

相对论修正下的宽电子束聚焦的普遍理论*

周立伟 金伟其 倪国强 史万宏

(北京工业学院, 北京)

摘要 本文由曲线坐标系下的相对论修正普遍轨迹方程出发, 考虑包含阴极物面的宽电子束聚焦的情况, 推导了曲线坐标系下的主轨迹方程与曲近轴轨迹方程, 研究了满足正交条件的近轴系统的特性。曲线坐标系下的细电子束聚焦问题以及非相对论修正的宽电子束聚焦问题均可视为本文的特例。

关键词 电子光学; 电子透镜; 电子束聚焦

一、前言

带电粒子束的聚焦是电子光学基本问题之一, 长期以来受到人们的普遍重视。曲线坐标系下的细电子束聚焦的普遍理论是由 Г. А. Гринберг^[1-3] 和 P. A. Sturrock^[4,5] 于 40 年代至 50 年代用电动力学方法和光程函数法分别建立的。而适用于研究阴极物面电位 $\Phi(s=0)=0$, 且自阴极逸出的电子速度很小而斜率可很大的宽电子束问题的普遍理论, 则是由周立伟等人^[6-8] 在近年来建立的。在文献 [6-8] 中, 由曲线坐标系下的 Lorentz 方程出发, 采用张量表示法, 以逆变形式和协变形式导出了非相对论修正的普遍轨迹方程, 给出了曲近轴轨迹方程, 理想聚焦的正交条件, 讨论了满足正交条件下曲近轴轨迹的理想聚焦性质, 最后讨论了若干实例。

在实际电子光学系统中, 当加速电压高达 5 万伏以上, 甚至 10 万伏时, 电子运动的相对论效应将不能忽略, 必须考虑相对论修正。本文将宽电子束聚焦的普遍理论^[7] 推广到相对论情况, 研究相对论修正下宽电子束聚焦的规律。

在研究宽束电子光学时, 与探讨轴对称阴极透镜相类似^[10], 可以假定相邻轨迹处处满足如下曲近轴条件:

$$p^2(s) = 0 \quad (1)$$

$$\dot{p}^2(s) \ll 1 \quad (2)$$

或严格写为:

$$\frac{m_0(\dot{p}^2 - p_0^2)/2c}{\varepsilon_s + \Phi(1 + \eta\Phi)} \ll 1$$

且 $\Phi(0) = 0$, 但并不一定处处要满足 $p^2(s) \ll 1$ 。这里 s 为曲线轴自物点起算的弧长, $p(s)$ 为相邻轨迹相对于曲轴的距离, 点号和撇号分别表示对时间 t 和弧长 s 的微商。

* 1987 年 7 月 4 日收到, 1987 年 12 月 24 日修改定稿。

二、曲线坐标系下相对论修正的电子普遍轨迹方程

设空间任意曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1)$ 为自物面上 A 点逸出的电子束的曲线轴(主轨迹的矢径), x^1 为由 A 点起算的弧长, 在点 N 作主轨迹曲线的法平面, 其与相邻轨迹 AB^* 的交点 N^* 的位置由点 N 到点 N^* 的矢量 $\mathbf{p}$ 来表达, 如果给定 $\mathbf{p}(s)$, 则相邻轨迹的曲线便可完全确定。

在 N 点引入曲线坐标系 (x^1, x^2, x^3) , 其单位矢量 $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ 为主轨迹在 N 处的切矢量, 主法矢和副法矢。矢量 $\mathbf{p}$ 在 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{b}$ 方向上的投影分量为 x^2 和 x^3 , 如图 1 所示。

于是点 N^* 的相邻轨迹矢径 $\mathbf{r}^*$ 可表为:

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{p} = \mathbf{r} + x^2 \mathbf{n} + x^3 \mathbf{b} \quad (3)$$

设 $\kappa = \kappa(s)$, $\chi = \chi(s)$ 分别为主轨迹的曲率和挠率, 利用微分几何中的 Frenet-Serret 公式, 可得到弧长元的张量表达式为:

$$(ds^*)^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4)$$

其中 g_{ij} 是协变度量张量的元素, 且有

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} (1 - \kappa x^2)^2 + (\chi x^2)^2 + (\chi x^3)^2 & -\chi x^3 & \chi x^2 \\ -\chi x^3 & 1 & 0 \\ \chi x^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

度量张量的行列式值:

$$G = \det |g_{ij}| = (1 - \kappa x^2)^2 \quad (6)$$

由 (5) 式, 可得 (g_{ij}) 的逆矩阵 $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$, 它称为逆变度量张量。

由电动力学中的 Lorentz 方程:

$$d(m\dot{\mathbf{r}}^*)/dt = -e\mathbf{E} - e(\dot{\mathbf{r}}^* \times \mathbf{B}) \quad (7)$$

这里 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为电场强度和磁感应强度矢量, 且 $\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi$, $\mathbf{B} = -\mu_0 \text{grad}\Omega$, μ_0 为磁导率, Φ 为空间电位, Ω 为空间磁标位。可以得到相对论修正下逆变形式的 Lorentz 方程:

$$d(m\dot{x}^l)/dt + m \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ j \end{matrix} \right\} \dot{x}^i \dot{x}^j = e(A^l + B^l), \quad (l = 1, 2, 3) \quad (8)$$

式中 $m = m_0/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 为相对论修正下的电子质量, m_0 和 e 分别为电子的静止质量和电荷; c 为光速; v 为电子速度; $\left\{ \begin{matrix} l \\ i \ j \end{matrix} \right\}$ 为第二类 Christoffel 符号, 且

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ i \ j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right] \quad (9)$$

而 (8) 式中 A^l 和 $B^l (l = 1, 2, 3)$ 可表为:

$$A^l = g^{lj} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j}$$

$$B^l = \mu_0 \left(\dot{x}_j \frac{\partial \Omega}{\partial x^k} - \dot{x}_k \frac{\partial \Omega}{\partial x^j} \right) / \sqrt{G}, \quad (l, j, k = 1, 2, 3)$$

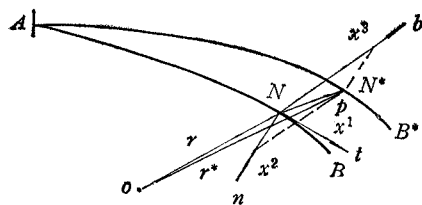


图 1 曲线坐标系, 主轨迹和相邻轨迹

$$\dot{x}_l = g_l \dot{x}^j \quad (10)$$

这里 $x_l (l = 1, 2, 3)$ 为协变坐标。

若令 $\eta = c/2m_0c^2$, $\Phi_* = \Phi + \varepsilon_0$ 为规范化电位, 由电子运动的能量守恒定律还可得:

$$m = m_0(1 + 2\eta\Phi_*),$$

$$mv = \sqrt{2em_0\Phi_*(1 + \eta\Phi_*)} \quad (11)$$

为方便起见, 下面用另一种坐标符号 (s, p_2, p_3) 代替 (x^1, x^2, x^3) , 则由(8)式, 考虑(9)–(11)式, 可得电子在 (s, p_2, p_3) 坐标系中的运动方程:

$$\begin{aligned} & (m_0/e)(1 + 2\eta\Phi_*)\{\dot{s} + [(\kappa\chi p_3 - \kappa'p_2)/(1 - \kappa p_2)] \\ & \quad + 2\eta(d\Phi/ds)/(1 + 2\eta\Phi_*)\}\dot{s}^2 - 2\kappa\dot{s}\dot{p}_2/(1 - \kappa p_2)\} \\ & = \{(\partial\Phi/\partial s) + \chi p_3(\partial\Phi/\partial p_2) - \chi p_2(\partial\Phi/\partial p_3)\}/(1 - \kappa p_2)^2 \\ & \quad + \mu_0\{(\dot{p}_2 - \chi p_3\dot{s})(\partial\Omega/\partial p_3) - (\dot{p}_3 + \chi p_2\dot{s})(\partial\Omega/\partial p_2)\}/(1 - \kappa p_2) \quad (12a) \\ & (m_0/e)(1 + 2\eta\Phi_*)\{\dot{p}_2 + [\kappa - (\kappa^2 + \chi^2)p_2 - \chi'p_3 \\ & \quad + (\kappa\chi p_3 - \kappa'p_2)\chi p_3/(1 - \kappa p_2)]\dot{s}^2 - 2\chi\dot{s}\dot{p}_3 - [2\kappa\chi p_3/(1 - \kappa p_2) \\ & \quad - 2\eta(d\Phi/ds)/(1 - 2\eta\Phi_*)]\dot{s}\dot{p}_2\} \\ & = \{\chi p_3((\partial\Phi/\partial s) + \chi p_3(\partial\Phi/\partial p_2) - \chi p_2(\partial\Phi/\partial p_3)) \\ & \quad + (1 - \kappa p_2)^2(\partial\Phi/\partial p_2)\}/(1 - \kappa p_2)^2 \\ & \quad + \mu_0\{(\dot{p}_3 + \chi p_2\dot{s})(\partial\Omega/\partial s) - [((1 - \kappa p_2)^2 + \chi^2 p_2^2 \\ & \quad + \chi^2 p_3^2)\dot{s} - \chi p_3\dot{p}_2 + \chi p_2\dot{p}_3](\partial\Omega/\partial p_3)\}/(1 - \kappa p_2) \quad (12b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (m_0/e)(1 + 2\eta\Phi_*)\{\dot{p}_3 - [\chi^2 p_3 - \chi'p_2 + (\kappa\chi p_3 - \kappa'p_2)\chi p_2/(1 - \kappa p_2)]\dot{s}^2 \\ & \quad + 2\chi\dot{s}\dot{p}_2/(1 - \kappa p_2) - [2\eta(d\Phi/ds)/(1 + 2\eta\Phi_*)]\dot{s}\dot{p}_3\} \\ & = \{-\chi p_2(\partial\Phi/\partial s) + \chi p_3(\partial\Phi/\partial p_2) - \chi p_2(\partial\Phi/\partial p_3)) \\ & \quad + (1 - \kappa p_2)^2(\partial\Phi/\partial p_3)\}/(1 - \kappa p_2)^2 - \mu_0\{(\dot{p}_2 - \chi p_3\dot{s})(\partial\Omega/\partial s) \\ & \quad - [((1 - \kappa p_2)^2 + \chi^2 p_2^2 + \chi^2 p_3^2)\dot{s} \\ & \quad - \chi p_3\dot{p}_2 + \chi p_2\dot{p}_3](\partial\Omega/\partial p_2)]\}/(1 - \kappa p_2) \quad (12c) \end{aligned}$$

利用能量守恒关系, 可得如下的变换:

$$\begin{aligned} m\dot{x}^l &= mv(ds/ds^*)(dx^l/ds) \\ md(m\dot{x}^l)/dt &= (mv)^2(ds/ds^*)^2 d^2x^l/ds^2 \\ & \quad + \frac{1}{2}(dx^l/ds)(d[(mv)^2(ds/ds^*)^2]/ds) \quad (13) \end{aligned}$$

这里, 当 $l = 1$ 时 $dx^1 = ds$, 且

$$(ds^*/ds)^2 = (1 - \kappa p_2)^2 + (p'_2 - \chi p_3)^2 + (p'_3 + \chi p_2)^2 \quad (14)$$

现在我们假定:

$$I = \Phi_*(1 + \eta\Phi_*)/[(1 - \kappa p_2)^2 + (p'_2 - \chi p_3)^2 + (p'_3 + \chi p_2)^2] \quad (15)$$

由(8)式乘 m 以及(11), (13)–(15)式, 经过繁复的推导, (12a) 可变换成如下的形式:

$$\begin{aligned} dI/ds &= -2I(\kappa\chi p_3 - \kappa'p_2 - 2\kappa p'_2)/(1 - \kappa p_2) + (1 + 2\eta\Phi_*) \\ & \quad \cdot \{(\partial\Phi/\partial s) + \chi p_3(\partial\Phi/\partial p_2) - \chi p_2(\partial\Phi/\partial p_3)\}/(1 - \kappa p_2)^2 \end{aligned}$$

$$+ \sqrt{2eI/m_0} \mu_0 \{ (p'_2 - \chi p_3)(\partial \Omega / \partial p_3) - (p'_3 + \chi p_2)(\partial \Omega / \partial p_2) \} / (1 - \kappa p_2) \quad (16)$$

而 (12b) 和 (12c) 利用 (16) 式可得到两种完全等价的形式:

$$\begin{aligned} & 2I(p''_2 + \kappa - (\kappa^2 + \chi^2)p_2 - \chi'p_3 - 2\chi p'_3) + (p'_2 - \chi p_3)dI/ds \\ &= (1 + 2\eta\Phi_*)(\partial \Phi / \partial p_2) + \sqrt{2eI/m_0} \mu_0 \{ (p'_3 + \chi p_2)[\partial \Omega / \partial s \\ &+ \chi p_3(\partial \Omega / \partial p_2) - \chi p_2(\partial \Omega / \partial p_3)] - (1 - \kappa p_2)^2(\partial \Omega / \partial p_3) \} / (1 - \kappa p_2) \quad (17a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2I(p''_3 - \chi^2 p_3 + \chi'p_2 + 2\chi p'_2) + (p'_3 + \chi p_2)dI/ds \\ &= (1 + 2\eta\Phi_*)(\partial \Phi / \partial p_3) - \sqrt{2eI/m_0} \mu_0 \{ (p'_3 - \chi p_2)(\partial \Omega / \partial s \\ &+ \chi p_3(\partial \Omega / \partial p_2) - \chi p_2(\partial \Omega / \partial p_3)) - (1 - \kappa p_2)^2(\partial \Omega / \partial p_2) \} / (1 - \kappa p_2) \quad (17b) \end{aligned}$$

或者:

$$\begin{aligned} & 2I[\kappa + p''_2 - (\kappa^2 + \chi^2)p_2 - \chi'p_3 - 2\chi p'_3 - (\kappa\chi p_3 - \kappa'p_2 - 2\kappa p'_2) \\ &\quad \cdot (p'_2 - \chi p_3) / (1 - \kappa p_2)] \\ &= (1 + 2\eta\Phi_*) \{ (1 - \kappa p_2)^2(\partial \Phi / \partial p_2) - (p'_2 - \chi p_3)[\partial \Phi / \partial s \\ &\quad + \chi p_3(\partial \Phi / \partial p_2) - \chi p_2(\partial \Phi / \partial p_3)] \} / (1 - \kappa p_2)^2 + \sqrt{2eI/m_0} \mu_0 \{ (p'_3 + \chi p_2) \\ &\quad \cdot [\partial \Omega / \partial s + p'_3(\partial \Omega / \partial p_2) - \chi p_2(\partial \Omega / \partial p_3)] - [(1 - \kappa p_2)^2 \\ &\quad + (p'_2 - \chi p_3)^2](\partial \Omega / \partial p_3) \} / (1 - \kappa p_2) \quad (18a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2I[p''_3 - \chi^2 p_3 + \chi'p_2 + 2\chi p'_2 - (\kappa\chi p_3 - \kappa'p_2 - 2\kappa p'_2)(p'_3 + \chi p_2) / (1 - \kappa p_2)] \\ &= (1 + 2\eta\Phi_*) \{ (1 - \kappa p_2)^2(\partial \Phi / \partial p_3) - (p'_3 + \chi p_2)[\partial \Phi / \partial s + \chi p_3(\partial \Phi / \partial p_2) \\ &\quad - \chi p_2(\partial \Phi / \partial p_3)] \} / (1 - \kappa p_2)^2 - \sqrt{2eI/m_0} \mu_0 \{ (p'_2 - \chi p_3)(\partial \Omega / \partial s \\ &\quad - p'_3(\partial \Omega / \partial p_3) + \chi p_3(\partial \Omega / \partial p_2)) - [(1 - \kappa p_2)^2 \\ &\quad + (p'_3 + \chi p_3)^2](\partial \Omega / \partial p_2) \} / (1 - \kappa p_2) \quad (18b) \end{aligned}$$

以上即为曲线坐标系下相对论修正的普遍轨迹方程。

若在 (9) 式中以磁矢位 $\mathbf{A}$ 来表示磁感 $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$, 也可以类似文献 [8] 得到相应的相对论修正下的普遍轨迹方程。本文下面的推导将以磁标位 Ω 的形式来进行。

三、相对论修正下的主轨迹方程和曲近轴轨迹方程

与文献 [10, 11] 类似, 我们在普遍轨迹方程中引入曲近轴条件 (1), (2) 式, 将 $p_2, p_3, \dot{p}_2, \dot{p}_3$ 作为一级小量来考察 (18a) 和 (18b) 的各项系数。注意到当加速电压高达 10^5V 时, $m/m_0 = 1 + 2\eta\Phi_* \approx 1.196$, 故仍可将 $2\eta\Phi_*$ 作为小量来展开。

首先将 N_* 点处的电位 Φ 和磁标位 Ω 在曲线轴的 N 点处展开, 其表达式为:

$$\begin{aligned} \Phi(s, p_2, p_3) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{0ij} p_2^i p_3^j / i! j! \\ \Omega(s, p_2, p_3) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Omega_{0ij} p_2^i p_3^j / i! j! \quad (19) \end{aligned}$$

其中

$$\Phi_{0ij}(s) = \left(\frac{\partial^{i+j} \Phi}{\partial p_2^i \partial p_3^j} \right) \Big|_{p_2=p_3=0}$$

$$\Omega_{0ij}(s) = \left(\frac{\partial^{i+j}\Omega}{\partial p_2^i \partial p_3^j} \right) \Big|_{p_2=p_3=0} \quad (20)$$

令 $\phi(s) = \phi_{000}(s)$, $\Omega(s) = \Omega_{000}(s)$ 分别为轴上电位和磁标位分布。

现在考虑系数 I , 由于在阴极面处 $\Phi(s=0) = 0$, $1 + \eta\Phi_* = 1 + \eta\varepsilon_0 \approx 1$, 故在起点处, 它可表为

$$(I)|_{s=p_2=p_3=0} = [\varepsilon_0/(1 + p_{20}'^2 + p_{30}'^2)] = \varepsilon_s \quad (21)$$

因之, I 的 $0+1$ 级近似可表为

$$(I)|_{0+1} = [\varepsilon_s + \phi(1 + \eta\phi)](1 + 2\kappa p_2) + (p_2\Phi_{010} + p_3\Phi_{001})(1 + 2\eta\Phi) \quad (22)$$

且(22)式成立的条件是(2)式的严格表达式成立。式中 ε_s 为电子轴间初电位。

利用(19), (20)式, 将(18a) 和(18b) 式(或者(17a) 和(17b) 式)展开为小量的各阶次项, 考虑到曲线轴本身也是电子轨迹, 则由零级项可得主轨迹方程:

$$2\kappa n^2 - \Phi_{010}(1 + 2\eta\phi) + \sqrt{2e/m_0\mu_0 n}\Omega_{001} = 0 \quad (23a)$$

$$\Phi_{001}(1 + 2\eta\phi) + \sqrt{2e/m_0\mu_0 n}\Omega_{010} = 0 \quad (23b)$$

由一级项得曲近轴轨迹方程:

$$d(np_2')/ds = Fp_2 + Np_3 + 2Kp_3' \quad (24a)$$

$$d(np_3')/ds = Rp_3 - Qp_2 - 2Kp_2' \quad (24b)$$

这里 n, F, K, R, N 和 Q 表示为主轨迹曲线 s 的如下函数:

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\varepsilon_s + \phi(1 + \eta\phi)}, \quad K = n\chi + \sqrt{e/8m_0\mu_0}\Omega_{100} \\ F &= n(\chi^2 - \kappa^2) + (1 + 2\eta\phi)\Phi_{020}/2n - (1 + 2\eta\phi)\kappa\Phi_{010}/n + \eta\Phi_{010}^2/n \\ &\quad + \sqrt{e/2m_0\mu_0}[\chi\Omega_{100} - \Omega_{011} - (1 + 2\eta\phi)\Phi_{010}\Omega_{001}/2n^2] \\ N &= (1 + 2\eta\phi)\chi\Phi_{100}/2n + n\chi' - (1 + 2\eta\phi)\kappa\Phi_{001}/n \\ &\quad + (1 + 2\eta\phi)\Phi_{011}/2n + \eta\Phi_{001}\Phi_{010}/n - \sqrt{e/2m_0\mu_0}[\Omega_{002} \\ &\quad + (1 + 2\eta\phi)\Phi_{001}\Omega_{001}/2n^2] \\ R &= n\chi^2 + (1 + 2\eta\phi)\Phi_{002}/2n + \eta\Phi_{001}^2/n \\ &\quad + \sqrt{e/2m_0\mu_0}[\chi\Omega_{100} + \Omega_{011} + (1 + 2\eta\phi)\Phi_{001}\Omega_{010}/2n^2] \\ Q &= (1 + 2\eta\phi)\chi\Phi_{100}/2n - (1 + 2\eta\phi)\Phi_{011}/2n + n\chi' - \eta\Phi_{010}\Phi_{001}/n \\ &\quad - \sqrt{e/2m_0\mu_0}[\Omega_{020} + (1 + 2\eta\phi)\Phi_{010}\Omega_{010}/2n^2] \end{aligned} \quad (25)$$

Φ_{ijk} , Ω_{ijk} 实际对应的是协变微商的轴上值, 只有当 $i = 0$ 时(20) 式才成立, 即寻常微商等于协变微商。

利用(23a) 和(23b) 式, 不难证明系数 N, Q 和 K 之间仍存在下列关系式:

$$dK/ds = (N + Q)/2 \quad (26)$$

这里应该指出: 在求解时, 相对论修正下的主轨迹方程(23a) 和(23b) 与曲近轴轨迹方程(24a) 和(24b) 的各系数必须取相同的 ε_s 值。

(24a) 和(24b) 式的求解可以采用降阶法, 即化为四元一次方程组来求解^[7]。可以证明, 在普遍情况下, 曲近轴系统并不是理想聚焦(点聚焦或线聚焦)系统, 即不存在高斯光学性质。因此下节我们将限于讨论具有理想聚焦性质的曲近轴系统。

另外, 由于电位和磁标位均满足拉氏方程以及主轨迹方程(23), 使得电位和磁标位的

展开系数以及 κ, χ 之间存在下列关系:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{200} + \Phi_{020} + \Phi_{002} &= 0, \quad \Omega_{200} + \Omega_{020} + \Omega_{002} = 0 \\
 \Phi_{200} &= d^2\phi/ds^2 - \kappa\Phi_{010}, \quad \Omega_{200} = d^2\Omega/ds^2 - \kappa\Omega_{010} \\
 d(2\kappa n^2)/ds &= \Phi_{110} - \kappa\Phi_{100} + \chi\Phi_{001} - \sqrt{2e/m_0\mu_0n}[\Omega_{101} \\
 &\quad - \chi\Omega_{010} - (1 + 2\eta\phi)\Phi_{100}\Omega_{001}/2n^2] \\
 \Phi_{101} - \chi\Phi_{010} &= -\sqrt{2e/m_0\mu_0n}[\Omega_{110} - \kappa\Omega_{100} \\
 &\quad + \chi\Omega_{001} + (1 + 2\eta\phi)\Phi_{100}\Omega_{010}/2n^2] \quad (27)
 \end{aligned}$$

(27)式表明, 电位和磁标位及其微商之间的联系, 无论是正设计或是逆设计, 都必须满足上述关系。

上面的结果也可利用文献[8]所给的协变形式的轨迹方程来得到。

四、相对论修正下的曲近轴系统的正交条件

与文献[5, 7]类似, 在 (p_2, p_3) 平面中引入旋转坐标系 (u, v) :

$$\begin{pmatrix} p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (28)$$

式中 γ 为此二坐标系间的夹角, 当系数 n, K, F, R, N 和 Q 满足如下曲近轴系统的正交条件

$$n[(N - Q)(F' - R') - (F - R)(N' - Q')] = 2K[(F - R)^2 + (N - Q)^2] \quad (29)$$

时, 曲近轴轨迹方程 (24a) 和 (24b) 的变量便可分离:

$$d(nu')/ds = Uu \quad (30a)$$

$$d(nv')/ds = Vv \quad (30b)$$

式中

$$\begin{aligned}
 U &= (F + R)/2 + \sqrt{(F - R)^2 + (N - Q)^2}/2 - K^2/n \\
 V &= (F + R)/2 - \sqrt{(F - R)^2 + (N - Q)^2}/2 - K^2/n \quad (31)
 \end{aligned}$$

这里

$$\gamma' = -K/n, \quad \tan 2\gamma = (N - Q)/(F - R) \quad (32)$$

满足(29)式的正交条件所对应的系统称为正交曲近轴系统。

正如 P. A. Sturrock^[9]所指出的, 满足正交条件的曲轴系统可以形成点聚焦或线聚焦的图象。因此正交条件(29)式的意义在于, 它为判断系统是否能够形成理想聚焦给出了一个明确的判据。

(30a) 和 (30b) 式分别为 u 和 v 的二阶线性齐次微分方程, 尽管方程在阴极面处存在奇异点, 但求解方法与轴对称阴极透镜的线性方程并无根本差异。因此 u 和 v 的解可用两个线性独立的特解来表示。令 u_α, u_β 和 v_α, v_β 为 (30a) 和 (30b) 式的两组特解, 它们满足如下初条件:

$$\begin{aligned}
 u_\alpha(0) = v_\alpha(0) &= 0, \quad \sqrt{\varepsilon_s} u'_\alpha(0) = \sqrt{\varepsilon_s} v'_\alpha(0) = 1 \\
 u_\beta(0) = v_\beta(0) &= 1, \quad \sqrt{\varepsilon_s} u'_\beta(0) = \sqrt{\varepsilon_s} v'_\beta(0) = 0 \quad (33)
 \end{aligned}$$

(30a) 和 (30b) 的通解可分别表示为 u_α, u_β 和 v_α, v_β 的线性组合, 从而可讨论曲近轴轨迹的成象性质.

为了使系统获得无象散点聚焦的象, 必须使 $U = V$, 即有

$$F - R = N - Q = 0 \quad (34)$$

或者

$$\begin{aligned} & (1 + 2\eta\phi)(\Phi_{002} - \Phi_{020} + 2\kappa\Phi_{010})/n + n\kappa^2 + \eta(\Phi_{001}^2 - \Phi_{010}^2)/n \\ & + \sqrt{2e/m_0}\mu_0[\mathcal{Q}_{011} + (1 + 2\eta\phi)(\Phi_{001}\mathcal{Q}_{010} + \Phi_{010}\mathcal{Q}_{001})/4n^2] = 0 \\ & (1 + 2\eta\phi)(\Phi_{011} - \kappa\Phi_{001})/n + \sqrt{e/2m_0}\mu_0[\mathcal{Q}_{020} - \mathcal{Q}_{002} \\ & + (1 + 2\eta\phi)(\mathcal{Q}_{010}\Phi_{010} - \mathcal{Q}_{001}\Phi_{001})/2n^2] = 0 \end{aligned}$$

由(29)式知系统必然满足正交条件.

于是在 $\varepsilon_s = \varepsilon_{s1}$ 对应的象面 $s = s_i$ 处, 有

$$\begin{aligned} u_\alpha(\varepsilon_{s1}, s_i) &= v_\alpha(\varepsilon_{s1}, s_i) = 0 \\ u'_\alpha(\varepsilon_{s1}, s_i) &= v'_\alpha(\varepsilon_{s1}, s_i) \end{aligned} \quad (35)$$

放大率之模可表达为:

$$M_u = M_v = M = |1/u'_\alpha(\varepsilon_{s1}, s_i) \sqrt{\varepsilon_{s1} + \phi(s_i)[1 + \eta\phi(s_i)]}| \quad (36)$$

这类系统以 $\varepsilon_s = \varepsilon_{s1}$ 逸出的电子束将在其象面上理想聚焦(点聚焦), 系统具有轴对称电子光学系统的性质.

若曲近轴系统仅满足正交条件(29)式, 并不满足条件(34)式, 则 $U \neq V$, 因而 u_α, u_β 和 v_α, v_β 是不同的, 系统聚焦性能各向异性. 对于 $\varepsilon_s = \varepsilon_{s1}$, 二个方向的放大率之模为:

$$\begin{aligned} M_u &= |1/u'_\alpha(\varepsilon_{s1}, s_{i1}) \sqrt{\varepsilon_{s1} + \phi(s_{i1})[1 + \eta\phi(s_{i1})]}| \\ M_v &= |1/v'_\alpha(\varepsilon_{s1}, s_{i2}) \sqrt{\varepsilon_{s1} + \phi(s_{i2})[1 + \eta\phi(s_{i2})]}| \end{aligned} \quad (37)$$

并且象的位置 s_{i1} 与 s_{i2} 不重合, 即正交电子光学场可能有两个理想聚焦象, 它们都以 $\varepsilon_s = \varepsilon_{s1}$ 相对应. 在 s_{i1} 处电子束在 $\xi_2(s_{i1})$ 方向形成(弧矢)焦线, 而在 s_{i2} 处则在 $\xi_1(s_{i2})$ 方向形成(子午)焦线, 此两者位置之差, 表征了曲近轴系统的象散. 其中

$$(\xi_1(s), \xi_2(s)) = (n(s), b(s)) \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (38)$$

即实际 $\xi_1(s_{i2})$ 和 $\xi_2(s_{i1})$ 不一定正交.

当加速电压不是很大时, 可以忽略相对论效应, 则在前面的所有公式中略去包含 η 的项, 就得到文献[7]所得的非相对论形式的宽电子束聚焦的公式. 即文献[7]所得结果是本文的一个特例. 并且本文的结果也可以推广到研究细电子束聚焦的问题.

与文献[7]类似, 可以证明: 对于主轨迹为直轴且旋转对称的情况, 由本文公式可以推得文献[11]所给的电磁复合聚焦阴极透镜近轴轨迹的线性方程和转角公式. 对于静电阴极透镜的轴外轨迹可推得文献[11]中所给的轴外主轨迹方程和曲近轴轨迹方程. 并且这些系统均为正交曲近轴系统.

五、结 论

(1) 本文研究了曲线坐标系下相对论修正的宽电子束聚焦的普遍理论。推导了电子束的主轨迹方程与曲近轴轨迹方程, 给出了曲近轴系统的正交条件。

(2) 本文的研究说明在相对论形式下, 同样只有满足正交条件的曲近轴系统, 且自阴极物面逸出的宽电子束, 其主轨迹与相邻轨迹取同一 ε 值时, 才具有理想聚焦(点或线聚焦)的性质。

(3) 非相对论形式的宽电子束问题可以看作本文结果的一个特例, 并且本文结果还可推广到曲轴细电子束聚焦问题。因而本文可基本包含目前实际中广泛使用的电子光学问题, 发展了电子光学理论。

参 考 文 献

- [1] Г. А. Гринберг, Избранные Вопросы Математической Теорией Электрических и Магнитных Явлений, Изд. АН СССР, М-Л. 1948.
- [2] Г. А. Гринберг, ДАН СССР, 37(1942), 197—204; 295—303; 38(1943), 89—96.
- [3] Г. А. Гринберг, ЖТФ, 13(1943), 361—388.
- [4] P. A. Sturrock, Static and Dynamic Electron Optics, Cambridge at The University Press, 1955.
- [5] P. A. Sturrock, The Imaging Properties of Electron Beams in Arbitrary Static Electromagnetic Fields, *Phil. Trans.*, A245(1952), 155—187.
- [6] Zhou Liwei, Optics of Wide Electron Beam Focusing Electron Optical System, SEM, Inc., (1984), 45—62.
- [7] Zhou Liwei, A Generalized Theory of Wide Electron Beam Focusing, Advances in Electronics and Electron Physics, Vol. 64 B, (1985), 575—589.
- [8] Zhou Liwei, Ni Guoqiang, Qiu Baicang, Tensor Analysis of Electron Motion in Curvilinear Coordinate Systems, Proceeding of the International Symposium on Electron Optics, Beijing, Sept. 9—13, 1986.
- [9] 西门纪业, 物理学报, 13(1957), 339—356.
- [10] 周立伟, 艾克聪, 潘顺臣, 物理学报, 32(1983), 376—391.
- [11] 方二伦, 冯炽涛, 周立伟, 光电技术, 1980年, 第2—3期, 第71—81页.

ON THE RELATIVISTIC GENERALIZED THEORY OF WIDE ELECTRON BEAM FOCUSING

Zhou Liwei Jin Weiqi Ni Guoqiang Shi Wanhong

(Beijing Institute of Technology, Beijing)

ABSTRACT Based on the relativistic general trajectory equations solved by the tensor method in a Frenet local coordinate system, considering the characteristics of wide electron beam focusing possessing a cathode surface, equations of the principal trajectory and the curvilinear “paraxial” trajectory are deduced. The characteristics of the curvilinear “paraxial” system satisfying the orthogonal condition are studied. Problems concerning narrow electron beam focusing or non-relativistic wide electron beam focusing in a curvilinear coordinate system can be regarded as special cases thereof.

KEY WORDS Electron optics; Electron lenses; Electron beam focusing