

短时傅里叶变换和拟 Wigner 分布最佳窗函数¹

马长征 张守宏 焦李成

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要 短时傅里叶变换和拟 Wigner 分布是应用最广泛的两种时频分析工具, 其窗函数的选择是其应用的前提, 对此仍有待深入研究. 本文详细研究了其窗函数的选取准则, 给出了在最佳频率分辨率意义上的最佳窗函数.

关键词 短时傅里叶变换, 拟 Wigner 分布, 时频分布, 最佳频率分辨率, 最佳窗函数

中图分类号 TN911.7

1 引 言

时频分析同时在时域和频域描述信号, 这种描述方法在处理时变、非平稳信号例如语声、音乐、雷达、声纳、时变信道上的通信等方面有较大的应用潜力^[1]. 常见的时频分析方法有基于线性处理的短时傅里叶变换 (STFT)、小波变换 (WT)、调频子变换 (Chirplet Transform)^[2]、基于非线性处理的二次型 Cohen 类时频分布、高阶时频分布和依赖于信号的自适应时频分布^[3]等. 实际上线性方法本质上是直接利用分析信号和参考信号匹配的一种分析方法, 而非线性处理方法则是首先利用了信号内部本身的内在机制然后再和参考信号匹配的一种分析方法. 线性化处理的主要优点是其理论和应用的简单性, 但传统 STFT 的时频分辨率较低, 要得到好的时频分辨性能, 应用调频子变换运算量相对较大^[2]. 而二次型和高阶时频分布具有较高的频率分辨性能, 但存在信号间的交叉项, 去交叉的平滑技术是以降低其分辨性能为代价的. J.C.Andrieux, 等提出最优光滑 Wigner-Ville 分布, 其实是寻求最佳窗长和最佳窗调频率的谱图分布 (STFT 的模平方)^[4]. 事实上, STFT 如果窗函数选得与信号匹配且窗长选得恰当则可具有很高的频率分辨性能. 文献 [5] 证明了当信号为线性调频信号时, 窗函数的频宽大概等于信号的调频率的平方根. 在某些应用, 例如雷达信号处理中有时信号的频率分辨率是很重要的, 但并不是处理的信号越长频率分辨率越高. 本文讨论了对于一般非平稳信号, 得到最佳频率分辨率 STFT 窗函数的选择准则, 它在概念上比文献 [2,4] 更加清晰, 结论更加一般. Wigner 分布对线性调频信号具有最高的频率分辨率, 但对其它信号则不然. 加窗的 Wigner 分布称为拟 Wigner 分布, 窗函数的相位和长度也影响频率分辨性能, 我们也讨论了拟 Wigner 分布的最佳窗选择问题.

2 短时傅里叶变换最佳窗函数

STFT 的目的是求信号的瞬时谱, 一般定义为

$$\text{STFT}_s(t, f) = \exp(-j2\pi ft) \int s(t + \tau)\omega(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \quad (1)$$

¹ 1997-10-16 收到, 1998-10-02 定稿
国防预研基金和国家“863”高技术资助项目

其中 $\omega(\tau)$ 为低通窗函数。一般情况下 $\omega(\tau)$ 取为对称的实函数。STFT 的物理意义可解释为带通滤波器组或 $s(t)$ 在 $\omega(\tau)$ 的时、频移上的投影。调频子变换实质为窗函数取复数的 STFT，窗函数的相位是关于时延 τ 的二次多项式，其窗函数为

$$\omega(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{\tau}{\sigma}\right]^2\right] \exp(-j2\pi\mu\tau^2),$$

其中 σ 和 μ 均为可变参数。一般情况下窗函数和时间有关，此时把 $\omega(\tau)$ 由 $\omega(t, \tau)$ 代替。令 $\omega(t, \tau) = A(t, \tau) \exp(-j2\pi\phi(t, \tau))$ ，设 $s(t) = \exp(j2\pi\varphi(t))$ ，则有

$$\begin{aligned} \text{STFT}_s(t, f) &= \exp(-j2\pi ft) \int \exp(j2\pi\varphi(t+\tau)) A(t, \tau) \exp(-j2\pi\phi(t, \tau)) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \exp(-j2\pi ft) \int A(t, \tau) \exp\left[j2\pi\left[\varphi(t) + \varphi'(t)\tau + \frac{1}{2}\varphi''(t)\tau^2 + \dots\right]\right] \\ &\quad \times \exp(-j2\pi\phi(t, \tau)) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \end{aligned}$$

若 $\phi(t, \tau) = (1/2)\varphi''(t)\tau^2 + \dots$ ，则上式变为

$$\text{STFE}_s(t, f) = \exp(-j2\pi ft) \exp(j2\pi\varphi(t)) \text{FT}(A(t, \tau)) * \delta(f - \varphi(t)). \quad (2)$$

特别当 $\phi(t, \tau) = (1/2)\varphi''(t)\tau^2$ 时，上式和调频子变换类似。由此我们看到对于 STFT 变换，要想得到好的频率分辨率，就要消去 $s(t)$ 中相位固有的高阶项，若消不掉必定引起频谱展宽，频率分辨率降低。由 Weierstrass 定理，任何有限时宽的连续函数均可以由多项式任意逼近。传统 STFT 相当于在一段时间内由常数来近似瞬时频率，实际上由多项式来近似瞬时频率近似误差会更小。多项式常数项由 $\varphi(-j2\pi f\tau)$ 中的频率来提供，高阶项由窗函数的频率来提供。为方便起见，多项式阶数为 n 时的 STFT 称为 n 阶 STFT。多项式的系数作为变量可由作 STFT 搜索得到。对于固定的多项式阶数，时宽越窄逼近性能越好，频率近似误差越小，但有限长傅里叶变换 (FT) 引起的频谱展宽越大。反之时宽越宽，逼近性能越差，频率近似误差越大，但有限长 FT 引起的频谱展宽变小。因为总频谱展宽为二者的总和，故存在一个最佳时宽使得两者引起的总体频谱展宽最小。下面我们给出最佳时宽的一个定理。

引理 1^[6] 设 $\varphi(t)$ 是在 $[a, b]$ 内具有 $n+1$ 阶导数的连续函数，则在 $[a, b]$ 内用 n 次多项式来最佳逼近 $\varphi(t)$ 其误差为

$$E_n(\varphi) \leq \frac{2M}{(n+1)!} \left[\frac{b-a}{4}\right]^{n+1}, \quad (3)$$

其中 $\|\varphi^{n+1}(t)\| \leq M, t \in [a, b]$ 。

定理 1 对于信号 $s(t) = \exp(j2\pi\varphi(t))$ ，若 $\varphi(t)$ 光滑但非 $n+1$ 次多项式，在 $[t-T/2, t+T/2]$ 内对 $s(t)$ 作 n 阶 STFT，则最佳时宽：

$$T = \sqrt[n+2]{4^n n! / M}, \quad (4)$$

其中 $M = \max_{t' \in [t-T/2, t+T/2]} |\varphi^{n+2}(t')|$ 。

证明 因信号 $(t+\tau)$ 的瞬时频率为 $\varphi'(t+\tau)$ ， $\omega(t, \tau)$ 的瞬时频率为 n 次多项式，由引理 1， $\omega(t, \tau)$ 对 $\varphi'(t+\tau)$ 的最佳近似误差为

$$E_n(\varphi') = \frac{2M}{(n+1)!} \left[\frac{T}{4} \right]^{n+1}, \quad (5)$$

因 $\varphi'(t+\tau)$ 非 n 次多项式, (5) 式取成等号. 而长度为 T 的方波的 FT 的频谱宽度为 $1/T$, 故总频谱展宽:

$$W(T) = 2E_n(\varphi') + 1/T = [4M/(n+1)!] (T/4)^{n+1} + 1/T, \quad (6)$$

由 $\partial W(T)/\partial T = 0$ 得 $(M/n!)(T/4)^n - 1/T^2 = 0$, 解方程得: $T = \sqrt[n+2]{4^{n+1}n!/M}$. 此时 $W(T)$ 取得最小值.

上述定理中的 M 因是依赖于 T 的, 故上式只能说是最佳窗长应满足的关系式, 只有当 M 为已知常数或近似常数时才能由上式求出最佳窗长. 图 1 给出不同 M 时 1 阶 STFT 频谱展宽和窗长 T 的关系, 可以看到在最佳窗长的附近 (曲线的凹点), 函数较平, 即此时也可以得到较好的频率分辨率, 但当远离最佳窗长时, 就只能得到较差的频率分辨率.

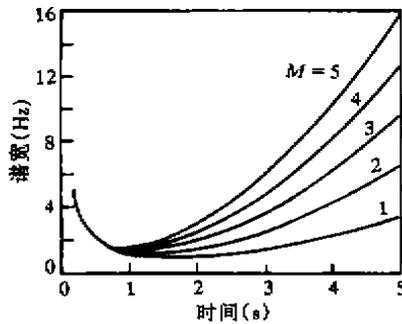


图 1 一阶短时傅里叶变换频谱展宽随窗长 T 的变化

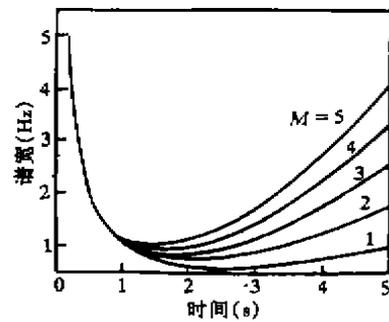


图 2 拟 wigner 分布频谱展宽随窗长 T 的变化

特例: 当 $n=0$ 时, 即常规 STFT, 分析信号为线性调频信号, $\varphi(t) = \omega_0 t + (1/2)\mu t^2$, 最佳窗长 $T = \sqrt{1/\mu}$, 与文献 [5] 的结论一致.

当 $n=1$ 时, 即文献 [2] 的调频子变换, 设信号为二次调频信号, $\varphi(t) = \omega_0 t + (1/2)\mu t^2 + (1/3!)kt^3$ 则 $M=k$, 最佳窗长 $T = \sqrt[3]{4/k}$.

3 拟 Wigner 分布近似最佳窗长和调频窗拟 Wigner 分布

二次型 Cohen 类时频分布是应用最广泛的一类时频分布, 可以看成是 Wigner 分布的光滑化. Wigner 分布具有良好的数学性质, 对其已经有很多讨论, 一般计算时只能取一段数据, 对 Wigner 分布加窗称其为拟 Wigner 分布:

$$W(t, f) = \int \omega(\tau) s \left[t + \frac{\tau}{2} \right] s^* \left[t - \frac{\tau}{2} \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (7)$$

对于拟 Wigner 分布还没有人讨论其窗函数的选取准则, 与上面的推导类似, 我们可得到拟 Wigner 分布近似最佳窗长.

设 $s(t) = \exp(j2\pi\varphi(t))$, 则 $s(t + \tau/2)s^*(t - \tau/2) = \exp[j2\pi(\varphi(t + \tau/2) - \varphi(t - \tau/2))]$. 利用 Taylor 展式得 $\varphi(t + \tau/2) - \varphi(t - \tau/2) = \varphi'(t)\tau + (2/3!)\varphi^{(3)}(t)(\tau/2)^3 + \dots$. 对 $s(t + \tau/2)s^*(t - \tau/2)$ 关于 τ 作 FT, 相当于用常数来近似 $\varphi'(t) + (1/8)\varphi^{(3)}(t)\tau^2 + \dots$. 在一小段时间 T 内关于 τ 的高阶项可省掉, 则相当于用常数去近似 $\varphi'(t) + (1/8)\varphi^{(3)}(t)\tau^2$, 近似误差: $E_0(f) = (1/4)|\varphi^{(3)}(t)|(T/4)^2$. 与定理 1 类似可证当 $T = 2\sqrt[3]{2}/\sqrt[3]{|\varphi^{(3)}(t)|}$ 时 $2E_0(f) + 1/T$ 取得最小值, 故拟 Wigner 分布近似最佳窗长:

$$T = 2\sqrt[3]{2}/\sqrt[3]{|\varphi^{(3)}(t)|}. \quad (8)$$

图 2 给出不同 $|\varphi^{(3)}(t)|$ 时拟 Wigner 分布频谱展宽和窗长 T 的函数关系, 与 1 阶 STFT 时的情况类似. 但对同样的窗长, 一般情况下, 对于慢变信号拟 Wigner 分布频谱展宽比 1 阶 STFT 频谱展宽要小.

同时可见, 当作 FT 时把 $(2/3!)\varphi^{(3)}(t)(\tau/2)^3$ 消掉, 可以得到更好的频率分辨率. 故我们可以利用具有二次调频项的窗函数, 其相位为 $-2\pi(2/3!)\varphi^{(3)}(t)(\tau/2)^3$, 称其为具有二次调频窗的拟 Wigner 分布. 当然因 $\varphi^{(3)}(t)$ 是不知道的, 我们需要对参数进行搜索.

应当指出, 上面的结论不仅对模 1 信号成立, 对具有慢变包络的信号如 $s(t) = A_s(t)\exp(j2\pi\varphi(t))$ 也近似成立. 因为慢变包络的谱展宽相对窗的谱展宽和多项式近似的误差来说是小量, 可以忽略.

4 仿真结果

我们利用二次调频信号来验证本文的结论. 设 $s(t)$ 的幅度为常数, 相位:

$$2\pi\varphi(t) = 2\pi(a_0 + a_1t + (1/2)a_2t^2 + (1/3!)a_3t^3),$$

则瞬时频率 $f(t) = \varphi'(t) = a_1 + a_2t + (1/2)a_3t^2$. 对于 1 阶 STFT 其最佳调频斜率 $\mu = a_2 + a_3t$, 最佳窗长 $T = \sqrt[3]{4/a_3}$. 对于拟 Wigner 分布其最佳窗长为 $T = 2\sqrt[3]{2/a_3}$. 由此我们看到对于二次调频信号, 最佳窗长拟 Wigner 分布比最佳窗长的 1 阶 STFT 具有更好的频率分辨率. 我们取 $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 8$, $t \in [0, 4]$, 图 3,4 分别给出了不同窗长的 STFT 和拟 Wigner 分布的等高线图, 其中图 3(b), 图 4(b) 为最佳窗长时的分布. 从图中可以看到取最佳窗长的时频分布具有最高的频率分辨率. 图 5 为具有二次调频窗的拟 Wigner 分布, 也可以看到, 因二次调频窗的拟 Wigner 分布消掉了相位的三次项, 其频率分辨率完全由窗长决定, 窗长越长, 频率分辨率越高, 且同等窗长时比拟 Wigner 分布具有较高的频率分辨率.

5 结 论

本文在讨论了 STFT 的一般概念的基础上, 给出了 STFT 和拟 Wigner 分布的最佳窗长, 提出了具有二次调频窗的拟 Wigner 分布的概念. 对于分析的具体信号, 因参数是未知的, 需在最佳频率分辨率准则下对窗参数进行搜索.

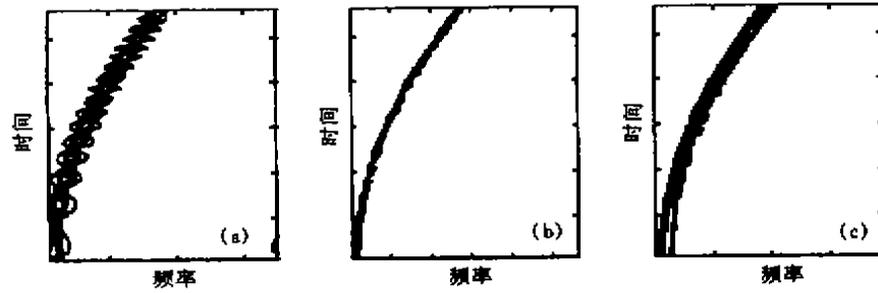


图 3 一阶短时富里叶变换 (a) $T=0.2381$, (b) $T=0.7937$, (c) $T=2.7937$

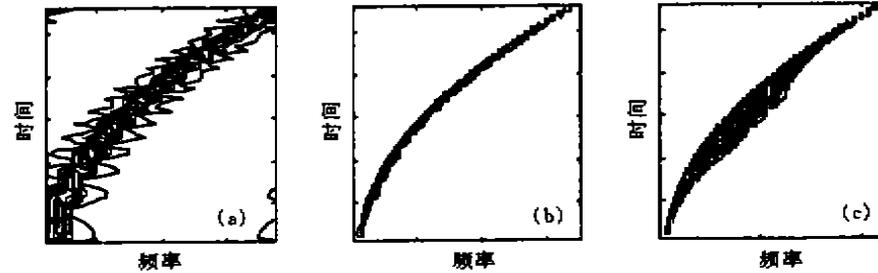


图 4 拟 wigner 分布 (a) $T=0.1260$, (b) $T=1.260$, (c) $T=3.260$

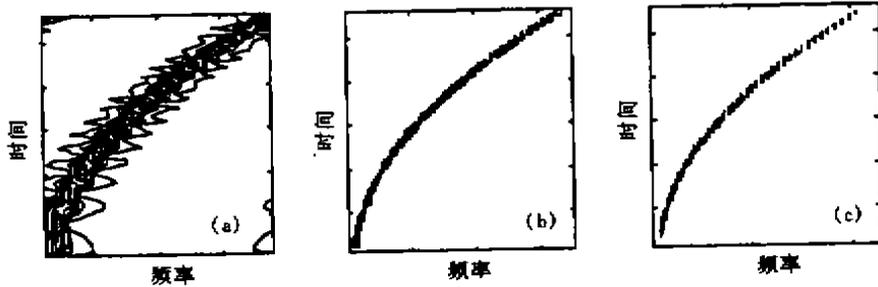


图 5 二次调频拟 wigner 分布 (a) $T=0.1260$, (b) $T=1.260$, (c) $T=3.260$

参 考 文 献

- [1] Cohen L. Time-frequency distribution: A review. Proc. IEEE, 1989, 77(7): 941-981.
- [2] Mann S, Haykin S. The chirplet transform: Physical considerations. IEEE Trans. on. SP, 1995, 43(11): 2745-2761.
- [3] Jone D L, Parks T W. A high resolution data-adaptive time-frequency representation, IEEE Trans. on ASSP, 1990, ASSP-38(12): 2127-2135.
- [4] Andrieux J C, Feix M R, Mourgues G, Bertrand P, Izrar B, Nguyen V T. Optimal smoothing of the Wigner-Ville distribution, IEEE Trans. on ASSP, 1987, ASSP-35(6): 764-769.
- [5] Barber N F, Ursell F. The response of a resonant system to a gliding tone. Phili. Mag. 1948, 39(1): 345-361.
- [6] Dahlquist G 著, 包雪松译. 数值方法. 高等教育出版社. 1990, 140.

- [7] Boashash B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal, Part 1: Fundamentals and Part 2: Algorithms and applications. Proc. IEEE, 1992, 80(4): 520-538, 540-568.
- [8] 孙晓兵. 非平稳信号的时频分析方法及其应用. [博士学位论文]. 西安: 西安电子科技大学, 1996.

THE OPTIMAL WINDOW FUNCTIONS OF SHORT TIME FOURIER TRANSFORM AND PSEUDO-WIGNER DISTRIBUTION

Ma Changzheng Zhang Shouhong Jiao Licheng

(Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract Short time Fourier transform and pseudo-Wigner distribution are two most useful tools in time-frequency analysis, the choice of window functions is the base for their applications, which require deep study. The criteria of window functions are discussed in detail, and the optimal length of window is obtained by means of optimal frequency resolutions.

Key words STFT, Pseudo-Wigner distribution, Time-frequency distribution, Optimal frequency resolution, Optimal window function

- 马长征: 男, 1967年生, 讲师, 主要从事时频分布、雷达成像、阵列信号处理等方面的研究工作.
- 张守宏: 男, 1938年生, 教授, 博士生导师, 主要从事时频分布、雷达成像、阵列信号处理、高分辨信号处理等方面的研究工作.
- 焦李成: 男, 1959年生, 教授, 博士生导师, 主要从事智能与非线性信号与图像处理的研究工作.