

多层非线性介质板的电磁反射和传输

阴和俊 吕保维 宋文淼 尹元昭

(中科院电子学研究所 北京 100080)

摘要 本文根据由 Volterra 泛函级数理论所得到的非线性介质中的色散关系,讨论了单色平面波斜入射多层平板非线性介质的传输问题;导出了反射率和透射率的一级近似公式;对非线性单层和具有周期性的双层介质板进行了数值计算;最后讨论了非线性介质对电波传播特性的影响。

关键词 非线性介质,电磁波传播和散射, Volterra 泛函级数

1 引 言

在近代电磁波传播和散射的研究中,有关非线性介质问题的研究越来越引起人们极大的关注,这主要是由于非线性问题的普遍性和复杂性。N. Blombergen^[1] 的耦合波理论为非线性光学的研究开辟了一条有效的途径,在等离子体^[2],铁磁体^[3],以及半导体^[4]领域已取得了卓有成效的工作。近二十年来,随着新的数学方法的诞生和计算技术的发展,发现了孤子波传播、混沌等具有重大意义的现象^[5,6]。尽管如此,非线性问题的研究还是处于发展阶段,即使是非常简单的边界问题,由于几何形体、感应源的任意性和高阶谐波的出现,使解析变得非常复杂,需要对低频和高频进行分别的讨论,本文首先在基频下进行了分析,给出了近似的解析公式,并通过数值计算进行了分析和验证。

2 非线性介质中的本构方程

Dan Censor^[7] 利用 Volterra 泛函级数理论对简谐波激励下非线性介质区的本构关系进行了详细的分析,给出了各阶谐波对应的色散关系,下面我们只讨论基频问题。谐波激励非磁化的具有各向同性的非线性介质,在弱非线性的近似下(所产生的高阶谐波具有相同的相速度,从而满足相匹配条件),基频对应的色散方程为

1993-09-24 收到, 1994-02-25 定稿

阴和俊 男 1963 年生,博士研究生,专业为电磁场理论,研究方向为电磁散射、分形和混沌。

吕保维 男 1916 年生,研究员,博士生导师,中科院院士,主要从事电磁场理论、空间物理、电波传播等领域的研究工作。

宋文淼 男 1938 年生,研究员,博士生导师,主要从事电磁场理论与微波技术等领域的研究工作。

尹元昭 男 1938 年生,研究员,博士生导师,主要从事自由电子激光器、电磁场理论、分形和混沌等领域的研究工作。

$$k^2 E(k) - \omega^2 \mu [\epsilon^1 + \epsilon^2 E(k) + \dots] E(k) = 0, \quad (1)$$

其中 k 是非线性介质中的传波矢量, ϵ^1, ϵ^2 是非线性介质介电常数的一阶、二阶项, 可见, k 与场强有关(不同于线性介质)。

3 半无限平面边值问题

3.1 平面波垂直入射 (如图 1 所示)

$$E_{in} = \epsilon_3 e_{in} \exp(ik_{in}x_1 - i\omega t), x_1 \leq 0, \quad (2)$$

$$k_{in} = \omega \sqrt{\mu \epsilon_{in}}.$$

$$\text{基频反射: } E_r = \epsilon_3 e_r \exp(-ik_{in}x_1 - i\omega t), x_1 \leq 0. \quad (3)$$

$$\text{基频透射: } E_t = \epsilon_3 e_t \exp(ik_t x_1 - i\omega t), x_1 \geq 0. \quad (4)$$

边界条件:

$$e_{in} + e_r = e_t, \quad (5)$$

$$h_{in} + h_r = h_t. \quad (6)$$

利用 Maxwell 方程(假设介质是非磁化的, $\mu_r = 1$)

$$k \times E - \omega B = 0, \quad (7)$$

$$e_{in} - e_r = k_t e_t / k_{in} \quad (8)$$

将(1)式改写为

$$k_t^2 - \omega^2 \mu \epsilon_t(e_t) = 0. \quad (9)$$

令

$$\zeta = k_t / k_{in} = n_t / n_{in}; \quad (10)$$

反射系数:

$$r = e_r / e_{in} = (1 - k_t / k_{in}) / (1 + k_t / k_{in}) \\ = (1 - \zeta) / (1 + \zeta); \quad (11)$$

$$\text{透射系数: } t = e_t / e_{in} = 2 / (1 + k_t / k_{in}) = 2 / (1 + \zeta). \quad (12)$$

进行一级近似, 在(1), (9)式中, 令 $e_t = 0$, 可得

$$k_{t0} = \omega \sqrt{\mu \epsilon_t^1}, \quad (13)$$

$$\zeta_0 = k_{t0} / k_{in} = \sqrt{\epsilon_t^1 / \epsilon_{in}}, \quad (14)$$

$$t_0 = 2 / (1 + \zeta_0) = 2 \sqrt{\epsilon_{in}} / (\sqrt{\epsilon_t^1} + \sqrt{\epsilon_{in}}). \quad (15)$$

代入(12)式, 得

$$e_{t0} = t_0 e_{in}. \quad (16)$$

将(16)式代入(1)式, 得

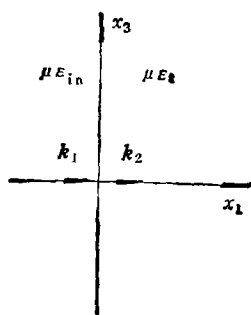
$$k_{t1} = \omega \sqrt{\mu (\epsilon_t^1 + \epsilon_t^2 t_0 e_{in})}, \quad (17)$$

$$\zeta_1 = \sqrt{(\epsilon_t^1 + \epsilon_t^2 t_0 e_{in}) / \epsilon_{in}}, \quad (18)$$

$$r_1 = (1 - \zeta_1) / (1 + \zeta_1), \quad (19)$$

$$t_1 = 2 / (1 + \zeta_1). \quad (20)$$

r_1, t_1 就是在一级近似下所得到的反射系数和透射系数。



3.2 平面波倾斜入射

(1) TE 波:

$$\zeta = \zeta_{\perp} = \frac{k_t \cos \theta_t}{k_{in} \cos \theta_{in}} = \frac{\sqrt{(k_t/k_{in})^2 - \sin^2 \theta_{in}}}{\cos \theta_{in}}. \quad (21)$$

(2) TM 波:

$$\zeta = \zeta_{\parallel} = \frac{k_{in} \cos \theta_t}{k_t \cos \theta_{in}} = (k_{in}/k_t)^2 \frac{\sqrt{(k_t/k_{in})^2 - \sin^2 \theta_{in}}}{\cos \theta_{in}}. \quad (22)$$

(3) Snell 定律

$$k_{in} \sin \theta_{in} = k_t \sin \theta_t. \quad (23)$$

(4) Brewster 角

$$\tan \theta_b = [(\epsilon_t^i + \epsilon_t^i \epsilon_{in})/\epsilon_{in}]^{1/2}. \quad (24)$$

4 非线性平板介质

4.1 单层板的一级近似公式 (如图 2 所示)

设一单色平面波 (TE) 斜入射具有厚度为 d_2 的非线性平板介质, 平板介质的特征矩阵为

$$M(d) = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & -i \sin \beta_2 / p_2 \\ -i p_2 \sin \beta_2 & \cos \beta_2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中:

$$\beta_2 = k_2 d_2 \cos \theta_2 = k_1 \zeta_2 d_2 \cos \theta_1,$$

$$p_1 = n_1 \cos \theta_1 = \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1,$$

$$p_2 = n_2 \cos \theta_2 = \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2,$$

$$p_3 = n_3 \cos \theta_3 = \sqrt{\epsilon_3} \cos \theta_3,$$

$$\zeta_2 = k_2 \cos \theta_2 / (k_1 \cos \theta_1),$$

$$k_2/k_1 = \sqrt{(\epsilon_2^i + \epsilon_2^i \epsilon_{in})/\epsilon_1},$$

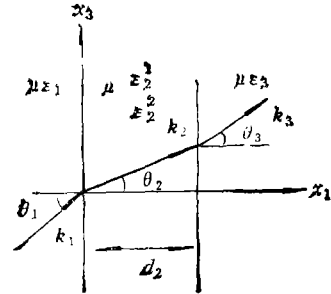


图 2

则平板的反射系数 (r) 和透射系数 (t) 分别为

$$r = 2p_1 / [(m_{11} + m_{12}p_3)p_1 + (m_{21} + m_{22}p_3)], \quad (26)$$

$$t = [(m_{11} + m_{12}p_3)p_1 - (m_{21} + m_{22}p_3)] / [(m_{11} + m_{12}p_3)p_1 + (m_{21} + m_{22}p_3)]. \quad (27)$$

其中 m_{ij} 是 (25) 式中的矩阵元;

将 (25) 式代入 (26), (27) 式可得

$$\text{其中} \quad r = [r_{12} + r_{23} \exp(2i\beta_2)] / [1 + r_{12}r_{23} \exp(2i\beta_2)], \quad (28)$$

$$t = [t_{12}t_{23} \exp(i\beta_2)] / [1 + r_{12}r_{23} \exp(2i\beta_2)], \quad (29)$$

$$r_{12} = (p_1 - p_2) / (p_1 + p_2), \quad r_{23} = (p_2 - p_3) / (p_2 + p_3); \quad (30)$$

$$t_{12} = 2p_1 / (p_1 + p_2), \quad t_{23} = 2p_2 / (p_2 + p_3). \quad (31)$$

平板的反射率 (R) 和透射率 (T) 分别为

$$R = |r|^2, \quad (32)$$

$$T = |t|^2 p_3 / p_1. \quad (33)$$

如果 $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, 则

$$r_{12} = -r_{23} = r_0 = (1 - \zeta_2)/(1 + \zeta_2); \quad (34)$$

$$t_{12} = 2/(1 + \zeta_2), \quad t_{23} = 2\zeta_2/(1 + \zeta_2); \quad (35)$$

$$r = r_0[1 - \exp(2i\beta_2)]/[1 - r_0^2 \exp(2i\beta_2)], \quad x_1 \leq 0; \quad (36)$$

$$t = 4\zeta_2 \exp(i\beta_2)/\{(1 + \zeta_2)^2[1 - r_0^2 \exp(2i\beta_2)]\}, \quad x_1 \geq d_2. \quad (37)$$

4.2 周期性双层非线性介质 (如图 3 所示)

线性分层介质的特征矩阵的传递公式为

$$M_N(Z_N) = M_1(Z_1)M_2(Z_2 - Z_1) \cdots M_N(Z_N - Z_{N-1}). \quad (38)$$

由矩阵理论可得周期为 $h = h_1 + h_2$ 的周期性双层非线性介质的特征矩阵公式为

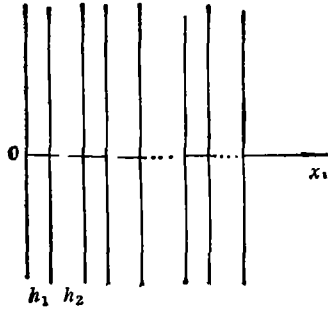


图 3

$$M_{2N}(Nh) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$m_{11} = [\cos \beta_2 \cos \beta_3 - p_3 \sin \beta_2 \sin \beta_3 / p_2] \times u_{N-1}(a) - u_{N-2}(a), \quad (40a)$$

$$m_{12} = -i[\cos \beta_2 \sin \beta_3 / p_3 + \sin \beta_2 \cos \beta_3 / p_2] \times u_{N-1}(a); \quad (40b)$$

$$m_{21} = -i[p_2 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + p_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3] \times u_{N-1}(a), \quad (40c)$$

$$m_{22} = [\cos \beta_2 \cos \beta_3 - p_2 \sin \beta_2 \sin \beta_3 / p_3] \times u_{N-1}(a) - u_{N-2}(a); \quad (40d)$$

$$a = \cos \beta_2 \cos \beta_3 - 0.5(p_2/p_3 + p_3/p_2) \sin \beta_2 \sin \beta_3; \quad (41)$$

$$\beta_2 = k_2 h_2 \cos \theta_2 = k_1 \zeta_2 h_2 \cos \theta_1, \quad (42a)$$

$$\beta_3 = k_3 h_3 \cos \theta_3 = k_1 \zeta_3 h_3 \cos \theta_2; \quad (42b)$$

$$k_2/k_1 = \sqrt{(\varepsilon_2^1 + \varepsilon_2^2 \varepsilon_{20} \varepsilon_{1n})/\varepsilon_1}, \quad (43a)$$

$$k_3/k_1 = \sqrt{(\varepsilon_3^1 + \varepsilon_3^2 \varepsilon_{30} \varepsilon_{1n})/\varepsilon_1}; \quad (43b)$$

$$\varepsilon_{20} = 2\sqrt{\varepsilon_1}/(\sqrt{\varepsilon_2^1} + \sqrt{\varepsilon_1}), \quad (44a)$$

$$\varepsilon_{30} = 2\sqrt{\varepsilon_1}/(\sqrt{\varepsilon_3^1} + \sqrt{\varepsilon_1}); \quad (44b)$$

$$u_{N-1}(a) = \sin[(N+1)\cos^{-1}(a)]/\sqrt{1-a^2}; \quad (45)$$

$$p_1 = n_1 \cos \theta_1 = \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1, \quad (46a)$$

$$p_2 = n_2 \cos \theta_2 = \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_2, \quad (46b)$$

$$p_3 = n_3 \cos \theta_3 = \sqrt{\varepsilon_3} \cos \theta_3. \quad (46c)$$

将(40)式代入(26),(27),(32),(33)式即可得到反射率和透射率的一级近似公式。

5 数值计算和分析

设板前、后的介质参数皆为 $\mu_r = 1, \varepsilon = 1$ 。入射波为波长 $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ 的平面波。图 4 为垂直入射到厚度分别为 $\lambda, 1.5\lambda, 2\lambda$ 的非线性介质板 ($\varepsilon_1^1 = 4.0, \varepsilon_2^2 = 0.1$) 后反射

率随场强的变化关系。结果表明, 反射率随场强作起伏变化。起伏频率随厚度的增大而增大。图 5 为以不同的入射角($30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$)入射到厚度为 $h = \lambda$ 的非线性介质板($\epsilon_1^1 = 4.0, \epsilon_2^2 = 0.1$)后反射率随场强的变化关系。反射率随入射角的增大而增大。

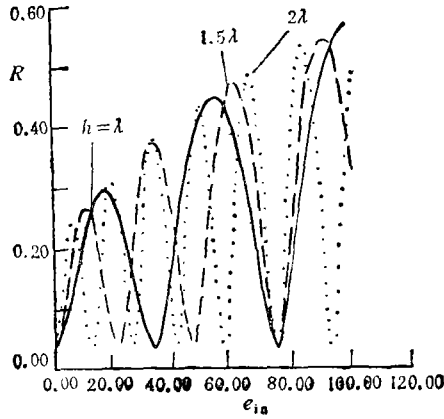
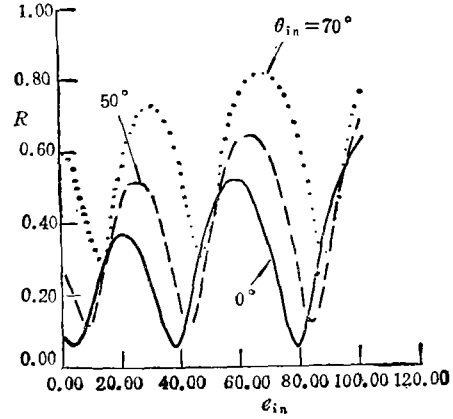


图 4

$\epsilon^1 = 4.0, \epsilon^2 = 0.1, \theta = 0^\circ$

图 5 (图中 0° 应为 30°)

$\epsilon^1 = 4.0, \epsilon^2 = 0.1, h = \lambda$

图 6 为垂直入射到厚度为 $h_1 = \lambda, h_2 = 1.5\lambda, N = 20$ 层的周期性双层非线性介质板后, 在不同的非线性参数($\epsilon_1^1, \epsilon_2^2, \epsilon_3^3, \epsilon_4^4$)下, 反射率随场强的变化关系。结果表明; 反射率随参数的增大而增大。图 7 为以不同的入射角($\theta = 0^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$)入射到厚度为 $h_1 = \lambda, h_2 = 1.5\lambda, N = 20$ 层的周期性双层非线性介质板($\epsilon_1^1 = 3.0, \epsilon_2^2 = 0.1, \epsilon_3^3 = 4.0, \epsilon_4^4 = 0.12$)后, 反射率随场强的变化关系。反射率随入射角的增大而增大。

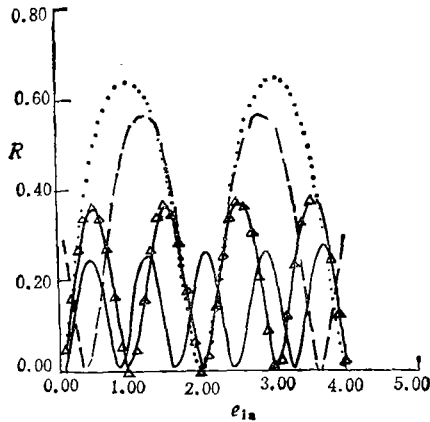


图 6

$N = 20, h_1 = \lambda, h_2 = 1.5\lambda$

— $\epsilon_1^1 = 3.0, \epsilon_2^2 = 0.1, \epsilon_3^3 = 4.0, \epsilon_4^4 = 0.12$
 -△-△- $\epsilon_1^1 = 4.0, \epsilon_2^2 = 0.1, \epsilon_3^3 = 9.0, \epsilon_4^4 = 0.1$
 $\epsilon_1^1 = 7.0, \epsilon_2^2 = 0.1, \epsilon_3^3 = 9.0, \epsilon_4^4 = 0.1$
 -·-·-· $\epsilon_1^1 = 9.0, \epsilon_2^2 = 0.1, \epsilon_3^3 = 7.0, \epsilon_4^4 = 0.12$

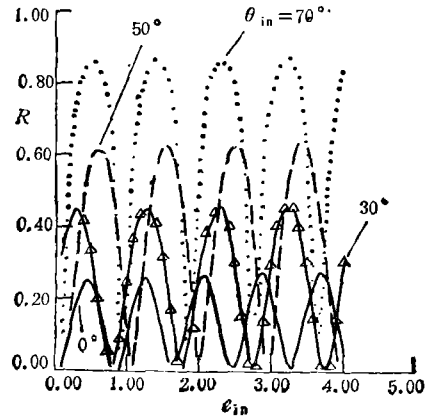


图 7

$N = 20, h_1 = \lambda, h_2 = 1.5\lambda$

$\epsilon_1^1 = 3.0, \epsilon_2^2 = 0.1, \epsilon_3^3 = 4.0, \epsilon_4^4 = 0.12$

从数值计算的结果可以得出下列结论:

- (1) 反射率随场强作起伏变化, 这是非线性介质不同于线性介质的特征之一。
- (2) 反射率和起伏频率皆随非线性参数的增大而增大。
- (3) 在特定的准周期性场强值处(具体的值与非线性参数有关), 反射率近似于零, 此时能量几乎全部透射。
- (4) 反射率、准周期、零点皆随入射角的增大而增大。
- (5) 起伏频率随厚度的增大而增大。
- (6) 在双层情况下的周期比单层下的周期要短的多。

6 结 语

本文讨论了基频下平面波斜入射具有平面边界的多层非线性介质的传输问题, 导出了反射率和透射率的一级近似公式, 对非线性单层和具有周期性的双层介质板进行了数值计算和分析, 对于高阶谐波的讨论将另文给出。

参 考 文 献

- [1] Bloembergen N. *Nonlinear Optics*, New York: Benjamin Press, 1965, 62—119.
- [2] Tsytovich V N. *Nonlinear Effects in Plasmas*, Moscow: Fizmagig Press, 1970, 1—71.
- [3] Gurevich A G. *Ferrites at Microwave Frequencies*, Moscow: Fizmagig Press, 1960, 251—305.
- [4] Ippen E P, Jacobs S F, *et al.* *Laser Applications to Optics and Spectroscopy*, New York: Addison-Wesley, 1979, 213—244.
- [5] Newell A C, Moloney J V. *Nonlinear Optics*, New York: Addison-Wesley, 1992, 22—67.
- [6] Franceschetti G, Pino I M. *Electromagnetics*, 1991, 11(3): 281—308.
- [7] Censor D. *SIAM J. Appl. Math.*, 1983, 43(6): 1400—1416.

EM REFLECTION AND TRANSMISSION FROM MULTILAYERED NONLINEAR SLABS

Yin Hejun Lu Baowei Song Wenmiao Yin Yuanzhao

(*Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing 100080*)

Abstract The fundamental reflection and transmission of a plane wave from multilayered nonlinear slabs are studied by using the Volterra functional series theory. The first order approximations of reflectivity and transmissivity are derived. The numerical calculations are made to a nonlinear plate and a periodic multilayered slab, which is consisted of two different nonlinear slabs. The influences of nonlinear medium to the EM propagation are discussed.

Key words Nonlinear medium, EM reflection and transmission, Volterra series