

# 复宗量菲涅耳积分的计算及其性质

吴良超 汪茂光

(西安电子科技大学天线所 西安 710071)

**摘要** 复宗量菲涅耳(Fresnel)积分的计算,是有耗介质劈电磁散射中遇到的一个难题。本文综合运用了复宗量菲涅耳积分的小宗量级数展开和大宗量渐近展开,并且找到了大宗量展开与小宗量展开的衔接部,圆满地解决了菲涅耳积分在整个复平面内的计算机计算问题。本方法计算速度快,精度高。此外,本文还研究了菲涅耳积分在复平面上的对称性、零点等性质,给出了菲涅耳积分在复平面上的三维立体图和二维等值线图。

**关键词** 电磁散射,菲涅耳积分,数值计算,级数展开,渐近展开

## 1 引言

菲涅耳(Fresnel)积分是一种特殊函数,它最早出现在光波的衍射理论中<sup>[1]</sup>。随后,在天线电磁绕射理论中也经常遇到<sup>[2]</sup>。但是其宗量都是实宗量。随着电磁谱理论研究的深入和电磁散射研究的进展,在电磁谱理论中和平面波斜入射到阻抗劈的电磁绕射计算中,出现了复宗量菲涅耳积分<sup>[3,4]</sup>。为了计算阻抗劈的绕射场,必须解决复宗量菲涅耳积分的计算机数值计算问题。

## 2 实宗量菲涅耳积分和复宗量菲涅耳积分

菲涅耳积分的定义为

$$f(x) = \int_0^x \exp(-jt^2) dt, \quad (1)$$

当  $x$  为实变量时,称为实宗量菲涅耳积分;当  $x$  为复变量时,我们定义它为复宗量菲涅耳积分。此外,还有一些其它类似的定义,如

$$f_1(x_1) = \int_0^{x_1} \exp\left(-j \frac{\pi}{2} t^2\right) dt. \quad (2)$$

它与  $f(x)$  的关系为

$$f_1(x_1) = \sqrt{2/\pi} f(x), \quad x = \sqrt{\pi/2} x_1. \quad (3)$$

复宗量菲涅耳积分目前无表可查,对其性质也知之不详。

1993-05-11 收到, 1994-03-16 定稿

吴良超 男, 1966年生, 博士生, 从事微波通信和电磁散射研究。

汪茂光 男, 1930年生, 教授, 从事电磁散射研究。

### 3 复宗量菲涅耳积分在复平面内的小宗量泰勒级数展开

(1) 式中被积函数  $g(t) = \exp(-jt^2)$  是解析函数, 把它在复平面  $t = 0$  附近展开成泰勒级数形式, 得

$$\exp(-jt^2) = g(0) + g'(0)t + (g''(0)/2!)t^2 + \cdots + (g^{(n)}(0)/n!)t^n + \cdots \quad (4)$$

把(4)式代入(1)式, 积分, 得

$$f(x) = x - jx^3/3 - x^5/(5 \cdot 2!) + \cdots + (-j)^n x^{2n+1}/[(2n+1) \cdot n!] + \cdots \quad (5)$$

这是一个对任意复宗量  $x$  都收敛的级数。但对较大  $|x|$ , 它收敛的速度慢, 而且会因中间级数项太大和计算机有效位数(一般微机为 7 位)的限制而使计算误差大大增加, 甚至得出完全错误的结果。误差的大小取决于最大级数项的量级。通过分析, 表 1 给出了随宗量  $|x|$  增大用级数展开法计算菲涅耳积分理论上可能出现的最大误差  $\Delta_{\max}$ 。

表 1 级数展开法计算菲涅耳积分的理论上最大误差

$ x $	$\leq 1.0$	2.3	2.8	3.2	3.6	3.9	$\geq 4.0$
$\Delta_{\max}$	$\leq 10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$\geq 10^{-1}$

从表 1 中可以看出, 随宗量  $|x|$  的增大, 用级数展开法计算菲涅耳积分的误差也增大, 因此, 对较大宗量  $x$ , 必须采用另外一种方法计算。

顺便提一下, 试图用双精度解决因级数中间项太大而产生的误差, 提高级数展开法计算菲涅耳积分的精度或是扩展级数展开法计算菲涅耳积分的宗量范围, 在实践中已证明是行不通的, 原因是计算机虽给变量定义双精度, 但运算过程(如加减乘除乘方)还是按单精度进行的。

此外, 菲涅耳积分还有另外一种级数展开式,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \exp(-jt^2) dt = ze^{-it^2} \Big|_0^x + 2j \int_0^x t^2 e^{-it^2} dt = \cdots \\ &= e^{-jx^2} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2jx^2)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

这种展开式在整个复平面上也是收敛的, 类似于(5)式的收敛, 但收敛速度比(5)式慢, 且对同样的复宗量值  $x$ , 用(6)式计算的精度比用(5)式计算的精度差。故我们采用(5)式计算菲涅耳积分。采用(5)式的另一个好处还在于它的计算范围在保证足够的计算精度下能与大宗量渐近展开法计算的范范围衔接上, 这在后面将讨论。

另外, 表 1 给出的误差是采用级数展开法时, 理论上可能出现的最大误差, 因此实际计算的误差比理论上可能出现的最大误差要小, 这从表 2 中可以清楚地看出。另一方面, 从表 2 中还可看出, 在某些情况下(如  $x = 3.885274$ ) 实际计算的误差与理论上的误差也很接近。所有这些都说明我们理论分析的正确性, 实际计算的有效性。

表2 级数展开法计算值与精确值的比较

$x_1$	1.6		2.1
$x$	2.005303		2.631960
级数法 $f_1(x_1)$	(0.3654618, -0.6388877)		(0.5815655, -0.37472722)
精确值 $f_1(x_1)^{[2]}$	(0.3654617, -0.6388877)		(0.5815641, -0.3742734)
实际误差 $\Delta$	(0.0000001, 0.0000000)		(0.0000014, -0.0000012)
理论上最大误差 $\Delta_{max}$	$1.0 \times 10^{-6}$		$1.0 \times 10^{-5}$
$x_1$	2.5	2.8	3.1
$x$	3.133285	3.509279	3.885274
级数法 $f_1(x_1)$	(0.4574257, -0.6191890)	(0.4676827, -0.3912919)	(0.5647330, -0.5765859)
精确值 $f_1(x_1)^{[2]}$	(0.4574130, -0.6191818)	(0.4674917, -0.3915284)	(0.5615939, -0.5818159)
实际误差 $\Delta$	(0.0000127, -0.0000072)	(0.0001910, 0.0002365)	(0.0031391, 0.052300)
理论上最大误差 $\Delta_{max}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-2}$

#### 4 复宗量菲涅耳积分在复平面内的大宗量渐近展开

由于级数展开法对计算小宗量菲涅耳积分精度高,对大宗量则误差大,甚至无法计算,所以对大宗量菲涅耳积分,我们采用大宗量渐近展开技术。

首先把复宗量菲涅耳积分转化成便于使用大宗量渐近展开的形式。考虑到宗量  $x$  在整个复平面上,经过推导,有下列关系:

在  $-3\pi/4 < \arg(x) < \pi/4$  时,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x \exp(-jt^2) dt \\
 &= \int_0^\infty \exp(-jt^2) dt - \int_x^\infty \exp(-jt^2) dt \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-j\pi/4) - \int_x^\infty \exp(-jt^2) dt, \quad (7)
 \end{aligned}$$

上式积分路径应满足  $t \rightarrow \infty$ ,  $-\pi/2 \leq \arg(t) \leq 0$ 。

在  $\pi/4 < \arg(x) < 5\pi/4$  时,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x \exp(-jt^2) dt \\
 &= \int_0^\infty \exp(-jt^2) dt - \int_x^\infty \exp(-jt^2) dt \\
 &= -(\sqrt{\pi}/2) \exp(-j\pi/4) - \int_x^\infty \exp(-jt^2) dt, \quad (8)
 \end{aligned}$$

上式积分路径应满足  $t \rightarrow \infty$  时,  $\pi/2 \leq \arg(t) \leq \pi$ 。

令

$$F(x) = \int_x^{\infty} \exp(-jt^2) dt, \quad (9)$$

上式  $t \rightarrow \infty$  时,  $\arg(t)$  应满足(7),(8)式中的要求。

将  $F(x)$  用大宗量渐近展开, 得

$$F(x) = \exp(-jx^2) \left[ \frac{1}{2jx} + \frac{1}{2jx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2jx^2)^n} \right] \quad (10)$$

这是一个发散级数, 根据大宗量渐近展开理论, 级数项截取到级数项刚要发散还未发散的那一项, 也就是级数项模值最小的那一项, 截取的误差不大于最小项的数值。因此, 用大宗量渐近展开法计算菲涅耳积分理论上可能出现的最大误差就是最小级数项的值。表 3 给出了随宗量增大用渐近展开法计算菲涅耳积分的最大可能误差。分析表 3 时, 没有考虑(10)式中的  $\exp(-jx^2)$  项, 这不影响计算的相对误差。从表 3 中可以看出, 理论上可能出现的最大误差随  $|x|$  的增大而减少。

表 3 随宗量增大渐近展开法计算菲涅耳积分的最大可能误差

$ x $	1.0	2.0	2.4	2.8	3.2	$\geq 3.5$
$\Delta_{\max}$	1.0	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$\leq 10^{-6}$

## 5 级数展开法与渐近展开法的衔接部

根据前面的分析可知, 对小宗量  $x$ , 采用级数展开法计算菲涅耳积分; 对大宗量  $x$ , 采用渐近展开法计算菲涅耳积分; 然而小宗量的截止范围是多大, 大宗量的截止范围是多大, 它们有没有公共部分? 如有, 则整个复平面上的菲涅耳积分的计算问题便解决了。

从表 1 可以看出, 对级数展开法,  $|x| \leq 3.2$ ,  $\Delta_{\max} \leq 10^{-4}$ ; 从表 3 可以看出, 对渐近展开法,  $|x| \geq 2.8$ ,  $\Delta_{\max} \leq 10^{-4}$ , 因此, 在保证误差精度  $< 10^{-4}$  前提下, 这两种方法的结合部为  $2.8 \leq |x| \leq 3.2$  之间。

另外, 在复平面上, 沿与实轴夹角为  $\phi$  的直线  $l$ , 分别用两种方法计算菲涅耳积分, 并在同一张图上绘出它们各自的曲线, 从曲线相交部分可知这两种方法的衔接部。对不同的  $\phi$  值, 计算结果都表明, 它们重合的部分为  $2 < l < 4$ 。

综合上面的分析可以看出, 级数展开法与渐近展开法的衔接处选在  $|x| = 3.0$  处最为合适。对  $|x| < 3.0$ , 采用级数展开法, 对  $|x| \geq 3.0$ , 采用渐近展开法, 这样, 在整个复平面上, 菲涅耳积分的计算精度都大于  $10^{-4}$ 。由表 1 和表 3 还可以看出, 在复平面上绝大部分区域, 本方法的计算精度都大于  $10^{-6}$ 。图 1 为复平面  $x$  上本方法计算菲涅耳积分的精度分布图。

至此, 复宗量菲涅耳积分在整个复平面内的

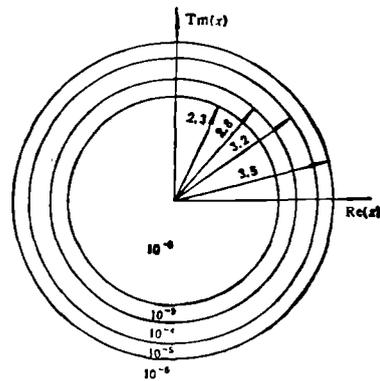


图 1 菲涅耳积分精度分布图  
(纵坐标  $T_n(x)$  应为  $\text{Im}(x)$ )

计算机计算问题便圆满地解决了。

## 6 复宗量菲涅耳积分计算方法的验证和计算速度

文献[5]给出了复平面上一个特殊函数  $W(z)$  的复平面数值表,  $W(z)$  的定义为

$$W(z) = \exp(-z^2)\operatorname{erfc}(-iz) = \exp(-z^2) \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(it^2)dt \right) \quad (11)$$

它与菲涅耳积分的关系为

$$W(z) = \exp(-z^2) \left[ 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-j\pi/4)f(z \exp(j\pi/4)) \right] \quad (12)$$

因此用本文的菲涅耳积分计算方法,通过(12)式计算的  $W(z)$  的值作为计算值,文献[5]中给出的数值作为对比值,由此验证本文计算菲涅耳积分的方法的有效性和计算精度,见表4。

表4 验证菲涅耳积分计算结果

$z$	(0,0)	(0.7,0.5)	(0.4,0.9)	(3.8,1.1)
本文计算 $W(z)$	(1.000000,0.000000)	(0.466127,0.292432)	(0.428808,0.116714)	(0.043568,0.140039)
文献[5] $W(z)$	(1.000000,0.000000)	(0.466127,0.292432)	(0.428808,0.116714)	(0.043567,0.140039)
误差 $\Delta$	(0.000000,0.000000)	(0.000000,0.000000)	(0.000000,0.000000)	(0.000001,0.000000)
$z$	(1.8,2.0)	(1.0,2.3)	(1.9,0.6)	(3.5,2.6)
本文计算 $W(z)$	(0.161746,0.127929)	(0.199372,0.075977)	(0.127644,0.281392)	(0.080315,0.102451)
文献[5] $W(z)$	(0.161733,0.127931)	(0.199402,0.076021)	(0.127644,0.281392)	(0.080316,0.102451)
误差 $\Delta$	(0.000013,0.000002)	(-0.000030, -0.000044)	(0.000000,0.000000)	(0.000001,0.000000)

表4中  $z$  的取值具有普遍性。一般来说,  $z$  越大或越小,计算精度越高,故我们把  $z$  的值取在计算精度较差的 2.0~4.0 范围内,即使这样,从表4中仍可看出,大多数情况其计算精度都大于  $10^{-6}$ ,所有情况下其精度都大于  $10^{-4}$ 。而文献[6]给出的计算精度只有 3.4%,而且是实变量情况。

此外,本文的方法不仅计算精度高,而且计算速度快,在 486 微机上每秒钟可计算复平面上 1400 个菲涅耳积分。

## 7 复宗量菲涅耳积分的性质

### 7.1 对称性

令复宗量菲涅耳积分

$$f(x) = \int_0^x \exp(-it^2)dt = \operatorname{Re}(x) + j\operatorname{Im}(x), \quad x \text{ 为复数} \quad (13)$$

其中  $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(x)$  分别为菲涅耳积分的实部和虚部。

根据菲涅耳积分的定义(1)式,考虑到被积函数在复平面上是解析的,经过推导有下列对称关系:

$$f(-x) = -f(x) = -\operatorname{Re}(x) - j\operatorname{Im}(x), \quad (14)$$

$$f(jx^*) = jf^*(x) = \operatorname{Im}(x) + j\operatorname{Re}(x), \quad (15)$$

$$f(-jx^*) = -jf^*(x) = -\operatorname{Im}(x) - j\operatorname{Re}(x), \quad (16)$$

上式中 \* 表示共轭的意思。

(14)式说明菲涅耳积分在复平面上是奇对称关系,(15)式说明菲涅耳积分在复平面上相对于第一、第三象限角平分线存在对称关系,(16)式说明菲涅耳积分在复平面上相对于第二、第四象限角平分线存在对称关系。这里的对称关系是指实部与虚部存在互换或变号、积分模值相同的关系。(14)–(16)式的对称关系从展开式(5)式和(7)式,(8)式中也可得到证明。

### 7.2 复宗量菲涅耳积分在复平面上的零点位置

文献[5]给出了复宗量误差函数的零点位置,经推导,菲涅耳积分零点位置  $x_0$  与复宗量误差函数的零点位置  $Z_0$  的关系为

$$x_0 = Z_0 \exp(-j\pi/4) \quad (17)$$

因此,由误差函数的零点位置可导出复宗量菲涅耳积分的零点位置,见表 5。后面求复宗量菲涅耳积分的等值线方法中也可求出零点的位置。此外,根据菲涅耳积分的对称性,与表 5 零点对称的位置还有零点,这里省略了。

表 5 菲涅耳积分在复平面上的零点  $f(x_0^*) = 0$

序号 $n$	1	2	3	4	5
$\operatorname{Re}(x_0^*)$	2.355768	3.437412	4.253509	4.936762	5.536436
$\operatorname{Im}(x_0^*)$	0.304287	0.262985	0.237508	0.219708	0.206257
序号 $n$	6	7	8	9	10
$\operatorname{Re}(x_0^*)$	6.077279	6.573807	7.035400	7.468533	7.877898
$\operatorname{Im}(x_0^*)$	0.195567	0.186767	0.179335	0.172934	0.167334

### 7.3 菲涅耳积分在复平面上的三维立体图及其模值分布规律

根据前面的分析可知,菲涅耳积分在复平面上相对于一、三象限的角平分线和二、四象限的角平分线存在对称关系,因此,只需分析其在第四象限角平分线与第一象限角平分线这个两条线夹角为  $90^\circ$  的区域的模值分布规律,然后根据对称性,就可知其在整个复平面上的数值分布规律了。图 2 为我们计算的复平面上第四象限角平分线与第一象限角平分线之间的复宗量菲涅耳积分的立体图。图中积分大于 4.0 的部分被截去了。从图中可以看出,在复平面上靠近实轴的上方,有一排零点,这从复平面上菲涅耳积分的二维等值线图(见图 3)中可更清楚地看出这一点。图 3 中标出的等值线数值为菲涅耳积分模值;从图 2 中还可以看出,在实轴下方,菲涅耳积分近似为一常数(原点附近除外);在实轴上方越过零点以后,菲涅耳积分模值迅速上升,越靠近第一象限角平分线,上升越快;在原点附近,菲涅耳积分呈线性增大。

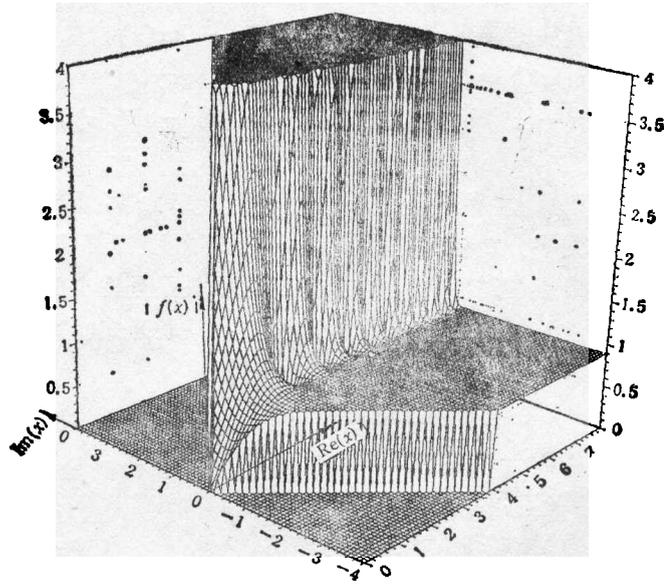


图 2 复平面上第一、四象限角平分线间的复宗量菲涅耳积分  $|f(x)|$  的立体图

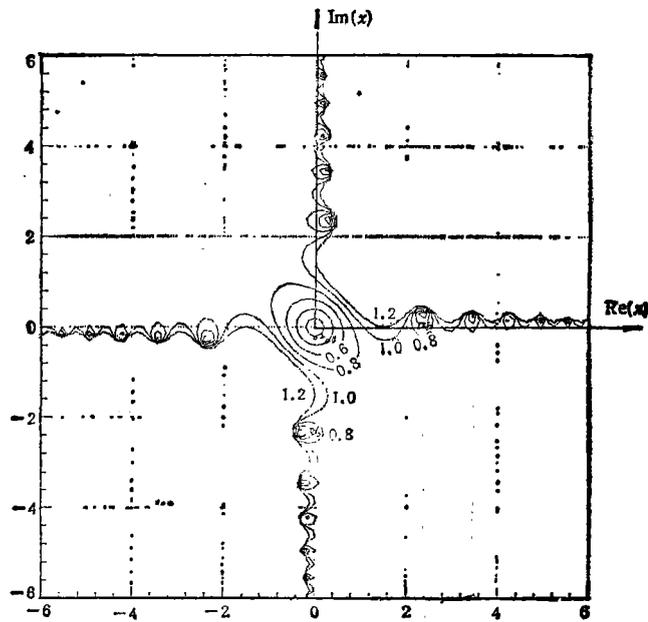


图 3 复平面上菲涅耳积分二维等值线图

此外,从图 3 中还可清楚地看出,菲涅耳积分在复平面上是相对于第一、三象限角平分线和二、四象限角平分线呈对称性的。这与前面的理论分析也是一致的。

图 4 是沿与复平面上实轴  $\text{Re}(x)$  夹角为  $\phi$  的直线  $l$  计算的菲涅耳积分曲线,  $\phi=0^\circ$ ,

表 6

$x$	(38.0,0.0)	(3.0,0.0)	(0.15,0.0)	(200.0,-10.0)
$f(x)$	(0.6147403,-0.6210784)	(0.7028561,-0.7735810)	(0.1499924,-0.0011249)	(0.6266571,-0.6266571)
$x$	(3.0,2.0)	(1.0,0.5)	(13,1.0)	(0.9,-0.45)
$f(x)$	(-15348.42,17729.74)	(1.573108,0.2251926)	( $-7.5092895 \times 10^9$ , $-1.0064977 \times 10^9$ )	(0.6315481,-0.4559527)

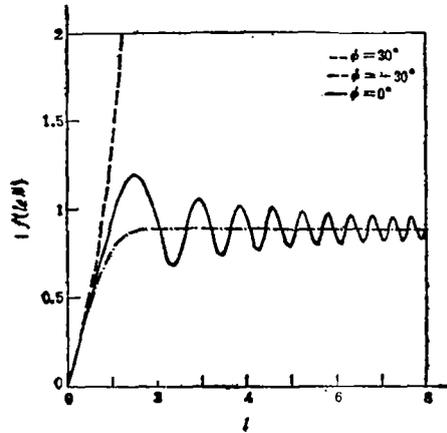


图 4

即为实宗量菲涅耳积分。 $\phi = -30^\circ$  即为位于第四象限中的菲涅耳积分, $\phi = 30^\circ$  即为第一象限靠近角平分线的菲涅耳积分。从图中可以看出,复宗量菲涅耳积分的性质与实宗量菲涅耳积分的性质差别甚大。图 4 的结果还有助于加强对图 2 的理解。

表 6 给出了一组复平面上复宗量菲涅耳积分的数值结果。

## 参 考 文 献

- [1] Sommerfeld A. Optics. New York: Academic Press Inc., 1954, Chapter 5.
- [2] Jones D S. The Theory of Electromagnetism. Oxford, London, New York, Paris: Pergamon Press, 1964, Chapter 9.
- [3] Rojas R G. IEEE Trans. on AP, 1988, AP-36(7): 956—970.
- [4] Clemmow P C. The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields. Orford, London, New York, Paris: Pergamon Press, 1966, Chapter 3.
- [5] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55. Washington: U. S. Government Printing Office, 1965, Chapter 7.
- [6] Muhammad T A. IEEE Trans. on AP, 1989, AP-37(7): 946—947.

## NUMERICAL COMPUTATIONS AND CHARACTERISTICS OF COMPLEX ARGUMENT FRESNEL INTEGRAL

Wu Liangchao    Wang Maoguang

(*Antenna Institute, Xidian University, Xi'an 710071*)

**Abstract**    Computing complex argument Fresnel integral is a difficult problem meeting in electromagnetic scattering of lossy dielectric wedges. This paper makes use synthetically of series expansion and asymptotic expansion of complex argument Fresnel integral and the connections of the two expansions are found and analyzed. The computing of Fresnel integral in whole complex plane is so solved perfectly. With this method the computing speed is rapid and its precision is high. In addition, the symmetrical relations and complex zeros of Fresnel integral are studied also. Three-dimensional figure and two-dimension contour lines of Fresnel integral in the complex plane are given.

**Key words**    EM scattering, Fresnel integral, Numerical computation, Series expansion, Asymptotic expansion