

基于 Inagaki 模式方法分析导体内谐振特性

张云峰 姜成贵 曹伟

(南京邮电大学无线通信与电磁兼容实验室 南京 210003)

摘要 当应用电场积分方程或磁场积分方程对导体散射特性进行矩量法分析时,在某些离散的频率点即内谐振点上,常常出现解的不稳定或不唯一情况。为了解决这一问题,该文提出了一种新型的消除内谐振的方法。这种方法基于电场积分方程,利用 Inagaki 模性质有效地去除了谐振模式,获得内谐振条件下正确的导体散射特性。该方法具有概念清晰和计算简便等优点。计算结果与公开发表的文献结果以及解析解相比,一致性良好。

关键词 电磁散射, 矩量法, Inagaki 模, 电场积分方程, 磁场积分方程, 内谐振

中图分类号: 0441

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)09-1735-05

Inagaki Mode Approach to Electromagnetic Scattering of Conducting Bodies at Interior Resonances

Zhang Yun-feng Jiang Cheng-gui Cao Wei

(Laboratory on Wireless Communications and Electromagnetic Compatibility,
Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract When either electric field integral equation or magnetic field integral equation is employed to analyze electromagnetic scattering of conducting bodies, at some discrete resonance frequencies, the solution of Method Of Moments(MOM) matrix will be nonunique or unstable. In this paper, a new effective method is presented to solve this problem. At the interior resonance frequencies, Inagaki mode method, based on electric field integral equation, is used to filter out resonance modes and obtain right parameters. The proposed method possesses the merits of clarity in concept and simplicity in computation. A good agreement is achieved between the calculated results and the published as well as the analytical results.

Key words Electromagnetic scattering, Method Of Moments(MOM), Inagaki mode, Electric Field Integral Equation(EFIE), Magnetic Field Integral Equation(MFIE), Interior resonance

1 引言

长期以来, 电场积分方程(EFIE)和磁场积分方程(MFIE)被广泛用来分析导体的散射特性^[1-4]。然而在某些离散的频率点, 当运用电场积分方程或磁场积分方程对导体进行矩量法分析时, 所得的结果常常会不唯一或者不稳定。这些离散频率与相同表面导电空腔的谐振频率相同, 人们称为导体的内谐振频率。由于内谐振现象存在, 使得导体内谐振频率点及其附近准确的特性分析工作变得十分困难, 因此众多学者提出了许多消除内谐振的有效方法。比较重要的主要有以下一些工作。文献[5]和文献[6]分别提出将电场积分方程和磁场积分方程进行线性组合的混合场积分方程(CFIE)法和混合源积分方程(CSIE)法, 两方法需同时计算EFIE和MFIE阻抗矩阵, 其中CFIE法不适用于由空腔和薄平板构成的一类散射体。文献[7]提出了包含切向分量和法向分量边界条件的扩展电磁场积分方程法。文献[8]提出了基于电场积分方程, 针对病态矩阵进行数值处理的最小范数解法。文献[9]提出了扩展边界条件的条件数方法。文献[10,11]提出了基于电场积分方程的奇异值分解法, 对广义阻抗矩阵进行额外的处理, 获得唯一

和稳定的散射特性。文献[12]提出了基于电场积分方程的双正交模式分析方法。

本文在前人工作的基础上, 提出了一种求解导体内谐振特性的新方法。该方法利用Inagaki模式, 基于电场积分方程, 在内谐振条件下, 根据Inagaki模式性质^[13-15]将特性分为谐振模式和非谐振模式, 剔除谐振模式后, 即可获得内谐振条件下唯一而且稳定的导体散射特性。文中的Inagaki模是最初由日本学者稻垣在文献[14]中提出, 用来分析天线阵列特性一种模式途径; 本文借助于该模式途径用来消除内谐振, 获得内谐振条件下导体的正确散射特性。该消除内谐振方法具有计算简便和概念清晰等优点。本文分析计算了若干导体结构内谐振条件下的散射特性, 所得的计算结果与公开发表的文献结果或解析解比较, 一致性较好, 从而检验了这一方法的正确性和有效性。

2 基本理论和方法

2.1 内谐振条件下积分方程的不可靠性

散射条件下, 对于表面为 S 的理想导体, 由导体表面的切向电场为零这一边界条件出发可得到电场积分方程^[1]:

$$T_E(\mathbf{J}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i \quad (1)$$

式中 \hat{n} 为导体面上指向导体外部的单位法向矢量, \mathbf{E}^i 是入射电场, \mathbf{J} 为导体表面 S 的面电流密度, T_E 为电场积分算子由下式确定:

$$T_E(\mathbf{J}) = j\omega\mu\hat{n} \times \int_S \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla \right] \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \quad (2)$$

其中 k 为自由空间波数, \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 分别表示坐标原点至场点和源点的距离矢径, $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 表示自由空间的格林函数。单独运用电场积分方程(1)对散射体进行矩量法分析时, 在内谐振频率点及附近, 所得解会出现不唯一或者不稳定的情况。因为这时导体的表面电流由两部分组成:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_r \quad (3)$$

其中 \mathbf{J}_r 为谐振电流, 仅由导体本身结构决定, 而与外加入射电场无关; \mathbf{J}_i 为非谐振电流, 由导体结构和外加入射场共同决定。非谐振电流是由于入射场作用在导体表面而感应产生的, 因而也可称为感应电流, 它也是内谐振条件下导体表面的真实电流分布。其中谐振电流在导体表面满足齐次方程:

$$T_E(\mathbf{J}_r) = 0 \quad (4)$$

即齐次方程(4)存在非零解, 对应的非齐次电场积分方程(1)的解也不唯一。设对应的矩量法矩阵方程为 $[\mathbf{S}]\mathbf{A} = \mathbf{B}$, 这里 $[\mathbf{S}]$ 为广义阻抗矩阵, \mathbf{A} 为待定的电流系数组成的列向量, \mathbf{B} 为广义电压列向量。由于非其次电场积分方程的不唯一, 从而与该电场积分方程对应的矩量法矩阵方程的解也不可靠, 广义阻抗矩阵 $[\mathbf{S}]$ 奇异。实际矩量法运算过程中的存在冗余误差或截断误差, 广义阻抗矩阵并不严格奇异, 而是具有很高的条件数的病态矩阵。理论上来说, 导体表面的谐振电流不在导体外部产生散射场^[5], 内谐振频率点由电场积分方程所得到的外部散射场唯一, 但由于广义阻抗矩阵具有很高的条件数, 因而矩量法分析所得的外部散射场不稳定和不可靠。

同样条件下, 对于表面为 S 的理想导体, 由导体内部无限接近导体表面处的磁场切向分量为零, 可以得出磁场积分方程^[1]:

$$T_H(\mathbf{J}) = \hat{n} \times \mathbf{H}^i \quad (5)$$

其中 \mathbf{H}^i 为入射磁场, 磁场积分算子 T_H 由下式决定:

$$T_H(\mathbf{J}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \lim_{\bar{r} \rightarrow S^+} \hat{n} \times \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla' \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \quad (6)$$

内谐振条件下, 导体表面的谐振电流产生的散射场 \mathbf{H}^S 满足式(4)对应的齐次方程:

$$T_H(\mathbf{J}_r) = 0 \quad (7)$$

对于磁场积分方程方法, 由于谐振电流 \mathbf{J}_r 满足方程:

$$\mathbf{J}_r = \hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \hat{n} \times \mathbf{H}_1 \quad (8)$$

这里 \mathbf{H}_1 表示满足条件 $\mathbf{J}_r = \hat{n} \times \mathbf{H}_1 \neq 0$ 且位于导体外部的磁场, 而 \mathbf{H}_2 为满足条件 $\hat{n} \times \mathbf{H}_2 = 0$, 位于导体内部的磁场。从式(8)可以看出, 谐振电流会产生外部散射场 \mathbf{H}^S 。内谐振频率点, 由于谐振电流的存在, 磁场积分方程方法并不产生唯一的外部散射场。因此, 内谐振条件下对导体外散射场进行

分析时, 磁场积分方程完全失效。

2.2 Inagaki 模式方法

相对于磁场积分方程, 电场积分方程形式简单, 而且适合任何导体结构的离散频率点散射特性分析^[1], 因此本文模式分析过程中仅涉及电场积分方程。通常电磁问题的数学模型可用算子方程表示为

$$T\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (9)$$

其中 T 为线性算子, \mathbf{x} 为定义域内的未知函数, \mathbf{y} 为值域内的激励函数。对于文中散射条件下的电场积分方程来说, T 为电场积分算子, 由式(2)确定, 导体表面的电流分布 \mathbf{J} 为未知函数, 激励函数为 $\hat{n} \times \mathbf{E}^i$ 。

对电场积分方程进行 Inagaki 模式分析。取算子 $T^H T$ 的本征函数组 $\{\mathbf{u}_n\}$ 和函数组 $\{T\mathbf{u}_n\}$ 为展开函数组和加权函数组, 对算子方程(9)进行矩量法离散化处理, 其中 T^H 为 T 的伴随算子。本征函数组 $\{\mathbf{u}_n\}$ 满足算子本征方程

$$T^H T\mathbf{u}_n = \mu_n \mathbf{u}_n \quad (10)$$

函数组 $\{T\mathbf{u}_n\}$ 为正交模式组^[15], 即

$$\langle T\mathbf{u}_m, T\mathbf{u}_n \rangle = \mu_n \delta_{mn} \quad (11)$$

式中 δ_{mn} 表示 Kronecker delta 函数, $\{\mu_n\}$ 为算子 $T^H T$ 的本征值, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 Hilbert 空间上的内积。算子方程的矩量法解为

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}^T [\mathbf{A}]^{-1} \mathbf{V} \quad (12)$$

式中 \mathbf{J} 为待求电流列向量, \mathbf{U} 为展开函数构成的列向量, 上标 T 表示数组转置

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N] \quad (13)$$

式中 $[\mathbf{A}]$ 是 Inagaki 中的广义阻抗矩阵, 也是以算子 $T^H T$ 的本征值 $\{\mu_n\}$ 为对角元素的谱矩阵^[15]

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_N \end{bmatrix} \quad (14)$$

\mathbf{V} 为激励列矢量, 它的元素为

$$v_n = \langle T\mathbf{u}_n, \hat{n} \times \mathbf{E}^i \rangle \quad (15)$$

2.3 内谐振特性分析

内谐振条件下, 理论上电场积分方程(1)对应的齐次方程奇异, Inagaki 模式方法得出的阻抗矩阵 $[\mathbf{A}]$ 中本征值 $\{\mu_n\}$ 会存在零元素, 因而对应的矩阵 $[\mathbf{A}]^{-1}$ 不存在, 即电流的解答不唯一。实际 Inagaki 模式运算过程中存在误差, 在内谐振频率点及其附近, $[\mathbf{A}]$ 中最小的本征值 μ_{\min} 不会严格等于零, 而是一个绝对值很小的数^[16,17], 阻抗矩阵 $[\mathbf{A}]$ 具有很大的条件数, 电流解答不稳定。

Inagaki 模式运算所得导体表面电流, 由一系列与本征值 $\{\mu_n\}$ 对应的模式电流 $\{\mathbf{J}_n\}$ 组成^[15]。

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^N \mathbf{J}_n = \sum_{n=1}^N \frac{\langle T\mathbf{u}_n, \hat{n} \times \mathbf{E}^i \rangle \mathbf{u}_n}{\mu_n} \quad (16)$$

这些电流可以分为谐振模式电流和感应模式电流。其中感应模式电流由外加入射场和导体结构本身两者共同决定; 谐振

模式电流仅与导体本身结构有关,而与外加入射场无关。

当 μ_n 很小时对应的模式电流为谐振模式电流,其他模式电流即为感应模式电流。谐振模式电流并不在导体外部产生散射场^[5, 7],只有感应模式电流才产生外部散射场。剔除谐振电流分量,可获得唯一且稳定的导体散射特性。各模式电流之间相互正交^[15],利用其正交性,将 $[A]^{-1}$ 中与谐振模式 μ_n 相对应的 μ_n^{-1} 用零代替,可以有效剔除谐振电流分量,获得电流和外部散射场唯一和稳定的解。

2.4 Inagaki 模参数计算

剩下的算子 $T^H T$ 的本征值 μ_n 和本征函数组 $\{u_n\}$ 两个参数均可通过矩量法获得。取 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ 为展开函数组和加权函数组。 E 也是本征函数组 $\{u_n\}$ 所生成的线性子空间内的一组基,将 $\{u_n\}$ 以 E 为坐标基底展开,

$$u_n = \sum_{j=1}^N c_j^{(n)} e_j \quad (17)$$

其中 $c_j^{(n)}$ 为向量 u_n 在基底 E 下的展开系数,得出

$$[P]C_n = \mu_n [Q]C_n \quad (18)$$

式中 C_n 为待定系数列矢量, $[P]$ 为 Hermit 矩阵,它的第 i 行第 j 列元素为

$$p_{ij} = \langle Te_i, Te_j \rangle, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

$[Q]$ 为展开函数组的 Gram 矩阵,它的第 i 行第 j 列元素为

$$q_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

当 C_n 被确定,由式(9)可以确定对应于算子 $T^H T$ 的本征函数组,再由以上算法可获得内谐振条件下导体各项散射特性参数。

该消除内谐振方法可以有效地剔除谐振模式,使得用电场积分方程所获得的矩量法解在任何频率点的解答都唯一且稳定。

3 计算实例

为了验证本文方法的正确性和有效性,文中计算了无限长理想导体方柱和圆柱第一谐振频率点时导体电流分布与雷达散射截面,所得结果与文献结果或解析解一致。最后文中还给出无限长理想导体三角柱内谐振点附近的后向散射截面。

3.1 计算实例 1

无限长理想导体方柱的截面为正方形,边长为 d , z 轴与柱体轴长方向平行, A, B, C, D 分别为柱体截面正方形的 4 个顶点, TM 均匀平面波从 AB 边向柱体垂直入射,其结构见图 1。相应的电场积分方程^[1]为

$$E_z(\bar{r}) = \frac{\omega\mu}{4} \iint_C J(r') H_0^{(2)}(k|r-r'|) dl' \quad (21)$$

式中 E^i 为入射电场强度, l 表示柱体截面的围线, r 和 r' 分别为坐标轴原点至场点和源点的距离矢量, $H_0^{(2)}$ 表示第二类零阶 Hankel 函数。对应的雷达散射截面 σ 的公式^[1]为

$$\sigma(\phi) = \frac{k\eta^2}{4} \left| \int_C J_z(x', y') e^{jk(x'\cos\phi + y'\sin\phi)} dl' \right|^2 \quad (22)$$

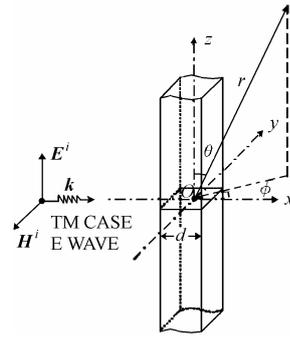


图 1 TM 波入射下无限长理想方柱导体散射示意图
Fig.1 An infinite square cylinder conductor impressed by a TM wave
式中 ϕ 为场点矢径在 xoy 平面上的投影与 x 轴的夹角。在 Inagaki 模本征方程式(10)的矩量法分析中,横截面周线 l 被等分成 200 段。理论上第一内谐振点时 $d/\lambda = \sqrt{2}/2$, 用 Inagaki 模式方法求得的第一内谐振点在 $d/\lambda=0.70775$ 处,其中 λ 为入射波波长。

图 2 给出了第一内谐振点处无限长理想正方柱体的散射特性。剔除谐振电流前的方柱体表面电流分布(图 2(a))和 Sarkar 等人给出的结果^[8]几乎一致; Inagaki 模式法获得的剔除谐振电流后的方柱体表面电流分布(图 2(b))和混合场方法得出的结果也很接近; 剔除谐振电流后的获得的雷达散射截面与混合场方法得出的数值结果基本一致(图 2(c))。从图 2 中可以看出谐振模式电流的幅度比感应模式电流的幅度大得多,因而谐振模式电流对柱体表面电流的影响很大,修正后电流分布和外散射场均唯一并且稳定。

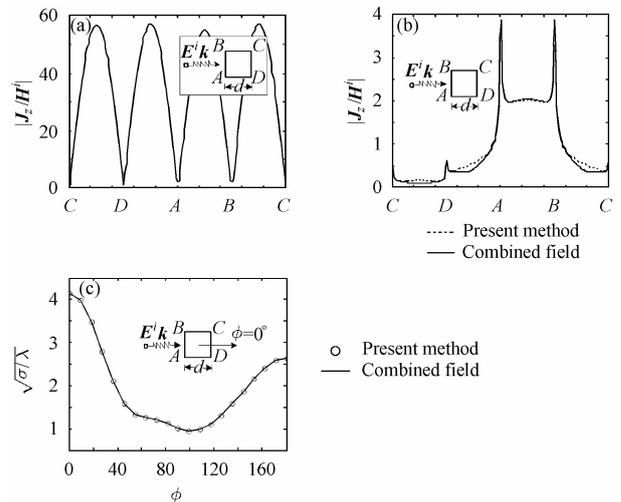


图 2 TM 极化波垂直入射下方柱体的散射特性($d/\lambda=0.70775$)
(a) 剔除谐振电流前的方柱体表面电流分布
(b) 剔除谐振电流后的方柱体表面电流分布
(c) 剔除谐振电流后方柱体雷达散射特性
Fig.2 Scattering for a square cylinder conductor impressed by a TM wave, at $d/\lambda=0.70775$
(a) Current distribution including resonant mode
(b) Induced current distribution without resonant mode
(c) Bistatic RCS obtained from induced current

3.2 计算实例 2

本文又分析了TM极化波垂直入射下无限长圆柱导体的第一内谐振点 $a = 0.6082\lambda$ 处的散射特性,其中 a 为柱体截面圆的半径,截面周线被等分成200段,其结构见图3。利用 Inagaki 模式运算所得较小的本征值 $\mu_{102} = \mu_{103} = 0.00010627$ 和 $\mu_{199} = \mu_{200} = 81.926$, 相对于其他本征值 μ_{102} 和 μ_{103} 很小,因此是谐振模式。根据式(16)该圆柱体的非谐振电流模式解为

$$J_i = \sum_{n=1, n \neq 102, n \neq 103}^N J_n = \sum_{n=1, n \neq 102, n \neq 103}^N \frac{\langle Tu_n, \hat{n} \times E^i \rangle u_n}{\mu_n} \quad (23)$$

相应的谐振电流的模式解为

$$J_r = \sum_{n=102}^{103} J_n = \sum_{n=102}^{103} \frac{\langle Tu_n, \hat{n} \times E^i \rangle u_n}{\mu_n} \quad (24)$$

从式(23)与式(24)看出,由于谐振模式对应的本征值相对于非谐振模式的非本征值要小得多,因此谐振模式电流相对非谐振模式电流幅度很大。图4中的剔除谐振电流前的电流分布 J

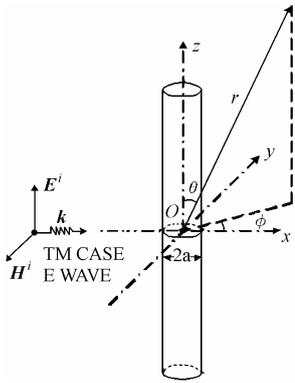


图 3 TM 波入射下无限长理想导体圆柱散射示意图

Fig.3 An infinite circular cylinder conductor impressed by a TM wave

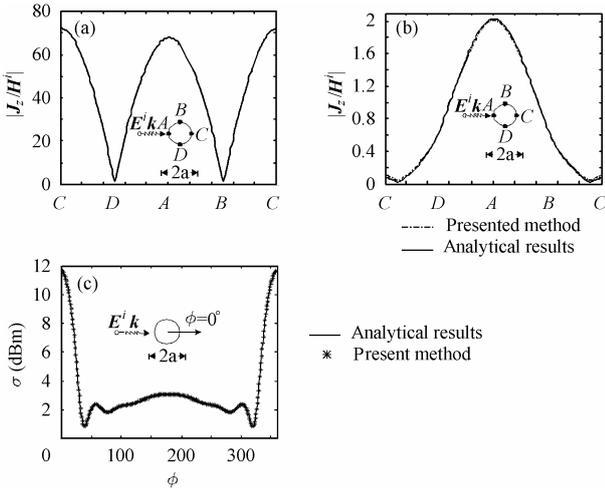


图 4 TM 极化波垂直入射下圆柱体的散射特性($a=0.6082\lambda$)

- (a) 剔除谐振电流前圆柱体表面电流分布
- (b) 剔除谐振电流后圆柱体的电流分布
- (c) 剔除谐振电流后圆柱体的双站散射图

Fig.4 Scattering for a circular cylinder impressed by a TM wave, at $a=0.6082\lambda$

- (a) Current distribution including resonant mode
- (b) Induced current distribution without resonant mode
- (c) Bistatic RCS obtained from induced current

与谐振模式电流 J_r 很接近,以致于很难将他们区分开,他们之间的差值即为导体表面实际电流分布,即 $J_i = J - J_r$, 与前面基本理论一致,该电流分布(图4(b))与解析解基本一致。图4(c)表示圆柱面上修正后电流分布计算得到的双站散射图,并与解析解计算公式^[2]:

$$\sigma = \frac{4}{k} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} e^{jn\phi} \right|^2 \quad (25)$$

得到的结果进行了比较,两者吻合良好。

3.3 计算实例 3

文中还对无限长理想导体三角柱在 TM 波垂直入射下的内谐振特性进行了分析。三角柱的横截面是边长为 a 的等边三角形, TM 波向 BC 边垂直入射,结构见图 5。理论谐振频率点在 $a = (\sqrt{3}/2)\lambda$ 处,当周线的分段数为 120 时,本文方法所得谐振频率点为 $a = 1.156997\lambda$; 当分段数为 200 时,文中方法所得的谐振频率点为 $a = 1.175892\lambda$; 文中以 120 分段数为例。利用本文方法,剔除较小本征值对应的模式后获得三角柱唯一且稳定的散射特性。内谐振频率点附近剔除谐振电流前后所得后向雷达散射截面见图 6, 从图 6 中我们可以看出:在临近谐振频率点处由于受到阻抗矩阵高条件数的影响,雷达散射截面偏离准确值,经过 Inagaki 模式修正后外散射场变得稳定。

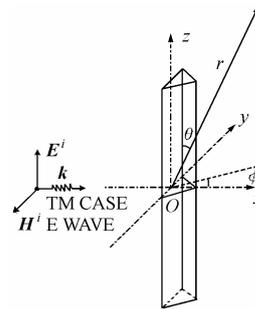


图 5 TM 波入射下无限长理想导体三角柱散射示意图

Fig.5 An infinite triangular cylinder conductor impressed by a TM wave

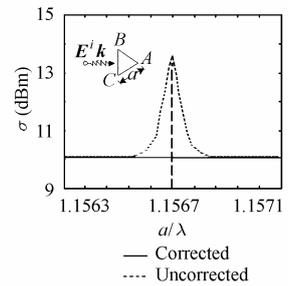


图 6 三角柱体的后向散射截面($a=1.156997\lambda$)

Fig.6 Backward RCS of an infinite triangular cylinder, at the neighborhood of $a=1.156997\lambda$

从以上的计算实例中可以看出:(1)柱体截面周线分段数越多,内谐振频率点与理论值越接近;(2) $\sqrt{\sigma}$ 是电流 J 的连续性泛函,对于 J 在其精确值附近的微小变化并不敏感;(3)在内谐振频率点及其附近都要对电流和雷达散射截面进行修正,才能得到唯一和稳定的结果。

4 结束语

本文提出一种内谐振条件下分析导体散射特性的新方法,该方法应用 Inagaki 模式,基于电场积分方程,分析了内谐振条件下导体的散射特性。内谐振条件下,运用 Inagaki 模式方法,结合 Inagaki 模的性质,将导体的散射特性分为谐振模式和非谐振模式;这些模式之间相互独立,剔除谐振模式后不会影响非谐振模式,可获得导体散射特性唯一且稳定的解。该消除内谐振方法不需要矩阵求逆,具有概念清晰

和计算简便,不受导体结构限制等优点,是一种有效且实用的新方法;丰富的计算实例也验证了本文理论方法的正确性和有效性。

参 考 文 献

- [1] Harrington R F. Field computation by moment methods. New York: Macmillan, 1968: 49-72.
 - [2] Harrington R F. Time harmonic electromagnetic field. New York: McGraw-Hill, 1961: 37-94.
 - [3] Rao S M, Wilton D R, Glisson A W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *IEEE Trans. on Antennas Propagation*, 1982, 30(5): 409-418.
 - [4] Berg P M, Korkmaz E, Aubakar A. A constrained conjugate gradient method for solving the magnetic field boundary integral equation. *IEEE Trans. on Antennas Propagation*, 2003, 51(6): 1168-1176.
 - [5] Mautz J R, Harrington R F. H-field, E-field and combined-field solutions for conducting bodies of revolution. *A.E.U.*, 1978, 32(4): 157-164.
 - [6] Mautz J R, Harrington R F. A combined-source solution for radiation and scattering from a perfectly conducting body. *IEEE Trans. on Antennas Propagation*, 1979, 27(4): 445-454.
 - [7] Yaghjian A D. Augmented electric and magnetic field equations. *Radio Science*, 1981, 16(6): 987-1001.
 - [8] Sarkar T K, Rao S M. A simple technique for solving E-field integral equations for conducting bodies at internal resonances. *IEEE Trans. on Antennas Propagation*, 1982, 30(6): 1250-1254.
 - [9] Klein C A, Mittra R. An application of the condition number concept to the solution of scattering problems in the presence of interior resonant frequencies. *IEEE Succinct Papers*, 1975: 431-435.
 - [10] Canning F X. Singular value decomposition of integral equations of EM and applications to the cavity resonance problem. *IEEE Trans. on Antennas Propagation*, 1989, 37(9): 1156-1163.
 - [11] Canning F X. Protecting EFIE-based scattering computations from effects of interior resonances. *IEEE Trans. on Antennas Propagation*, 1991, 39(11): 1545-1552.
 - [12] 曹伟, 陈劲松. 内谐振条件下导体散射特性的双正交模法分析. *电波科学学报*, 1995, 10(1): 16-22.
 - [13] Inagaki N. Eigenfunctions of Hermitian iterated operator and its application to numerical analysis. Proc. International Symposium on Antennas Propagation, Japan, 1978, (7): 295-298.
 - [14] Inagaki N, Garbacz R J. Eigenfunctions of composite Hermitian operator with application to discrete and continuous radiating systems. *IEEE Trans. on Antennas Propagation*, 1982, 30(7): 571-575.
 - [15] Cao Wei. A unified MoM-based modal formulation with application to EM problems. [PhD. Dissertation], Nagoya Institute of Technology, Japan, 2001.
 - [16] 孙玉发, 徐善驾. 一种求解目标内谐振时散射截面的有效方法. *电波科学学报*, 2001, 16(1): 76-79.
 - [17] 孙玉发, 徐善驾. 基于奇异值分解的方法求解目标内谐振时的散射截面. *电子学报*, 2001, 29(7): 958-960.
- 张云峰: 男, 1976年生, 博士生, 研究方向为计算电磁学及其在信息技术中的应用.
- 姜成贵: 男, 1976年生, 硕士生, 研究方向为电磁场数值计算方法.
- 曹伟: 男, 1939年生, 教授, 博士生导师, 长期从事电磁辐射、微波技术、电磁兼容等学科领域的教学和科研工作.