假如将 S_1, S_2 代入 (12) 式再继续反演步骤 (2)-(4) 得到反演结果 (x, y) , 则 S_1, S_2 与 x, y, θ_1, θ_2 之间应满足关系:

$$S_j = \frac{(\sin \theta_j \tan \theta_j - P_j)^2 + Q_j^2}{(\sin \theta_j \tan \theta_j + P_j)^2 + Q_j^2}, \quad j = 1, 2, \quad (18)$$

其中 P_j, Q_j 可以通过 (5) 式求出:

$$\left. \begin{aligned} P_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(x - \sin^2 \theta_j)^2 + y^2} + (x - \sin^2 \theta_j) \right]^{1/2}, \\ Q_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(x - \sin^2 \theta_j)^2 + y^2} - (x - \sin^2 \theta_j) \right]^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2. \quad (19)$$

反演结果 x 的绝对误差为

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial S_1} \Delta S_1 + \frac{\partial x}{\partial S_2} \Delta S_2 = \frac{S_1}{\partial S_1 / \partial x} \frac{\Delta S_1}{S_1} + \frac{S_2}{\partial S_2 / \partial x} \frac{\Delta S_2}{S_2}. \quad (20)$$

因此我们可以定义一个关于 x 的相对误差放大函数:

$$Lx(\theta_1, \theta_2) \triangleq \left| \frac{\Delta x / x}{\Delta S / S} \right| = \frac{1}{x} \left| \frac{S_1}{\partial S_1 / \partial x} + \frac{S_2}{\partial S_2 / \partial x} \right|, \quad (21)$$

其中假定了 $\Delta S_1/S_1 = \Delta S_2/S_2 = \Delta S/S$ 。关于 y 的误差放大函数 L_y 可以类似地定义。将 (18) 和 (19) 式代入 (21) 式即可分析相对误差放大倍数 (误差敏感性) 与测量角度之间的关系。比如将前面例子中的反演结果 (x, y) 代入即可求得 $L_x = 5.33783$, $L_y = 7.38722$ 。因此最终的反演结果 (若取三位有效数字) 应表示为

$$x = 6.32 \times (1 \pm 5.34p), \quad y = 3.58 \times (1 \pm 7.39p), \quad (22)$$

其中 $p = \Delta S/S$ 为测量数据的相对误差。

为进一步分析测量误差对反演结果的影响, 图 1(a), 1(b) 分别画出了 L_x, L_y 与入射角 θ_2 之间的关系, θ_1 假设是固定的, 图中的三条曲线分别对应 $\theta_1 = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ 。从图中可以看出, 测量误差对反演结果影响非常显著, 小角度时尤其如此, 反演误差是测量误差的十几、几十倍。比较合适的测量角度应选择中等角度 $40^\circ - 60^\circ$, 此时的相对误差放大一般在 10 倍以下。

最后, 虽然这里的分析只是针对相对定标双幅度法和一组具体的测量数据, 但是我们可以得出一般的结论: 反演结果对测量误差非常之敏感, 这一点也许是空间波法的一个弱点, 它对测量精度要求很高, 使用相对定标法时还应避免小角度测量, 否则反演会无解或结果无意义。另外, 本文只讨论空间波法的理论反演算法, 关于用这一方法 (包括绝对定标、相对定标, 单角度幅度-相位法、双角度幅度-幅度法) 测半空间有耗媒质介电常数的实验工作另有报道^[4,10]。

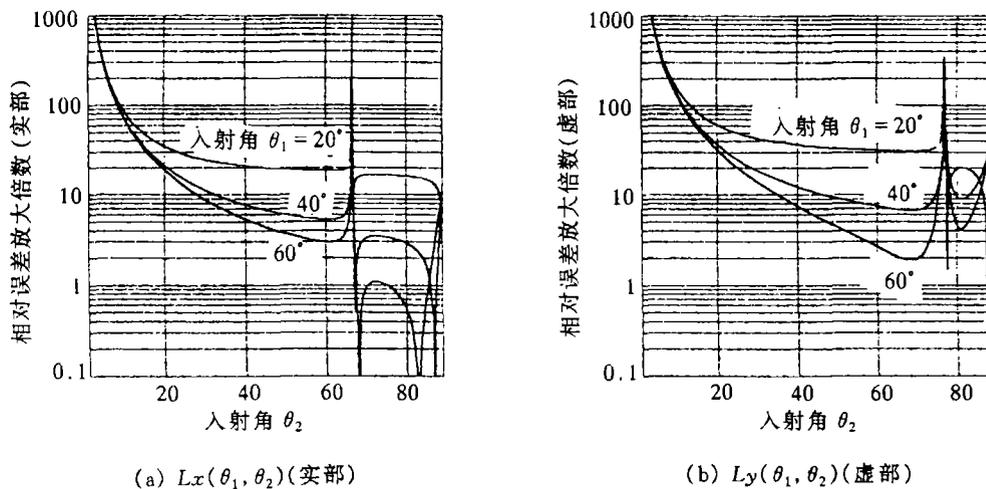


图 1 反演结果对测量误差的敏感性与入射角之间的关系

参 考 文 献

- [1] 张俊荣, 张德海, 王丽巍. 微波遥感中的介电常数. 遥感技术与应用, 1994, 9(2): 30-43.
- [2] 张俊荣, 王丽巍, 张德海. 植被和土壤的微波介电常数. 遥感技术与应用, 1995, 10(3): 40-45.
- [3] Bernard P A, Cautray J M, Measurement of dielectric constant using a microstrip ring resonator, IEEE Trans. on MTT, 1991, MTT-39(3): 592-595.
- [4] 陈志雨, 李安莱, 周冬青. 空间波与长试样法测量介电常数的结果与对照. 遥感学报, 1997, 1(1): 40-45.
- [5] Staebell K F, Misra D, An experimental technique for *in vivo* permittivity measurement of materials at microwave frequencies, IEEE Trans. on MTT, 1990, MTT-38(3): 337-339.

- [6] 康士峰, 孙芳, 罗贤云, 等. 地物介电常数测量和分析. 电波科学学报, 1997, 12(2): 161-168.
- [7] 黄扬, 杨习荣, 耿淮滨. 土壤含水量与其微波反射特性关系的研究. 环境遥感, 1986, 1(2): 101-106.
- [8] 张俊荣, 张德海, 王丽巍, 等. 微波遥感典型地物介电常数实地测量. 电子科学学刊, 1997, 19(4): 566-569.
- [9] Ulaby F T, Moore R K, Fung A K. Microwave Remote Sensing, Vol.II, Massachusetts: Addison-Wesley Pub. Co., 1982, 929-931, 956-960.
- [10] Chen Z Y, Zhou D Q. Dual polarization and phase method to detect permittivity of media in half-space, Proc. of Asian-Pacific Microwave Conference, Hongkong: Dec. 1997, 893-896.

INVERSE FORMULATIONS FOR PERMITTIVITY MEASUREMENT OF GROUND MATERIALS USING SPACE-WAVE METHOD

Xia Mingyao Chen Zhiyu

(*Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing 100080*)

Abstract The space-wave method, suitable for extended surface targets, is a preferable method for permittivity measurement of ground materials at microwave frequencies. The inversion of permittivity from the measured data, which is established on using the Fresnel reflection coefficients, is easy if the measurement includes phase information. However, if the measured quantities are just the amplitudes of the reflected waves, the inversion will be much complicated by solving a quadratic nonlinear equation set, and so far only numerical iterative approaches have been reported in the literature. Unfortunately, the iterative process is highly unstable because of the extremely sensitivity of the inverse algorithms to the measured data and even to the iterative initial values. In the present work, analytical inverse formulations are presented which will give a unique inverse result if it does exist for a set of measured data. Error sensitivity of the inversion to the measurement errors are performed, as well.

Key words Space-wave method, Permittivity of ground materials, Analytical inverse methods, Error sensitivity

夏明耀: 男, 1964年生, 副研究员, 研究兴趣包括电磁场理论与数值方法, 电磁波散射与小波应用, 生物电磁学.

陈志雨: 男, 1945年生, 研究员, 主要从事电磁场理论与电波传播领域的研究.