

# 沿轴线方向测量高阶 Volterra 核\*

张平 宋亚民

(北京邮电学院电信工程系 北京 100088)

**摘要** 本文给出沿轴线方向测量非线性电路和系统 Volterra 前三阶核的快速有效方法。这是作者们以前工作(1990)的续篇。引用以前工作的结果,并在输入信号中加入直流项,可以得到非线性系统在轴线上的高阶核  $H_2(j\omega, 0)$ ,  $H_3(j\omega, 0, 0)$ ,  $H_3(j\omega_1, j\omega_2, 0)$  等。

**关键词** 非线性系统,非线性系统建模, Volterra 级数,离散傅里叶变换

## 1 引言

应用 Volterra 泛函级数理论处理工程领域里的非线性问题已有悠久的历史。在过去十几年里,讨论非线性系统的文献数量一直在增长。在众多的文献中,不难看到 Volterra 级数似乎成为一个广泛接受的处理问题的工具。这主要在于 Volterra 级数有以下几个特点:它可以给出输入/输出(I/O)关系的解析表达式;它是线性系统理论概念的一般化;它还允许随机信号。

在电路理论中,采用 Volterra 级数方法对非线性网络进行分析,其基本前提是必须有确定的非线性模型,即网络 Volterra 核的函数型式。然而由于现存的非线性器件模型十分有限,其模型的优劣也有待于验证;另外,大多数实际电路固有的非线性特性及其物理方法造型的困难等原因,使得以 Volterra 方法为基础的非线性电路理论研究进展十分缓慢,应用也有限。因此网络 Volterra 核的实际测量、造型自然成为重点要做的工作。直到80年代初,求解 Volterra 核的问题仍然是用相关分析和依据系统微分方程的方法。

应用特殊的多频正弦信号激励系统,通过测量系统的稳态响应和做相应的频谱分析,可以得到系统的 Volterra 核<sup>[1-6]</sup>。这项工作的部分意义在于可以仅仅根据 I/O 测量来辨识非线性动态系统属于那种结构,从而将非线性动态“黑箱”系统的建模建立在实验的基础上<sup>[7,8]</sup>。已经知道,沿轴线方向的 Volterra 核含有系统内部结构较丰富的信息。本文给出这一过程的有效方法。这是文献[3~6]的推广和完善。

1992-12-14 收到,1993-08-03 定稿

\* 国家自然科学基金资助课题

张平 男,1959年生,博士,副教授,目前的主要研究兴趣为非线性电路和系统建模、数字信号处理、个人通信系统(PCN)、扩频通信技术等。

宋亚民 男,1928年生,教授,目前的主要研究兴趣为非线性电路、系统建模和仿真、个人通信系统(PCN)、扩频通信技术等。

## 2 测量分析和方法

任何一个可展开为 Volterra 级数的非线性动态系统在多频率正弦信号激励下的离散频率域模型由(1)式给出<sup>[3,4]</sup>:

$$Y(m) = H_1(m)U(m) + N^{-1} \sum_{\substack{m_1, m_2=1 \\ m_1+m_2=m}}^{N-1} H_2(m_1, m_2)U(m_1)U(m_2) \\ + N^{-2} \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3=1 \\ m_1+m_2+m_3=m}}^{N-1} H_3(m_1, m_2, m_3)U(m_1)U(m_2)U(m_3) + \dots, \quad (1)$$

式中大写的  $Y, U, H$  分别代表系统的响应和输入信号的离散傅里叶变换和系统的 Volterra 核。

在(1)式中, 我们隐含地规定了输入信号无直流分量, 即  $U(0) = 0$ 。在沿轴线方向测量 Volterra 核时, 我们须要取消这个限制。这样(1)式的模型将会变为(2)式的形式。

$$Y(m) = U(m)[H_1(m) + 2H_2(m, 0)U(0) + 3H_3(m, 0, 0)U^2(0) + \dots \\ + LH_L(m, 0, \dots, 0)U^{L-1}(0) + \dots] \\ + N^{-1} \sum_{\substack{m_1, m_2=1 \\ m_1+m_2=m}}^{N-1} U(m_1)U(m_2)[H_2(m_1, m_2) + 3H_3(m_1, m_2, 0)U(0) \\ + (L!/2)H_L(m_1, m_2, 0, \dots, 0)U^{L-1}(0)] + \dots. \quad (2)$$

在文献[3,4]中, 给出了测量频率域非轴线方向的 Volterra 核  $H_1(m)$ ,  $H_2(m_1, m_2)$ ,  $H_3(m_1, m_2, m_3)$  ( $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq 0$ ) 的算法。该算法的特点是选择两个相互互质的奇整数  $p$  和  $q$ , 并由此两数生成第三个整数  $r$ 。由这三个数为基本频率分量而组成一个频率集合  $S$ ,  $S$  分为三个互异的子集  $A, B, C$ , 分别是

$$A = \{1p, 3p, \dots, \text{odd}(q)p\}, \\ B = \{1q, 3q, \dots, \text{odd}(p)q\}, \\ C = \{r\};$$

其中

$$\text{odd}(p) = p - 2, \\ \text{odd}(q) = \begin{cases} (q-1)/2 - 1, & q = 2(2l) + 1, \\ (q-1)/2, & q = 2(2l+1) + 1, \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots, \\ r = [\text{odd}(p) + 1]q + [\text{odd}(q) + 1]p.$$

这样取定了  $K$  个不同的频率分量时, 可推出以下的三个结论<sup>[3,4]</sup>:

**结论 1** 三阶核  $H_3(m_1, m_2, m_3)$  对一阶核  $H_1(m)$  有影响, 而一阶核对三阶核无影响。

**结论 2** 三阶核与二阶核之间无影响。

**结论 3** 二阶核  $H_2(m_1, m_2)$  与一阶核之间无影响。

在不改变输入信号频率的条件下, 为了能够快速多点地沿轴线测量高阶的 Volterra

核,需要做下面的分析和推导。

将输入信号规定为

$$x_1(t) = \alpha_1 u(t), \quad (3a)$$

$$x_2(t) = \alpha_2 u(t), \quad (3b)$$

$$x_3(t) = \alpha_1 u(t) + v_d, \quad (3c)$$

$$x_4(t) = \alpha_2 u(t) - v_d, \quad (3d)$$

其中  $v_d$  是一直流分量,

$$u(t) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{i=1}^L A_i \exp(j2\pi n_i f t) \right], \quad (4)$$

式中  $A_i$  是一复常数,  $f$  是频率因子,  $n_i \in S$ 。(3)式的离散傅里叶变换为

$$\left. \begin{aligned} X_1(m) &= \begin{cases} \text{非零复数, } m \in S; \\ 0, & m \notin S, \text{ 或 } m = 0; \end{cases} \\ X_2(m) &= \begin{cases} \text{非零复数, } m \in S; \\ 0, & m \notin S, \text{ 或 } m = 0; \end{cases} \\ X_3(m) &= \begin{cases} \text{非零复数, } m \in S; \\ v_d, & m = 0; \\ 0, & m \notin S; \end{cases} \\ X_4(m) &= \begin{cases} \text{非零复数, } m \in S; \\ -v_d, & m = 0; \\ 0, & m \notin S. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

考查(2)式并利用结论 1~3,可以看出  $H_2(m,0)$ ,  $H_3(m,0,0)$  对一阶核的测量有下面的影响:

$$\begin{aligned} Y(m) &= H_1(m)X(m) + 2H_2(m,0)X(m)X(0) \\ &\quad + 3H_3(m,m,-m)X(m)|X(m)|^2 \\ &\quad + 3H_3(m,0,0)X(m)|X(0)|^2, \quad m \in S. \end{aligned} \quad (6)$$

为了求解出  $H_2(m,0)$ ,  $H_3(m,0,0)$ , 将(3)式的输入信号分别激励系统,并记相应的输出频谱为  $Y_i(m)$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ); 其中

$$Y_1(m) = \alpha_1 H_1(m)U(m) + 3\alpha_1^3 H_3(m,m,-m)|U(m)|^2 U(m), \quad m \in S; \quad (7)$$

$$Y_2(m) = \alpha_2 H_1(m)U(m) + 3\alpha_2^3 H_3(m,m,-m)|U(m)|^2 U(m), \quad m \in S; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Y_3(m) &= \alpha_1 H_1(m)U(m) + 2\alpha_1 H_2(m,0)U(m)v_d \\ &\quad + 3\alpha_1^3 H_3(m,m,-m)|U(m)|^2 U(m) \\ &\quad + 3\alpha_1^3 H_3(m,0,0)|v_d|^2 U(m), \quad m \in S; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Y_4(m) &= \alpha_2 H_1(m)U(m) - 2\alpha_2 H_2(m,0)U(m)v_d \\ &\quad + 3\alpha_2^3 H_3(m,m,-m)|U(m)|^2 U(m) \\ &\quad + 3\alpha_2^3 H_3(m,0,0)|v_d|^2 U(m), \quad m \in S. \end{aligned} \quad (10)$$

记

$$\begin{aligned} Y_{31}(m) &= Y_3(m) - Y_1(m) = 2\alpha_1 H_2(m,0)U(m)v_d \\ &\quad + 3\alpha_1^3 H_3(m,0,0)|v_d|^2 U(m), \quad m \in S; \end{aligned} \quad (11)$$

$$Y_{42}(m) = Y_4(m) - Y_2(m) = -2\alpha_2 H_2(m, 0)U(m)v_d + 3\alpha_2^2 H_3(m, 0, 0)|v_d|^2 U(m), \quad m \in S. \quad (12)$$

令

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\alpha_1 U(m)v_d, & b_1 &= 3\alpha_1 U(m)v_d^2, \\ a_2 &= -2\alpha_2 U(m)v_d, & b_2 &= 3\alpha_2 U(m)v_d^2, \end{aligned}$$

(12), (13)式可以写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} Y_{31}(m) \\ Y_{42}(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2(m, 0) \\ H_3(m, 0, 0) \end{bmatrix}, \quad m \in S. \quad (13)$$

显然系数矩阵是可逆的 ( $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ), 所以有

$$\begin{bmatrix} H_2(m, 0) \\ H_3(m, 0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{31}(m) \\ Y_{42}(m) \end{bmatrix}, \quad m \in S. \quad (14)$$

在  $m = m_1 + m_2$  ( $m_1, m_2 \in S$ ) 的相互调制频率处, 对应于(3a)式的输入信号, (2)式变为

$$\begin{aligned} Y_1(m) &= 2\alpha_1^2 H_2(m_1, m_2)U(m_1)U(m_2)/N \\ &+ 6\alpha_1^3 \sum_i H_3(m_{1i}, m_{2i}, m_{3i})U(m_{1i})U(m_{2i})U(m_{3i})/N^2, \end{aligned} \quad (15)$$

式中  $m_1 + m_2 = m_{1i} + m_{2i} + m_{3i} = m$ ,  $m_{1i}, m_{2i}, m_{3i} \in S$ ,  $\Sigma_i$  表示所有三阶核对二阶在  $m = m_1 + m_2$  调制频率处的影响。同样, 对应于 (3c) 式的输入信号, (2)式变为

$$\begin{aligned} Y_3(m) &= 2\alpha_2^2 H_2(m_1, m_2)U(m_1)U(m_2)/N \\ &+ 6\alpha_2^3 \sum_i H_3(m_{1i}, m_{2i}, m_{3i})U(m_{1i})U(m_{2i})U(m_{3i})/N^2 \\ &+ 6\alpha_2^3 H_3(m_1, m_2, 0)U(m_1)U(m_2)v_d/N, \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $m_1 + m_2 = m_{1i} + m_{2i} + m_{3i} = m$ ,  $m_1, m_2, m_{1i}, m_{2i}, m_{3i} \in S$ 。所以计算  $H_3(m_1, m_2, 0)$  的公式如下:

$$H_3(m_1, m_2, 0) = [Y_3(m) - Y_1(m)]/A, \quad (17)$$

式中  $A = 6\alpha_2 v_d/N$ 。

将文献[3,4]的算法稍做修改, 便可以得到沿轴线方向测量高阶 Volterra 核的方法。

根据以上的分析和参照文献[3,4]的算法, 我们对一个三阶非线性动态系统做了实际的测量, 其测量结果见文献[6]。

### 3 讨论和结束语

文献[9]讨论了含有一个非线性算子的动态非线性系统结构唯一性问题。这个研究展示了非线性系统与线性系统在结构上本质的不同。其意义在于它证明了至少在理论上有可能仅通过 I/O 测量而辨识非线性动态系统属于哪种结构。文献[7]研究了通过测量的 Volterra 核而达到这种目的的方法。而对于沿轴线方向的 Volterra 核来说, 它含有系统内部结构更为丰富的信息。例如, 对于所谓的三明治结构的非线性系统(示于图 1), 如果系统的非线性算子  $ZN$  是解析和无记忆的, 即可以展开为

$$ZN(\cdot) = \alpha_1(\cdot) + \alpha_2(\cdot)^2 + \alpha_3(\cdot)^3 + \dots \quad (18)$$

那么沿轴线方向的高阶 Volterra 核必满足下面的关系<sup>[7]</sup>:

$$\text{SYM} \left\{ \frac{K_{\theta_3}(j\omega, 0, 0)}{K_{\theta_1}(j\omega)} \right\} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} H_1^2(0) = \text{Const}, \quad (19)$$

$$\text{SYM} \left\{ \frac{K_{\theta_2}(j\omega, 0)}{K_{\theta_1}(j\omega)} \right\} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} H_1(0) = \text{Const}, \quad (20)$$

$$\text{SYM} \left\{ \frac{K_{\theta_3}(j\omega, 0, 0)}{K_{\theta_2}(j\omega, 0)} \right\} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} H_1(0) = \text{Const}, \quad (21)$$

式中 SYM 表示对称含义,  $K_{\theta_i}$  表示系统的第  $i$  阶 Volterra 核。

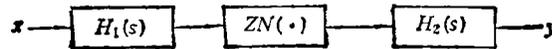


图 1 三明治结构的非线性动态系统

同样的结果可以推广到更加复杂的系统模型上<sup>[7]</sup>,限于篇幅,本文不再赘述。但是沿轴线方向测量高阶 Volterra 核在非线形动态系统“黑箱”建模领域确实具有实际意义。

### 参 考 文 献

- [1] Chua L O, *et al.* Int. J. Circuit Theory and Applications, 1989, 17:151—191.
- [2] Boyd S, *et al.* IEEE Trans. on CAS, 1983, CAS-30(8): 571—577.
- [3] Zhang Ping, *et al.* An Algorithm to Measure High Order Volterra Kernels. IEEE ISCAS'90, USA: 184—187.
- [4] 张 平,宋亚民. 电子学报, 1990,9(2): 13—20.
- [5] 张 平,宋亚民. 北京邮电学院学报, 1990, 13(4): 1—6.
- [6] Zhang Ping, Song Yamin. Measuring High-Order Volterra Kernels (II). Proc., ICCAS, Sheng zhen, China: June 1991, 750—752.
- [7] 张 平,宋亚民. 北京邮电学院学报, 1991, 14(2): 64—77.
- [8] 张 平,宋亚民. 一通信学报, 1990,11(6): 14—21.
- [9] Boyd S, *et al.* IEEE Trans. on AC, 1985, AC-30(17):674—680.

## MEASURING HIGH-ORDER VOLTERRA KERNELS ALONG AXIS

Zhang Ping Song Yamin

(Beijing University of Posts and Telecommunications. Beijing 100088)

**Abstract** The fast and efficient method for measuring high-order Volterra kernels along axis is given. This is a sequel of the authors former papers (1990). Using the conclusions of those papers mentioned above, and combining the DC component with the input signals, the high-order kernels of nonlinear system  $H_2(j\omega, 0)$ ,  $H_3(j\omega, 0, 0)$ ,  $H_3(j\omega_1, j\omega_2, 0)$  can be measured with many points.

**Key words** Nonlinear system, Nonlinear system modeling, Volterra series, DFT