基于高阶累积量的复数混合矩阵盲估计算法 [1]

倪晋平 * **　　马远良 *　　鄢社锋 *

*(西北工业大学声学工程研究所 西安 710072)
**(西安工业学院 西安 710032)

摘 要　该文针对两个传感器三个信号源的 (即 $M<N$) 盲信号分离问题，推导出了一种基于高阶累积量的复数混合矩阵盲估计算法. 提出的算法当信号源的个数大于传感器的个数时，成功实现通道参数的盲估计. 计算机仿真验证了算法的有效性.

关键词　盲信号分离，独立分量分析，高阶累积量
中图号　TN911.23

1 引 言

用 M 个传感器组成的阵列接收 N 个窄带远场平面波信号 $s_i(k)$，阵列在空间任意排列. 传感器同时接收背景噪声 $\boldsymbol{\Omega}(k)$，阵列的观测数据向量为

$$\boldsymbol{X}(k)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}(k)+\boldsymbol{\Omega}(k) \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为 $M\times N$ 混合矩阵，$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in \boldsymbol{C}^{M\times N}$ 为常系数矩阵，也称为通道矩阵，构成该矩阵的每一个列向量称为信号的方向向量. $\boldsymbol{S}(k)$ 是源信号向量，$\boldsymbol{\Omega}(k)$ 是高斯噪声向量. 盲源分离的目的是在 (1) 式中右端变量全部未知的条件下，仅从左端的观测数据估计出 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{S}(k)$. 由于盲源分离在雷达、声纳、地震、生物信号等领域有着巨大的应用潜力，90 年代以来，盲源分离问题吸引了众多研究者的兴趣，相继涌现了众多算法 [1−4]. 在不考虑传感器附加噪声的条件下，这些算法在 $M=N$ 的情况下具有很好的估计性能. 如果考虑噪声，在 $M>N$ 时，仍能得到较满意的分离结果 [5]. 但在 $M<N$ 的情况下大多数算法失效. 如果将附加噪声当作信号，则实际中遇到的都是 $M<N$ 的情况，也就是传感器的个数少于信号的个数. 因此“二分三”的问题，或者传感器数少于信源数的盲分离问题是盲源分离当前发展中亟需深入研究的一个重要问题.

为了解决上述问题，本文试图用信号和噪声高阶累积量的差异. 设噪声为高斯分布，信号为非高斯分布，则可利用高阶累积量处理我们面临的问题. 由于高斯噪声的高阶累积量等于零，采用高阶累积量进行盲源分离或盲波束形成 [6,7] 可大大增强抑制噪声的能力. 本文针对两个传感器接收两个以上信号这种典型情况，提出了一种基于高阶累积量的复数混合矩阵盲辨识算法，所提出的算法对混合矩阵没有特殊限制.

2 算 法

取 (1) 式中的传感器个数为 2，即 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2]^T$ (为简化省去公式中的 k)，源的个数为 N，则混合矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \end{bmatrix} \tag{2}$$

[1] 2001-07-12 收到，2002-05-10 定稿
国家自然基金资助的项目： 60072052

对信号和噪声作以下假设：(1) $\boldsymbol{S}$ 为 N 个窄带零均值非高斯复信号，其实部和虚部的方差相等，并具有非零的 $2r$ (r 为正整数) 阶累积量，故 $E\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^H\}=\boldsymbol{I}$, $E(\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^T)=0$; (2) $\boldsymbol{\Omega}$ 为零均值加性高斯噪声；(3) $\boldsymbol{S}$ 的各分量相互独立，并与 $\boldsymbol{\Omega}$ 相互独立；(4) 考虑到混合矩阵的可辨识性[8]，假定混合矩阵中各 $[a_{ij}]_{2\times 2}$ 子阵满秩.

由于对称概率密度函数零均值信号的奇阶累积量为零，本文仅需使用偶数阶的累积量. 依照文献 [9] L 阶累积量的公式为

$$\mathrm{cum}\{x_1,x_2,\cdots,x_L\}=\sum(-1)^{p-1}(p-1)!E\left\{\prod_{i\in t_1}x_i\right\}E\left\{\prod_{i\in t_2}x_i\right\}\cdots E\left\{\prod_{i\in t_p}x_i\right\} \tag{3}$$

(3) 式中的和式在整数集合 $(1,2,\cdots,n)$ 的所有分组 $(t_1,t_2,\cdots,t_p)$， $p=1,2,\cdots,n$ 中进行. 例如，对零均值信号的 4 阶累积量的公式为

$$\begin{aligned}\mathrm{cum}\{x_1,x_2,x_3,x_4\}=&E\{x_1x_2x_3x_4\}-E\{x_1x_2\}E\{x_3x_4\}\\&-E\{x_1x_3\}E\{x_2x_4\}-E\{x_1x_4\}E\{x_2x_3\}\end{aligned} \tag{4}$$

对复数信号的高阶累积量，考虑到其共轭对称性，采用以下四阶累积量公式

$$\mathrm{cum}\{x_1,x_2,x_3^*,x_4^*\} \tag{5}$$

将上式推广至 $2r$ 阶复数累积量，则有

$$\mathrm{cum}=\{\underbrace{x_1,\cdots,x_r}_{r},\ \underbrace{x_{r+1}^*,\cdots,x_{2r}^*}_{r}\} \tag{6}$$

本文采用以下复数累积量公式

$$q_{i,j}=\mathrm{cum}\{\underbrace{x_1,\cdots,x_1}_{r-i},\ \underbrace{x_2,\cdots,x_2}_{i},\ \underbrace{x_1^*,\cdots,x_1^*}_{r-j},\ \underbrace{x_2^*,\cdots,x_2^*}_{j}\},\qquad i,j=0,1,\cdots,r \tag{7}$$

按 (7) 式定义 $\boldsymbol{X}$ 的 $2r$ 阶累积量矩阵：

$$\boldsymbol{C}_{2rx}=\begin{bmatrix}q_{0,0}&q_{0,1}&\cdots&q_{0,r}\\q_{0,1}&q_{0,2}&\cdots&q_{1,r}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\q_{0,r}&q_{1,r}&\cdots&q_{r,r}\end{bmatrix} \tag{8}$$

将 (1) 式代入 (7) 式，有

$$q_{i,j}=\mathrm{cum}\{B_1B_2B_3B_4\} \tag{9}$$

式中

$$B_1 = \left(\sum_{l_1=1}^{N} a_{1l_1} s_{l_1} + \Omega_1\right) \cdots \left(\sum_{l_{r-i}=1}^{N} a_{1l_{1r-i}} s_{l_{1r-i}} + \Omega_1\right)$$

$$B_2 = \left(\sum_{l_{r-i+1}=1}^{N} a_{2l_{1r-i+1}} s_{l_{1r-i+1}} + \Omega_2\right) \cdots \left(\sum_{l_r=1}^{N} a_{2l_r} s_{l_r} + \Omega_2\right)$$

$$B_3 = \left(\sum_{l_{r+1}=1}^{N} a^*_{1l_{r+1}} s^*_{l_{r+1}} + \Omega^*_1\right) \cdots \left(\sum_{l_{2r-j}=1}^{N} a^*_{1l_{2r-j}} s^*_{l_{2r-j}} + \Omega^*_1\right)$$

$$B_4 = \left(\sum_{l_{2r-j+1}=1}^{N} a^*_{2l_{2r-j+1}} s^*_{l_{2r-j+1}} + \Omega^*_2\right) \cdots \left(\sum_{l_{2r}=1}^{N} a^*_{2l_{2r}} s^*_{l_{2r}} + \Omega^*_2\right)$$

令 $C_{s_j} = [\underbrace{s_j, \cdots, s_j}_{r}, \underbrace{s^*_j, \cdots, s^*_j}_{r}]$, $j = 1, 2, \cdots, N$, 考虑到附加噪声的高斯性，信号为零均值，并且相互独立，则互累积量为零， (7) 式可简化为

$$q_{i,j} = \sum_{j=1}^{N} a_{1j}^{r-i} a_{2j}^{i} (a^*_{1j})^{r-j} (a^*_{2j})^{j} C_{s_j} \tag{10}$$

据此， (8) 式可以写为

$$\boldsymbol{C}_{2rx} = \boldsymbol{H}_r \boldsymbol{C}_s \boldsymbol{H}_r^H \tag{11}$$

式中

$$\boldsymbol{H}_r = \begin{bmatrix} a_{11}^r & a_{12}^r & \cdots & a_{1N}^r \\ a_{11}^{r-1} a_{21} & a_{12}^{r-1} a_{22} & \cdots & a_{1N}^{r-1} a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{21}^r & a_{22}^r & \cdots & a_{2N}^r \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}_s = \mathrm{diag}(C_{s_1}, \cdots, C_{s_N}) \tag{12}$$

由于盲分离问题固有的模糊性，即估计出的混合矩阵 $\hat{A}$ 与真正的矩阵相比，元素在幅度上存在比例因子，在位置上存在置换，令

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P} \tag{13}$$

则 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为任意非奇异的对角阵，$\boldsymbol{P}$ 为置换矩阵。不失一般性，假设 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(a_{11}^{-1}, a_{12}^{-1}, \cdots, a_{1N}^{-1})$，令 $\hat{\boldsymbol{H}}_r = \boldsymbol{H}_r(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P})^r$, $\hat{\boldsymbol{C}}_s = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda})^{-r} \boldsymbol{C}_s (\boldsymbol{\Lambda}^H \boldsymbol{P}^H)^{-r}$, 则

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N \end{bmatrix}, \qquad a_i = a_{2i}/a_{1i} \tag{14}$$

$$\hat{\boldsymbol{H}}_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_N^r \end{bmatrix} \tag{15}$$

$\hat{\boldsymbol{H}}_r$ 为 Vandermonde 矩阵，$\hat{\boldsymbol{H}}_r \in C^{(r+1)\times N}$．又因为 Vandermonde 矩阵的元素是一元多项式的根，考虑以下多项式：

$$a^N - y_{N-1}a^{N-1} - \cdots - y_1 a - y_0 = 0 \tag{16}$$

其不同的根为 $a_i, i = 1, 2, \cdots, N$，写成矩阵形式为

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{N-1}^T \boldsymbol{Y}_N = \boldsymbol{K}_N \tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{Y}_N = [y_0 \quad y_1 \quad \cdots \quad y_{N-1}]^T, \boldsymbol{K}_N = [a_1^N \quad a_2^N \quad \cdots \quad a_N^N]^T$．(17) 式两边乘以 $\hat{\boldsymbol{H}}_{2r-N}^* \hat{\boldsymbol{C}}_s$，得

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{2r-N}^* \hat{\boldsymbol{C}}_s \hat{\boldsymbol{H}}_{N-1}^T \boldsymbol{Y}_N = \hat{\boldsymbol{H}}_{2r-N}^* \hat{\boldsymbol{C}}_s \boldsymbol{K}_N, \qquad \text{即} \ \boldsymbol{Q}_N \boldsymbol{Y}_N = \boldsymbol{C}_N \tag{18}$$

式中

$$\boldsymbol{Q}_N = \begin{bmatrix} q_{0,0} & q_{1,0} & \cdots & q_{N-1,0} \\ q_{0,1} & q_{1,1} & \cdots & q_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{0,2r-N} & q_{1,2r-N} & \cdots & q_{N-1,2r-N} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}_N = \begin{bmatrix} q_{N,0} \\ q_{N,1} \\ \vdots \\ q_{N,2r-N} \end{bmatrix} \tag{19}$$

$\boldsymbol{Q}_N$ 和 $\boldsymbol{C}_N$ 已知，从 (18) 式便可以解出多项式的系数 $\boldsymbol{Y}_N$．最后，求解多项式的根，求得 a_i．依据 $\boldsymbol{C}_{2rx}$ 的秩可以估计信号的个数 [4]．

提出的算法详细步骤如下：

(1) 依 $\boldsymbol{X}$ 估计 $\hat{C}_{2rx}$；

(2) 如果 $\text{rank}(\hat{C}_{2rx}) < r+1$，则信号个数 $N = \text{rank}(\hat{C}_{2rx})$；否则 r 加 1，重复第 (1) 步；

(3) 求解 (18) 式，$\hat{\boldsymbol{Y}}_N = \hat{\boldsymbol{Q}}_N^+ \hat{\boldsymbol{C}}_N$，式中 $\boldsymbol{Q}_N^+$ 是 $\hat{\boldsymbol{Q}}_N$ 的 Moore-Penrose 广义逆．

(4) 求解 (16) 式的根，得到 $\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \cdots & \hat{a}_N \end{bmatrix}$，$\hat{a}_i, i = 1, 2, \cdots, N$ 是 (16) 式的根．估计的 $\hat{a}_i$ 在次序上可能与真值 a_i 有所不同．

3 仿真结果

分别在 $N = 2, 3$ 的条件下，用仿真数据验证算法的有效性．令 $\boldsymbol{PI} = \hat{\boldsymbol{A}}^+ \boldsymbol{A}$，理想条件下，$PI$ 接近置换矩阵．采用下式作为估计误差的度量

$$e(\boldsymbol{PI}) = \sum_i \left(\sum_j \frac{|\boldsymbol{PI}_{ij}|}{\max_k(|\boldsymbol{PI}_{ik}|)} - 1 \right) + \sum_j \left(\sum_i \frac{|\boldsymbol{PI}_{ij}|}{\max_k(|\boldsymbol{PI}_{kj}|)} - 1 \right)$$

若 $e(\boldsymbol{PI}) = 0$，则 $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{PA}$，该值愈大，说明 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相差较大．采用三个实验信号，其实数表达式为

$$s_1 = \sin(300t) + 6\cos(61t); \qquad s_2 = \sin(800t)\cos(60t); \qquad s_3 = \sin(90t)$$

附加噪声 $\Omega_i = \text{randn}(LL), i = 1, 2, LL$ 为信号的长度，Ω_i 为高斯分布的白噪声，功率相同．信号和噪声 Ω_i 均进行功率归一化处理，最终形成的噪声乘以给定的功率系数，以形成所需要的 SNR，采样频率 F_S=2kHz．SNR 为信号与噪声功率之比．最终记录结果为多次实验结果的平均．

实验 1 $N=2$，信号采用 s_1 和 s_3．混合矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1.6+i1.6 & 0.8-i0.6\end{bmatrix}$．表 1 为在不同信号长度和不同 SNR 下算法的计算结果，表中 $\hat{\boldsymbol{A}}=[\hat{a}_1,\hat{a}_2]^T$，省去了元素 1．

表 1　2 个传感器 2 个信号情况下的实验结果

LL	SNR=0dB		SNR=5dB		SNR=15dB	
	$\hat{\boldsymbol{A}}$	e	$\hat{\boldsymbol{A}}$	e	$\hat{\boldsymbol{A}}$	e
1600	1.5259+i1.5008	0.3927	1.5252+i1.4917	0.2125	1.5069+i1.5007	0.2011
	0.8152−i0.5672		0.8392−i0.5040		0.8760−i0.5056	
2400	1.5600+i1.5927	0.2748	1.5577+i1.5581	0.1927	1.5655+i1.5521	0.1453
	0.8730−i0.4977		0.9128−i0.5862		0.8867−i0.6078	
4000	1.5732+i1.5971	0.2459	1.5646+i1.6145	0.1037	1.5415+i1.6077	0.0726
	0.7880−i0.5655		0.8346−i0.6044		0.8394−i0.6041	
6400	1.5179+i1.6088	0.1540	1.4958+i1.5928	0.0722	1.5049+i1.5874	0.0358
	0.7912−i0.6022		0.8129−i0.5788		0.8125−i0.5807	

实验 2 $N=3$，信号采用 s_1, s_2 和 s_3，混合矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0.6-i0.6 & 0.8+i0.4 & 0.9+i0.9\end{bmatrix}$$

表 2 为不同信号长度、不同 SNR 下算法的计算结果，表中 $\hat{\boldsymbol{A}}=[\hat{a}_1\quad \hat{a}_2\quad \hat{a}_3]^T$，省去了元素 1, $\boldsymbol{PI}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{A}}^+$．

表 2　2 个传感器 3 个信号情况下的实验结果

LL	SNR=15dB		SNR=20dB		SNR=30dB	
	$\hat{\boldsymbol{A}}$	e	$\hat{\boldsymbol{A}}$	e	$\hat{\boldsymbol{A}}$	e
8000	0.7881+i0.4305	0.9701	0.6521−i0.1404	0.8706	0.5643−i0.5950	0.7097
	0.6905−i0.2154		0.7650+i0.4812		0.8530+i0.9338	
	0.4144+i0.1046		0.7166+i0.2426		0.7055+i0.2496	
16000	0.6295−i0.3045	0.8990	0.5760−i0.6041	0.7197	0.5743−i0.6032	0.6539
	0.8026+i0.6058		0.8604+i0.9114		0.8566+i0.9134	
	0.1942+i0.5426		0.3620+i0.5619		0.4025+i0.5772	
50000	0.5933−i0.5995	0.3355	0.5946−i0.5998	0.3208	0.5955−i0.5999	0.3145
	0.8587+i0.9170		0.8762+i0.9229		0.8817+i0.9172	
	0.7382+i0.6554		0.7665+i0.6231		0.7613+i0.6093	

从实验结果可以看出，本文提出的算法可以有效地估计复数混合矩阵．在高 SNR 和长数据样本条件下，估计误差小；当 SNR 降低时，估计误差增大；数据样本减小时，估计误差也增大，增大的原因可能是由于高阶累积量估计误差增大造成．对 $N=2$ 的情况，混合矩阵的估计值与真值很接近，对 $N=3$ 的情况，混合矩阵的估计误差较大，原因是在仿真实验中所采用的六阶累积量估计方法，其估计误差比四阶累积量估计误差大．

4 结　论

本文基于高阶累积量推导出一种复数盲估计算法，应用于信源个数大于传感器个数时实现复数混合矩阵的盲估计．以两个传感器三个信号源这一典型情况为例，导出了复数的盲辨识算法，用以进行复数混合矩阵的盲估计．所提出的算法可用于被动声纳，实现阵列流行盲估计，并进而依据混合矩阵的估计实现对信号的波形估计．对于两个传感器的情况分别用 2 个和 3 个信号源进行了仿真，仿真结果验证了算法的有效性．将所述算法推广至 $N>2$ 的情况还需进一步研究．

参 考 文 献

[1] J. F. Cardoso, B. H. Laheld, Equivariant adaptive source separation, IEEE Trans. on Signal Processing, 1996, 44(11), 3017–3030.

[2] E. Bingham, A. Hyvarinen, A fast fixed-point algorithm for independent component analysis of complex valued signals, Int. J. of Neural Systems, 2000, 10(1), 1–8.

[3] J. Karhunen, E. Oja, Liuyue Wang, R. Vigario, J. Joutsensalo, A class of neural networks for independent component analysis, IEEE Trans. on Neural Networks, 1997, 8(3), 486–504.

[4] H. H. Yang, S-I, Amari Adaptive online learning algorithms for blind separation maximum entropy and minimum mutual information, Neural Computation, 1997, 9(7), 1457–1482.

[5] 倪晋平，马远良，孙超，童立，用独立成分分析算法盲分离水声信号，声学学报，2002, 27(4), 321–326.

[6] Ding Zhi, Nguyen Tuan, Stationary points of a kurtosis maximization algorithm for blind signal separation and antenna beamforming, IEEE Trans. on Signal Processing, 2000, 48(6), 1587–1596.

[7] S. Shamsunder, G. B. Giannakis, Modeling of non-Gaussian array data using cumulants: DOA estimation of more sources with less sensors, Signal Proceesing, 1993, 30(2), 279–297.

[8] Lai Wai-Kuen, Ching P-C, A novel blind estimation algorithm[J], IEEE Trans. on Signal Processing, 1997, 45(7), 1763–1769.

[9] J. M. Mendel, Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: theorectical results and some applications, Proc. IEEE, 1991, 79(3), 278–305.

BLIND ESTIMATION ALGORITHM FOR COMPLEX MIXED MATRIX BASED ON HIGHER-ORDER CUMULANTS

Ni Jinping* ** Ma Yuanliang* Yan Shefeng*

*(*Institute of Acoustics Eng., Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an* 710072, *China*)

**(*Xi'an Institute of Technology, Xi'an* 710032, *China*)

Abstract Based on higher-order cumulants, the blind estimation of complex mixed matrix for the difficult case of 2 sensors and 3 sources is addressed. When the number of source signals is greater than or equal to the number of sensors, the proposed algorithm can successfully estimate the channel matrix. The performance of the algorithm is evaluated by computer simulation.

Key words Blind signal separation, Independent component analysis, Higher-order cumulant

倪晋平： 男，1965 年生，博士生，副教授，主要研究领域为盲信号处理，阵列信号处理.

马远良： 男，1938 年生，教授，博士生导师，研究方向为水声信号处理.

鄢社锋： 男，1978 年生，博士生，研究方向为阵列信号处理.