

## 利用 2-D 射影变换实现多视图下元素的预报<sup>1</sup>

刘 方 王润生

(国防科技大学 ATR 国家重点实验室 长沙 410073)

**摘 要** 在描述多视图的几何元素对应关系方面, 2-D 射影变换是一种有力工具。该文把求解 2-D 射影变换矩阵的方法从单纯的四点对应扩展到多种组合形式的四元素对应当中, 如: 4 点、4 线、3 点 1 线、3 线 1 点和 2 点 2 线等。基于 2-D 射影对应所描述的视图关系, 可以有效解决双视图和三视图条件下的点元素或线元素的预报问题。由于没有任何估计因素的介入, 提高了预报结果的准确性。灵活组合点线多种元素建立视图关系使得预报环境适应面广, 实验结果验证了方法的有效性。

**关键词** 射影几何, 射影对应, 射影变换, 元素预报, 射影不变量, 对极几何

**中图分类号** TP391.4

### 1 前 言

如何利用目标的多视点成像, 从已知视图的信息预报其它视图的未知信息, 在计算机视觉的多重领域都有重要的研究价值。同一目标的不同成像之间存在必然的联系, 借助于已知的视图元素信息, 可从多条途径实现预报。当前较典型的思路有: (1) 利用对极几何的约束关系<sup>[1]</sup>, 实现视图间的元素预报, 该方法需要在 3 张视图之间估计 3 个基础矩阵(共 24 个参数), 预报时严格依赖估计参数, 而基础矩阵的不同求解方法会使估计结果存在较大差异<sup>[2]</sup>, 从而间接影响预报结果; (2) 利用射影不变量<sup>[3]</sup>实现元素预报, 该方法利用交比不变量实现了 1-D, 2-D, 3-D 情况下的点元素的预报, 其中有关三视图下的部分讨论在本质上与基础矩阵的思路非常接近, 同样存在估计误差。

注意到, 提高预报的质量和效率存在两个重要环节: 一是尽可能减少先验知识, 二是避免估计因素的影响。射影几何的知识表明, 2-D 射影变换关系可用一个  $3 \times 3$  的矩阵表示<sup>[4]</sup>。该矩阵可以通过两个射影平面上至少四对点对应获得<sup>[4,5]</sup>。本文把求解 2-D 射影变换矩阵的方法扩展到应用多种组合形式的四元素对应当中(点和线)。利用 2-D 射影变换矩阵, 实现了基于双视图的点元素或线元素的预报问题。同时, 巧妙利用 2-D 射影变换关系, 还可解决一些典型情况下的 3-D 元素的预报问题。相对于前述多视图的元素预报, 我们提出的方法具有两个特点: 预报过程中不存在估计成份, 提高了预报结果的精确性; 方法相对简单, 灵活组合点线多种元素实现点或线元素的预报使方法具有广泛的应用环境。

在本文中, 我们首先在第 2 节给出有关 2-D 射影变换的一些知识, 并介绍了求解 2-D 射影变换矩阵的多种方法; 在第 3 节和第 4 节分别介绍了在双视图下和三视图下利用 2-D 射影变换实现元素预报的方法; 第 5 节实验; 第 6 节小结。

### 2 2-D 射影变换及 2-D 射影变换矩阵的求解方法

在本文中约定: 采用齐次坐标表述点或直线元素, 并利用大、小写字母区分空间元素和平面元素。若平面一直线的直线方程可表示为:  $l_1x + l_2y + l_3z = 0$ , 则矢量  $(l_1, l_2, l_3)^T$  称为该直线的平面齐次坐标。平面一点  $a$  在直线  $l$  上, 可用矢量的数量积表示为:  $a \bullet l = 0$ 。平面上过两点  $a, b$  的直线  $l$  可由  $a, b$  的矢积得到, 写作:  $l = k(a \wedge b)$ 。同理, 平面上两直线  $l, m$  的交点  $c$  有:  $c = k(l \wedge m)$ 。如果不加特殊说明,  $k$  均表示不为零的比例因子。对于存在比例因子

<sup>1</sup> 2000-03-06 收到, 2000-07-17 定稿

关系的等式, 我们采用符号“ $\cong$ ”表示。所以上述关系又可以写作:  $l \cong a \wedge b$  和  $c \cong l \wedge m$ 。本文中两射影平面的 2-D 射影变换关系均用一  $3 \times 3$  的矩阵表示。

在此, 就若干基础概念作简单介绍, 重要部分给出证明。

**定理 1** 已知射影平面  $P$  上的 4 个点  $p_i(x_i, y_i, 1)^T$ , 与射影平面  $Q$  上的 4 个点  $q_i(x'_i, y'_i, 1)^T$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 两两成直射对应, 其中共面的 4 点中任意 3 点不共线, 则唯一确定由射影平面  $P$  到射影平面  $Q$  的关于点坐标的 2-D 射影变换, 使得在射影平面  $P$  和  $Q$  上的任意一对对应点  $p$  和  $q$ , 有

$$q \cong Tp, \quad \text{且 } \det(T) \neq 0 \quad (1)$$

其中

$$T \cong \begin{bmatrix} x'_1 \Delta'_{423} & x'_2 \Delta'_{143} & x'_3 \Delta'_{124} \\ y'_1 \Delta'_{423} & y'_2 \Delta'_{143} & y'_3 \Delta'_{124} \\ \Delta'_{423} & \Delta'_{143} & \Delta'_{124} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \Delta_{423} & x_2 \Delta_{143} & x_3 \Delta_{124} \\ y_1 \Delta_{423} & y_2 \Delta_{143} & y_3 \Delta_{124} \\ \Delta_{423} & \Delta_{143} & \Delta_{124} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2)$$

$$\Delta_{ijk} = \det \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta'_{ijk} = \det \begin{bmatrix} x'_i & y'_i & 1 \\ x'_j & y'_j & 1 \\ x'_k & y'_k & 1 \end{bmatrix}$$

射影变换下, 点线元素的关联性保持不变。在平面关系上, 点线具有对偶性。我们可以等同对待这两种元素。既然 4 点对应唯一确定一对射影对应, 同样可由 4 线对应确定射影对应关系。

**推论 1** 如果已知射影平面  $P$  上的 4 直线  $l_i(x_i, y_i, z_i)^T$ , 与射影平面  $Q$  上的 4 直线  $l'_i(x'_i, y'_i, z'_i)^T$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 两两成直射对应, 其中共面的 4 条直线中任意 3 线不共点, 则唯一确定由射影平面  $P$  到射影平面  $Q$  的关于线坐标的 2-D 射影变换, 使得对于任意一对对应直线  $l$  和  $m$ , 存在关系:

$$m \cong Ml, \quad \text{且 } \det(M) \neq 0 \quad (3)$$

其中矩阵  $M$  与 (2) 式中的矩阵  $T$  有相似形式。

**推论 2** 由射影平面  $P$  到射影平面  $Q$  的 2-D 射影变换, 其线坐标变换矩阵  $M$  与点坐标变换矩阵  $T$  的关系为

$$M \cong (T^{-1})^T \quad (4)$$

**引理 1** 平面  $P$  上的 4 点  $p_i(x_i, y_i, 1)^T$  与平面  $Q$  上的 4 点  $q_i(x'_i, y'_i, 1)^T$ ,  $i = (1, 2, 3, 4)$  两两对应, 则平面  $P$  和  $Q$  之间的 2-D 射影变换矩阵  $T$  与  $q_4$  的坐标成线性关系, 即

$$T \cong Ax'_4 + By'_4 + C \quad (5)$$

其中  $A, B, C$  均为  $3 \times 3$  的常数矩阵, 且它们的行列式  $\det(A), \det(B), \det(C)$  不同时为零。

**证明** 由定理 1, 4 点对应的 2-D 射影变换矩阵  $T$  可以写作

$$T \cong T_2 \cdot T_1^{-1} \quad (6)$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} x_1 \Delta_{423} & x_2 \Delta_{143} & x_3 \Delta_{124} \\ y_1 \Delta_{423} & y_2 \Delta_{143} & y_3 \Delta_{124} \\ \Delta_{423} & \Delta_{143} & \Delta_{124} \end{bmatrix} = \text{常数阵}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} x'_1 \Delta'_{423} & x'_2 \Delta'_{143} & x'_3 \Delta'_{124} \\ y'_1 \Delta'_{423} & y'_2 \Delta'_{143} & y'_3 \Delta'_{124} \\ z'_1 \Delta'_{423} & z'_2 \Delta'_{143} & z'_3 \Delta'_{124} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11}x'_4 + m_{11}y'_4 + n_{11}z'_4 & l_{12}x'_4 + m_{12}y'_4 + n_{12}z'_4 & l_{13}x'_4 + m_{13}y'_4 + n_{13}z'_4 \\ l_{21}x'_4 + m_{21}y'_4 + n_{21}z'_4 & l_{22}x'_4 + m_{22}y'_4 + n_{22}z'_4 & l_{23}x'_4 + m_{23}y'_4 + n_{23}z'_4 \\ l_{31}x'_4 + m_{31}y'_4 + n_{31}z'_4 & l_{32}x'_4 + m_{32}y'_4 + n_{32}z'_4 & l_{33}x'_4 + m_{33}y'_4 + n_{33}z'_4 \end{bmatrix}$$

其中  $\Delta_{ijk}$  和  $\Delta'_{ijk}$  如前定义.  $l_{ij}, m_{ij}, n_{ij}$ , ( $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ ) 均可由已知坐标求出, 为系数项. 所以

$$T_2 = A_1 x'_4 + B_1 y'_4 + C_1$$

代入 (6) 式

$$T \cong T_2 \cdot T_1^{-1} = (A_1 x'_4 + B_1 y'_4 + C_1) \cdot T_1^{-1} = A_1 T_1^{-1} x'_4 + B_1 T_1^{-1} y'_4 + C_1 T_1^{-1} = Ax'_4 + By'_4 + C$$

(5) 式得证.

证毕

**引理 2** 如果射影平面  $P$  上的直线  $l_i(x_i, y_i, z_i)^T$  与射影平面  $Q$  上的直线  $m_i(x'_i, y'_i, z'_i)^T$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 两两对应, 则 2-D 射影变换矩阵  $M$  与直线  $m_4$  的坐标成线性关系, 即

$$M \cong Ax'_4 + By'_4 + Cz'_4 \quad (7)$$

其中  $A, B, C$  均为  $3 \times 3$  的常数矩阵, 且它们的行列式  $\det(A), \det(B), \det(C)$  不同时为零.  $A, B, C$  的形式与引理 1 中的类似.

**引理 3** 已知空间平面  $\Phi$  在两视图的成像分别为平面  $P$  与平面  $Q$ , 对应射影平面  $P$  与  $Q$  之间的 2-D 射影变换矩阵为  $T$ . 空间一直线  $L$  在两视图的成像分别为  $l_1$  和  $l_2$ . 设  $L$  与平面  $\Phi$  的交点是  $D$ ,  $D$  的视图成像分别是  $d_1$  和  $d_2$ , 则

$$d_2 \cong [(T^{-1})^T \cdot l_1] \wedge l_2 \quad (8)$$

$$d_1 \cong [(T)^T \cdot l_2] \wedge l_1 \quad (9)$$

$$d_2 \cong [M \cdot l_1] \wedge l_2 \quad (10)$$

$$d_1 \cong [(M^{-1})^T \cdot l_2] \wedge l_1 \quad (11)$$

**推论 3** 如果已知射影平面  $P$  和  $Q$  上的 1 点 3 线对应, 其中共面的元素之间: 点不在任一直线上, 3 线不交于一点, 则唯一确定由射影平面  $P$  到射影平面  $Q$  的 2-D 射影变换.

**推论 4** 如果已知射影平面  $P$  和  $Q$  上的 3 点 1 线对应, 其中共面的元素之间: 任意点不在直线上, 3 点不共线, 则唯一确定由射影平面  $P$  到射影平面  $Q$  的 2-D 射影变换.

**推论 5** 如果已知射影平面  $P$  和  $Q$  上的 2 点 2 线对应, 其中共面的元素之间: 任意点不在直线上, 两直线的交点不过已知点, 则唯一确定由射影平面  $P$  到射影平面  $Q$  的 2-D 射影变换.

### 3 利用 2-D 射影变换实现两视图下 2-D 几何元素的预报

由同一个 2-D 平面目标所获得的两张视图，利用视图 1 和视图 2 上的 4 组已知元素 (点、线) 的对应可以唯一确定 2-D 射影变换关系  $T$  或  $M$ ，一旦求解出  $T$  或  $M$ ，利用 (1) 式和 (3) 式可以很容易地从视图 1 的几何元素预报视图 2 的对应几何元素。当已知视图 1 的任意点元素  $a$ ，预报视图 2 的对应点元素  $a'$  时，利用 (1) 式  $a' \cong Ta$  实现预报。当已知视图 1 的任意线元素  $l$ ，预报视图 2 的对应直线元素  $l'$  时，利用 (3) 式  $l' \cong Ml$  实现预报。

由第 2 节中的介绍，反映射影平面对应关系的 2-D 射影变换矩阵  $T$  或  $M$  可以通过 4 点对应、4 线对应、3 点 1 线对应、3 线 1 点和 2 点 2 线对应等多种途径来求解，这大大增强了在实际应用中的灵活性。下面我们采用关系图的形式把不同求解方法用于 2-D 元素预报的情况作一个概括，见图 1。

由于 2-D 射影变换矩阵 ( $T$  或  $M$ ) 存在 8 个独立参数，对于点或线这类 2-D 几何元素 (两个独立参数)，至少要有 4 组 ( $2 \times 4 \geq 8$ ) 已知对应关系才能完成预报工作。本文的方法，还可以向简单二次曲线 (5 个独立参数) 这类几何元素扩展，例如：通过共面的 2 点 1 曲线的对应关系 ( $2 \times 2 + 5 \geq 8$ ) 获得 2-D 射影变换矩阵的信息，再作预报。引入简单二次曲线等其它组合形式，将进一步丰富求解  $T$  阵和  $M$  阵的方法，由于篇幅限制不作赘述。

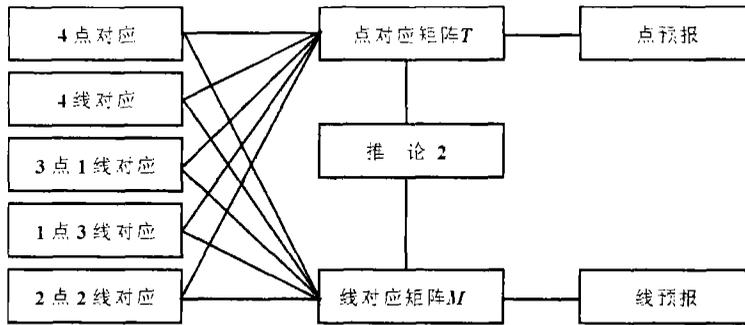


图 1 利用 2-D 射影变换矩阵实现两视图之间点、线元素的预报

### 4 用 2-D 射影变换实现三视图下 3-D 几何元素的预报

无论是确定基础矩阵<sup>[1,2]</sup>还是确定 8 个参数<sup>[3]</sup>，按照常规方法必须涉及 3 张视图上至少 8 组点 (需已知 3 张视图上  $8 \times 3 = 24$  个点的坐标) 的对应关系，需要计算  $8 \times 3 = 24$  个关键参数。虽然这类方法有较好的通用性，适合于空间任意点元素或线元素的 3 视图的预报问题，但由于估计参量的介入，使预报的精确性不能很好保证。由第 2 节的讨论， $T$  阵或  $M$  阵是精确计算得到的参数关系，我们尝试把 2-D 射影变换用于 3-D 几何元素的预报问题当中。

分析第一种情况，无法满足共面 4 个元素的已知对应关系，如何借助于不共面的多个元素在视图间的对应关系实现预报。一个典型问题就是：利用空间 3 点与空间 2 直线，实现该 3 点确定的平面上任意一点的预报。

**问题 1** 空间四点  $A, B, C, D$ ，其中  $A, B, C$  3 点确定的平面定义为  $P$ ，点  $D$  在  $P$  上，另有不在  $P$  上的两直线  $L, M$ 。已知：在视图  $i$  中，各元素的成像齐次坐标分别为  $a_i, b_i, c_i$  和  $l_i, m_i (i = 1, 2, 3)$ ，且  $d_1$  和  $d_2$  已知。求视图 3 中的第 4 点  $d_3$  的 2-D 成像坐标。

**分析** 平面  $P$  在视图 1 与视图 2 之间的 2-D 射影对应关系可利用 (1) 式得到。直线  $L, M$  与平面  $P$  的空间交点分别为  $E, F$ , 在三视图的成像对应为  $e_i, f_i, i = 1, 2, 3$ 。其中  $e_1, e_2, f_1, f_2$  可利用引理 3 分别求解,  $e_3, f_3$  待定。空间 5 点  $A, B, C, E, F$  共面, 对于 4 元素组:  $A, B, C, F$  形成的视图 1 与视图 3 之间的 2-D 射影变换  $T_f^{13}$ , 由引理 1,  $T_f^{13}$  是  $f_3$  的线性函数, 因为反映的是平面  $P$  在视图间的射影变换, 所以该  $T$  阵同样适用于点  $e_1$  与  $e_3$  的对应关系, 因此有

$$\left. \begin{aligned} e_3 &\cong [T_f^{13}(f_3)]e_1 \\ e_3 \bullet l_3 &= 0 \\ f_3 \bullet m_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

注意 (12) 式的第一个等式表达的是矢量相等, 代表两个独立方程。解方程, 可以得到  $e_3, f_3$ , 从而可以求出  $T^{13}$ , 利用式  $d_3 \cong T^{13}d_1$ , 可以实现预报, 问题得解。

受 2-D 元素预报的启发, 采用其它组合方式, 同样可以实现点元素或线元素的预报问题, 如图 2。

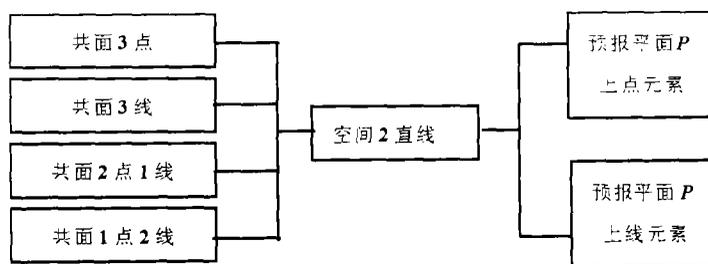


图 2 三视图下利用空间元素的多种集合实现元素预报

再来看第二种情况: 共面 4 个元素的已知对应关系可以满足, 能否实现不在该平面上的空间几何元素的预报。我们把这个问题进一步简化, 已知两组 4 元素对应关系, 如何利用 2-D 射影变换实现空间线元素的预报。

**问题 2** 空间 8 点, 其中  $A, B, C, D$  在平面  $P$  上,  $E, F, G, H$  在平面  $Q$  上, 此 8 点在三视图的成像坐标已知, 分别为  $a_i, b_i, c_i, d_i$  和  $e_i, f_i, g_i, h_i, i = 1, 2, 3$ 。另有空间一直线  $L, L \notin P, L \notin Q$ , 已知  $L$  在视图 1 和视图 2 的成像  $l_1$  和  $l_2$ , 求  $L$  在视图 3 的成像  $l_3$ 。

**分析** 利用定理 1, 可以确定平面  $P$  和  $Q$  在三视图之间 2-D 射影变换关系分别定义为  $T_P^{13}, T_P^{23}, T_P^{12}$  和  $T_Q^{13}, T_Q^{23}, T_Q^{12}$ 。由引理 3, 直线  $L$  与平面  $P$  的交点在视图 3 上的成像坐标可以表示为

$$c_P^3 \cong [((T_P^{13})^{-1})^T l_1] \wedge [((T_P^{23})^{-1})^T l_2]$$

直线  $L$  与平面  $Q$  的交点在视图 3 上的成像坐标可以表示为

$$c_Q^3 \cong [((T_Q^{13})^{-1})^T l_1] \wedge [((T_Q^{23})^{-1})^T l_2]$$

则  $l_3 \cong c_P^3 \wedge c_Q^3$  问题得解。

在本节的讨论中，我们阐述了两个特殊例证，在一定程度上限制了应用条件，但方法计算量小，不存在任何估计因素，从而确保了预报的精确性。仔细观察这两种情况，发现它们的约束

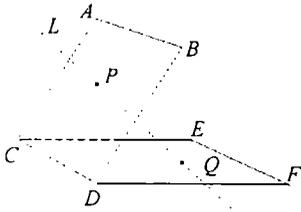


图 3 空间 6 点预报直线元素

条件在实际应用中并不苛刻。对于情况 1，很容易获得空间 3 点和 2 线的对应关系；对于情况 2，尽管要求两组 4 元素对应，但这个条件也可以演变成空间 6 点，如图 3。这种结构的元素集合应该是相当普遍的。由于  $T$  阵或  $M$  阵的求解可以通过多种元素组合形式实现，上述例证还可以演变出非常丰富的其他组合情况。适当地引入线元素使问题的应用和求解都变得更加灵活。

### 5 实 验

图 4 是由 SGI 工作站的 Alias 产生的同一场景不同成像参数的多张视图，参与计算的关键元素均可见且已作标记。分别对 2-D 元素预报问题和 3-D 元素预报问题作实验，结果见表 1 和表 2。

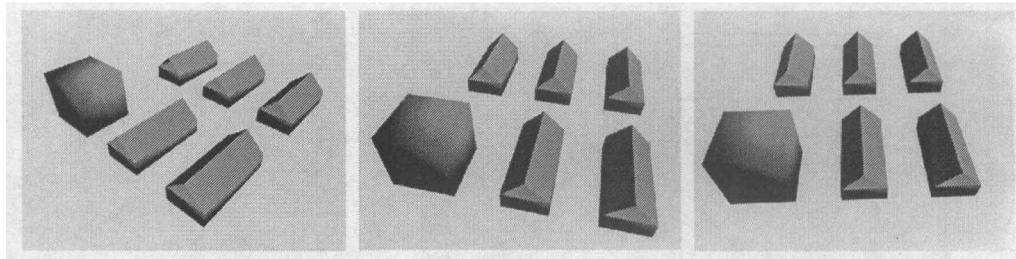


图 4 同一场景不同成像参数的 3 张视图

表 1 实现 2 视图下 2-D 几何元素的预报

已知元素集合	预报结果	真实值
利用 4 线对应预报点元素	(66, 144, 1)	(66, 143, 1)
	(195, 56, 1)	(194, 56, 1)
	(163, 72, 1)	(160, 73, 1)
利用 3 点 1 线对应预报线元素	(-3.24, -6.49, 100)	(-3.24, -6.72, 100)
	(12.12, -23.75, 100)	(11.14, -21.32, 100)
	(-7.26, 2.42, 100)	(-7.25, 2.35, 100)

表 2 实现 3 视图下 3-D 几何元素的预报

已知元素集合	预报结果	真实值
利用 3 点 2 线对应预报点元素	(36, 105, 1)	(35, 106, 1)
	(96, 60, 1)	(97, 60, 1)
	(21, 62, 1)	(22, 63, 1)
利用 6 点对应预报线元素	(10.46, -21.5, 100)	(10.7, -20.4, 100)
	(0, 16.4, 100)	(0, 15.9, 100)

注：为了观察预报数据与真实数据的一致性，直线元素的齐次坐标作了归一化处理。

## 6 小 结

本文利用多种组合形式的共面元素集合, 求解存在于两视图间的 2-D 射影变换关系, 并把它灵活应用于视图间的几何元素预报问题。实验结果表明本方法不存在参数估计成份, 具有较高的精确性; 灵活组合点线多种元素实现点或线元素的预报使方法具有广泛的应用环境。

## 参 考 文 献

- [1] O. D. Faugeras, L. Robert, What can two images tell us about a third one?, *International Journal of Computer Vision*, 1996, 18(3), 5-19.
- [2] Zhengyou Zhang, Determining the epipolar geometry and its Uncertainty, A Review, *International Journal of Computer Vision*, 1998, 27(2), 161-195.
- [3] E. B. Barrett *et al.*, Linear resection, intersection, and perspective-independent model matching in photogrammetry: Theory, SPIE, Vol 1567, 1991, Applications of Digital Image Processing XIV, 142-169.
- [4] 龙泽斌编著, 几何变换, 湖南科学技术出版社, 1984 年第一版, 第三章.
- [5] L. Quan, Invariants of six points and projective reconstruction from three uncalibrated images, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1995, 17(1), 34-46.

## PREDICTING IMAGE ELEMENTS USING 2-D PROJECTIVE TRANSFORMATION FROM MULTIPLE VIEWS

Liu Fang      Wang Runsheng

(*Nat. Key Lab of ATR, Univ. of National Defence Tech., Changsha 410073, China*)

**Abstract** 2-D projective collineation provides an ideal mathematical tool for describing planar element correspondence in multiple views. This paper extends the solution methods for 2-D projective transformation matrix from 4 points corresponding to variety combinations of points and lines corresponding, such as 4 points, 4 lines, 1 point and 3 lines, 3 lines and 1 point, and 2 points and 2 lines, etc. Based on the relationship between two views indicated as 2-D projective collineation, prediction problems about points or lines from two views or three views can be solved effectively. Without any estimating parameters involved, the prediction results' accuracy is improved. Freely combining points and lines on describing relationship between views makes the application field wider. The methods proposed here have been verified by experimental results.

**Key words** Projective geometry, Projectivity, Projective transformation, Prediction, Projective invariant, Epipolar geometry

刘 方: 女, 1970 年生, 硕士, 讲师, 博士生, 主要从事图像分析与理解、模式识别和信息融合等方向的科学研究与教学工作。

王润生: 男, 1941 年生, 博士生导师, 中国图像图形学会常务理事, 中国电子学会高级会员。主要从事图像分析与理解、模式识别和信息融合等方向的科学研究与教学工作。