

图象数据压缩的 DCT 法*

许耀昌 平西建

(北京航空学院)

数字图象的数据率很大,因此在传输和存贮图象时必须考虑对图象数据加以压缩.压缩的方法主要有两大类,即预测编码法和变换编码法.变换编码法又分最佳变换和准最佳变换编码法.由于最佳变换需要计算图象的协方差矩阵及其特征向量和特征值,一般还没有快速算法,所以很难付诸实用.因而常采用准最佳变换.具有快速算法的准最佳变换有:离散余弦变换(DCT),斜变换(ST),离散傅里叶变换(DFT),沃尔什-哈德玛变换(W-HT)和哈尔变换(HT).按系数方差分布的特点,各种准最佳变换与最佳变换(K-LT)接近程度的次序如下:

$$W-HT, HT \rightarrow DFT \rightarrow ST \rightarrow DCT \rightarrow K-LT.$$

因此,对图象数据压缩的离散余弦变换编码法进行研究是有意义的.

1. 一维离散余弦变换 设有 N 点空域实序列 $f(x)$, $x = 0, 1, \dots, N-1$, 其DCT为:

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x), \\ F(u) &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其逆变换(IDCT)为:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} F(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=1}^{N-1} F(u) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N}, \quad (2)$$

其中 $u = 1, 2, \dots, N-1$; $x = 0, 1, \dots, N-1$.

实际上,DCT核 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{N}}, \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right\}$ 是一类离散的切比雪夫多项式,它们是归一正交的.

DCT的快速算法有两种:

(1) 两倍长FFT算法 对空域数据 $f(x)$ 和变换域数据 $F(u)$ 分别作补充定义,使:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x = 0, 1, \dots, N-1; \\ 0, & x = N, N+1, \dots, 2N-1. \end{cases} \quad (3)$$

和

$$\hat{F}(u) = \begin{cases} F(u)e^{j\frac{\pi u}{2N}}, & u = 0, 1, \dots, N-1; \\ 0, & u = N, N+1, \dots, 2N-1; \end{cases} \quad (4)$$

* 1984年1月20日收到,1984年11月13日修改定稿.

则 DCT 的等价形式为:

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x), \\ F(u) &= \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ e^{-j\frac{\pi u}{2N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_{2N}^{xu} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

和

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \sqrt{\frac{2}{N}} \right) \hat{F}(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{u=0}^{2N-1} \hat{F}(u) W_{2N}^{-xu} \right\}, \quad (6)$$

式中, $W_{2N} = e^{-j\frac{2\pi}{2N}}$, $x = 0, 1, \dots, N-1$; $u = 1, 2, \dots, N-1$.

显然, 式(5)、(6)中的

$$\sum_{x=0}^{2N-1} \hat{f}(x) W_{2N}^{xu} \text{ 和 } \sum_{u=0}^{2N-1} \hat{F}(u) W_{2N}^{-xu}$$

是一对 $2N$ 点的 DFT, 可以用 FFT 算法计算. 按此算法, 我们编制了计算 DCT 的 FORTRAN 程序.

(2) FDCT 算法 此算法适用于 $N = 2^m$, $m \geq 2$ 的情况. 它是将 DCT 矩阵分解为几个每行最多只有两个非零元素的稀疏矩阵的乘积, 构成蝶式运算来完成的. 此算法在实数域进行, 所需加法和乘法运算的次数分别为 $\frac{3N}{2}(\log_2 N - 1) + 2$ 和 $N \log_2 N - \frac{3N}{2} + 4$. 实际上比 FFT 算法快六倍^[3].

2. 二维离散余弦变换 文献[1]中给出的二维 DCT 形式为:

$$\left. \begin{aligned} C(0, 0) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y), \\ C(u, v) &= \frac{1}{2N^3} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) [\cos(2x+1)u\pi] [\cos(2y+1)v\pi] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

和

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{N} C(0, 0) + \frac{1}{2N^3} \sum_{u=1}^{N-1} \sum_{v=1}^{N-1} C(u, v) [\cos(2x+1)u\pi] \\ &\quad \cdot [\cos(2y+1)v\pi], \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $u, v = 1, 2, \dots, N-1$; $x, y = 0, 1, \dots, N-1$.

上述 DCT 变换对中有以下三点疑问:

- (1) 两式中缺少 $u, v = 0$ 但 $u \neq v$ 的变换域系数;
- (2) 两式变换核中余弦项的宗量与 N 无关;
- (3) 系数 $\frac{1}{2N^3}$ 不对.

为了找出二维 DCT 的合理表达式, 我们用矩阵的方法作了独立的推导, 并利用切比雪夫多项式的正交性加以证明. 本文给出的二维 DCT 变换对形式为:

$$\left. \begin{aligned} F(0, 0) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y), \\ F(0, v) &= \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N}; \\ F(u, 0) &= \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N}, \\ F(u, v) &= \frac{2}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N}; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{N} F(0, 0) + \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{v=1}^{N-1} F(0, v) \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{u=1}^{N-1} F(u, 0) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\ &\quad + \frac{2}{N} \sum_{u=1}^{N-1} \sum_{v=1}^{N-1} F(u, v) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N}; \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $u, v = 1, 2, \dots, N-1$; $x, y = 0, 1, \dots, N-1$.

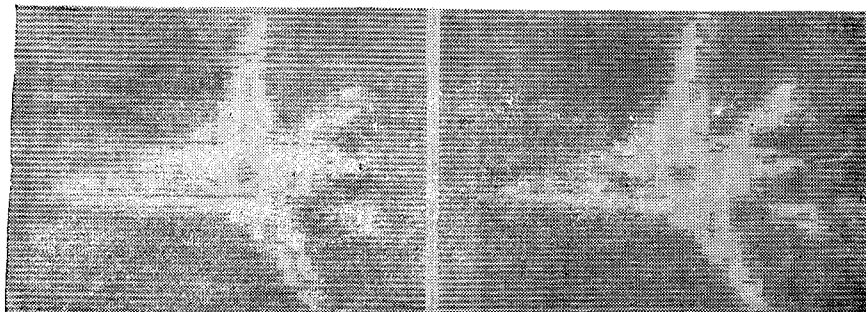
式(9)、(10)修正了式(7)、(8)中的错误,它们与文献[2]中式(10-3-5a)、(10-3-5b)的

表 1 DCT 法与 DFT 法的性能比较

方法	子图象尺寸	压 缩 比	SNR (dB)
DCT	4×4	0.2500	22.76
		0.3125	24.08
	8×8	0.2500	23.41
		0.3125	24.25
DFT	4×4	0.2500	20.31
		0.3125	21.32
	8×8	0.2500	21.13
		0.3125	21.69



(a) 输入图象



(b) 8×8 子图象 DFT 法压缩比为 0.3125 时的输出图象

(c) 8×8 子图象 DCT 法压缩比为 0.3125 时的输出图象

图 1

形式实质上是一致的。

二维 DCT 核是可分离的, 它的计算可以转化为两次一维 DCT 运算。对于 4×4 和 8×8 图象子阵列, 按 FDCT 算法我们编制了计算二维正、反 DCT 的 FORTRAN 程序。

3. DCT 编码压缩 由于 DCT 变换域系数的方差分布与最佳变换非常接近, DCT 用于图象数据压缩是比较理想的。以图 1(a) 所示的 64×64 , 5bit/pel 的数字图象为例, 我们用 DCT 法和 DFT 法分别做了区域取样压缩的计算机仿真试验, 其部分结果如表 1 和图 1(b), 1(c) 所示。由表 1 可知, 在相同的分块形式、相同的压缩比下, DCT 法的 SNR 比 DFT 法高 2dB。按主观保真度准则, DCT 法的输出图象(图 1(c)) 具有较好的主观质量。因此, DCT 法用于图象数据压缩的效果优于 DFT 法。这与理论分析的结果是一致的。

参 考 文 献

- [1] R. C. Gonzalez and P. Wintz: Digital Image Processing, Addison-Wesley Publishing Company. 1977.
- [2] W. K. Pratt: Digital Image Processing, John Wiley and Sons, Inc. 1978.
- [3] W. Chen, C. H. Smith and Fratick: "A Fast Computational Algorithm for the Discrete Cosine Transform" *IEEE Trans. on COM*, CQM-25 (1977), 1004.

THE DCT METHOD FOR IMAGE DATA COMPRESSION

Xu Yaochang, Ping Xijian

(Beijing Institute of Aeronautics)

A set of computation formulas of discrete cosine transform (DCT) for image data compression is given. The results of simulation experiment show that the formulas are correct and consistent with the formulas given by W. K. Pratt (1978), but they are different slightly in form.