

基于正交冗余采样的超分辨信号谱估计¹

李 阳 戴博伟* 肖艳霞** 梁立万 潘伟峰 陈雅琴 冯正和

(清华大学电子工程系微波与数字通信国家重点实验室 北京 100084)

*(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

** (北京航空航天大学自动控制系统 北京 100083)

摘 要 该文提出了一种通过冗余采样进行信号谱估计的新方法, 它充分利用冗余采样产生的频谱带限特性, 通过对自相关矩阵进行秩 1 分解的方法来获得信号谱的超分辨估计。与 MUSIC、AR 等其他超分辨方法相比, 这种方法具有更低的信噪比门限和更高的分辨力。

关键词 谱估计, 超分辨力, 正交冗余采样

中图分类号 TN911.23

1 引 言

估计噪声中的正弦信号频率是在信号检测中经常遇到的问题。随着当前对目标成像、分类和识别等需求的增长, 在信号检测中对多目标的分辨力提出了越来越高的要求。在传统的 FFT 分析或相关分析中, 目标分辨力被信号采样持续时间或系统发射信号带宽所限制 (如调频连续波 (FMCW) 雷达系统), 为提高分辨力只能通过增大信号采样持续时间或加大信号带宽, 这将导致系统实现难度增大甚至受限于实际条件无法实现。目前信号谱估计的超分辨算法有许多种, 可分为两类: 一类为参数模型法, 代表性的算法如: AR 模型法; 另一类为特征值法, 代表性的算法如: MUSIC 法^[1]。但这些算法对信噪比要求较高, 而且分辨能力也不尽如人意。

针对在实际大多数应用中这些信号往往分布带宽相对较窄的特点, 当前的技术已可以容易地实现远高于 Nyquist 频率的采样, 即冗余采样。这意味着被分析的信号频率将只分布在整个频率域的一小部分, 成为一种有关于信号频带先验信息的信号。由于带限连续信号是全平面解析的, 更多的采样点将有利于它的解析延拓, 但目前的谱估计算法还无法利用这种冗余采样所获得的好处。我们为此提出了一种基于对自相关矩阵进行秩 1 分解的方法来利用这种冗余采样信号的特点, 并通过 Hopfield 神经网络能量函数的变换, 将这个分解问题转化成一个简单的迭代问题来求解。经计算机仿真实验研究并与两种典型超分辨算法: AR、MUSIC 法比较, 结果表明这种处理方法有较小的运算量、更强的分辨能力和更低的信噪比门限。

2 冗余采样信号模型

我们考虑一般情况, 设信号频率分布在一定频带内, 此时采样不再应用带通 Nyquist 采样而用冗余采样, 使采样频率直接为信号最高频率的两倍以上, 这样可以简化带通 Nyquist 采样后的重建分析且不影响冗余采样的效果。在经过 I/Q 信道采样和滤波处理后的信号序列可表示为

$$Y = [y(0), y(1), \dots, y(N-2), y(N-1)]^T, \quad y(k) = \sum_{i=1}^L a_i \exp\{j(2\pi f_i k + \varphi_i)\} + n(k) \quad (1)$$

其中 L 为信号频率个数, a_i , f_i , φ_i 分别为信号频率的幅度、归一化频率和相位, $n(k)$ 为噪声, N 为采样点数。这里频率和噪声主要功率都分布在 $[f_0, f_1]$ 内。

¹ 2000-09-25 收到, 2001-09-10 定稿

国家“863”项目 (863-317-03-01-15-99) 和国家自然科学基金 (批准号: 69871014) 资助

设序列平稳且噪声以及各频率间互不相关, 则可推得理论上 Y 的相关矩阵为下式^[1]:

$$R_Y = E\{YY^H\} = \sum_{i=1}^L a_i^2 s_i s_i^H + \sigma_w I \quad (2)$$

这里 $s_i = [1, \exp(j2\pi f_i), \dots, \exp((N-1)(j2\pi f_i))]$, $s_i^H = \bar{s}_i^T$, σ_w 为噪声功率. 我们可以将信号频率估计问题看作从 R_Y 中估计 L 和 s_i 的问题.

3 基于信号频率矩阵分解的信号处理方法

在 R_Y 中, 信号反映在所有自相关矩阵的元素上, 对角线元素仅反映信号的总功率并不反映频率信息; 而噪声则集中反映在对角线元素上. 考虑到这个特点, 为了有效地抑制噪声, 将自相关矩阵的对角线设置为 0 而获得的新矩阵 R . 矩阵 $R_Y - \sigma_w I = R + e_0 I$ 可分解为一系列秩 1 矩阵 $s_i s_i^H$ 之和, 分解的系数表示了该频率上信号的功率, 这里 e_0 为信号功率.

由于 L 是个未知的值, 而且秩 1 矩阵 $s_i s_i^H$ 之间也并不正交, 因此这个分解问题是很难求解的. 设我们所需精度为 δf , 令 $M_j = [(f_{j1} - f_{j0})/(\delta f)] + 1$, 使 M 个信号在可能存在信号的频率范围 $[f_0, f_1]$ 内均匀分布 ($M \gg L$), 即 $f_i = 2\pi[f_{j0} + (i-1)(f_{j1} - f_{j0})/(M_j - 1)]$ 这样信号的个数由未知变为已知. 我们可以根据分解后的信号功率判断这个频率点上是否真的存在信号. 由于我们通过冗余采样已知信号频带分布的先验信息, 因此 M 的值将不会很大.

而后我们采用优化的方法来求解分解系数. 定义 ER 如下:

$$\begin{aligned} \text{ER} &= \left\| R + e_0 I - \sum_{i=1}^L a_i^2 S_i S_i^H \right\|^2 F + \lambda \left(\sum_{i=1}^L a_i^2 - e_0 \right)^2 \\ &= \left\| R + e_0 I - \sum_{i=1}^M p_i S_i S_i^H \right\|^2 F + \lambda \left(\sum_{i=1}^M p_i - e_0 \right)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

这里 R 由自相关矩阵实测值获得, p_i 对应于 a_i^2 , λ 为罚函数因子. 显见信号的真实谱值将使 ER 获得最小值, 而且当 $M \leq 2N - 1$ 时仅有信号的真实谱值可以使 ER 达到最小 (见后面性能分析). 我们对 ER 进行推导, 可得

$$\begin{aligned} & \left\| R + e_0 I - \sum_{i=1}^M a_i^2 s_i s_i^H \right\|^2 F + \lambda \left(\sum_{i=1}^M p_i - e_0 \right)^2 \\ &= \text{tr} \left[\left(R + e_0 I - \sum_{i=1}^M p_i s_i s_i^H \right) \left(R + e_0 I - \sum_{i=1}^M p_i s_i s_i^H \right)^H \right] + \lambda \left(\sum_{i=1}^M p_i - e_0 \right)^2 \\ &= \text{tr}(RR^T) + 2e_0 \text{tr}(R) + ne_0^2 + \text{tr} \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M p_i p_j (s_i s_i^H)(s_j s_j^H) \right] \\ & \quad - \text{tr} \left\{ \sum_{j=1}^M p_j [(s_j s_j^H)(R + e_0 I) + (R + e_0 I)(s_j s_j^H)^H] \right\} + \lambda \left(\sum_{i=1}^M p_i - e_0 \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr} \left\{ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M p_i p_j s_i^H s_j \text{tr}(s_i s_j^H) \right\} - 2 \text{tr} \left\{ \sum_{j=1}^M p_j (s_j s_j^H) (R + e_0 I) \right\} \\
&\quad + \text{tr}(RR^T) + 2e_0 \text{tr}(R) + (n + \lambda) e_0^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M p_i p_j \lambda - \sum_{i=1}^M p_i 2\lambda e_0 \\
&= -1/2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M -2p_i p_j (|s_i^H s_j| + \lambda) - \sum_{i=1}^M p_i 2(s_i^H R s_i + \lambda e_0) \\
&\quad + \text{tr}(RR^T) + (n + 2 + \lambda) e_0^2 + 2e_0 \text{tr}(R) \\
&= -1/2 p^T T_A p - p^T C_A + \text{tr}(RR^T) + (\lambda + n + 2) e_0^2 + 2e_0 \text{tr}(R) \quad (4)
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
T_{Aij} &= -2(|s_i^H s_j| + \lambda) = -2\left(\frac{\sin^2(N\alpha(j-i))}{\sin^2(\alpha(j-i))}\right) + \lambda; \quad C_{Ai} = 2s_i^H R s_i + 2\lambda e_0; \quad \alpha = \pi \frac{(f_1 - f_0)}{M-1}; \\
\theta &= 2\pi(f_0 - \frac{f_1 - f_0}{M-1}); \quad P = [p_1, p_2, \dots, p_M] \geq 0 \text{ 为待求量.}
\end{aligned}$$

将这个表达式与 Hopfield 神经网络的能量函数对比, Hopfield 神经网络能量函数形式如下 [2-4]:

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} q_i q_j - \sum_{i=1}^N I_i q_i = -\frac{1}{2} Q^T T Q - Q^T I \quad (5)$$

比较 (4) 式和 (5) 式, 可见如令: $T = T_A$; $I = C_A$, 则 ER 相当于能量函数, 只是多了最后一个常数项 $\text{tr}(RR^T) + 2e_0 \text{tr}(R) + (\lambda + n + 2) e_0^2$, 而这并不会影响能量函数的最小化. 根据 Hopfield 神经网络理论, (4) 式的能量函数的极小问题在 T 为对称阵, 神经元映射函数 f 为单调增函数时与采用

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \sum_{j=1}^N T_{ij} q_j + I_i \\ q_i &= f(u_i) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

的动态方程求稳定值问题等价, 且随着时间的演变, 在状态空间中网络总是朝着能量函数减少的方向运动. 这样可以用解 (6) 式差分方程组的方法求得 ER 的极小值. 但解差分方程组仍然有些复杂, 为此取

$$f(u) = \begin{cases} Au, & u > 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$$

这样 (6) 式化为

$$\left. \begin{aligned} u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)} &= \left(\sum_{j=1}^M T_{ij} q_j^{(k)} + I_i \right) \delta t \\ q_i^{(k+1)} &= A u_i^{(k+1)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将 (6) 式中的 $q_i = f(u_i)$ 代入 (7) 式可得

$$q_i^{(k+1)} = q_i^k + A \left[\sum_{j=1}^M T_{ij} q_j^{(k)} + I_i \right] \delta t \quad (8)$$

这样直接用上式进行迭代即可获得最终结果, 避开了差分方程组. 由于在迭代算法实现中将连续系统变为离散系统处理, 要想保持系统稳定收敛对 A 将有所限制. 考虑到

$$\begin{aligned} \Delta q_i^{(k)} &= q_i^{[k+1]} - q_i^{(k)} = A \left[\sum_{j=1}^M T_{ij} q_j^{(k)} + I_i \right] \delta t \\ \Delta E_k &= - \left[\sum_{j=1}^M T_{kj} q_j^{(k)} + I_k \right] \Delta q_i^{(k)} - \frac{1}{2} T_{kk} \Delta q_i^{(k)} \Delta q_i^{(k)} \\ &= -(\Delta q_i^{(k)})^2 \left[\frac{1}{A \delta t} + \frac{T_{kk}}{2} \right] \end{aligned}$$

可见只有当 $[1/(A \delta t) + T_{kk}/2] \geq 0$ 才能保证系统能量函数的变化 $\Delta E_k \leq 0$, 因此 A 与 Δt 的选择是与 T 有关的. 当上述条件满足时, 有 $\Delta q_k = 0 \rightarrow \Delta E_k = 0$ 可见. 网络的发展结果是使 E 达到极小并稳定于此点, 从而获得信号功率谱的估计. 令 $\lambda_k = A \delta t$, 则对于 λ_k 的要求是满足

$$0 < \lambda_k < 2/T_{kk} < 1/N^2 \quad (9)$$

考虑到 λ_k 反映的物理意义为运算放大器增益 A , 当 A 大时有利于加快收敛速度, 而 A 小可以减小偏差. 因此 λ_k 最初迭代取大一些随迭代进行而减小.

在实际算法实现中罚函数因子 λ 的值很难选取, 它与问题的规模和迭代中收敛的情况都有关系. 本文采用在迭代中不考虑 λ , 而对每次迭代结果计算其能量偏差进行均衡和补偿. 这等效于在神经网络输出与反馈输入之间加了一个能量约束网络. 仿真计算表明这种实现方式可以获得稳定的收敛值.

4 方法性能分析

(1) 算法的分辨极限为 $f_1 - f_0/N$. 容易证明 $s_i s_i^H$ 构成的矩阵组的线性相关性与 s_i 构成的向量组的线性相关性是等价的, 而后者线性无关的条件为 $M \leq 2N - 1$. 因此当 $M \leq 2N - 1$ 时, R 的分解将是唯一的, 分解获得的频率值就是信号的真实谱值. 而当 $M > 2N$ 时, R 的分解将有无穷多组. 这个条件限定了在这种定义下最小的分辨为 $f_1 - f_0/N$. 如果我们没有关于频率范围的信息, 这个极限就是 FFT 的极限.

(2) 算法的计算量取决于 M , 算法的估计精度取决于 $f_1 - f_0/M - 1$. 这使该算法可有效利用关于信号频率范围的先验信息. 许多系统具有这个特点, 如在 FMCW 系统中系统采样频率都远高于信号频率而且常采用距离分段技术, 这使观测频率范围远小于整个频率域, 由此可大大降低对 M 的要求, 减少计算量. 而其它谱估计方法主要的计算量取决于序列长度 N , 信号频率范围的先验信息对计算量价值不大.

(3) 算法是可随 R 的变化实时修正的. 在许多系统对同一目标一般要进行多个周期的扫描, 多次采样的结果可改善对 R 的估计, 我们希望算法能边扫描边处理已采样的数据, 新的采样的数据可以直接利用过去的处理结果. 对于本文算法, 在 R 修正过程中 T_A 并不受影响, 它只影响 $I_i = 2\text{Re}(s_i^H R s_i)$, 因此可以直接在前次迭代结果上继续迭代, 即它可以一边迭代一边修正. 而对于基于特征分解的算法, 原始数据引起的偏差修正则是数值分析中一个非常困难至今尚未解决的问题.

(4) 算法可通过 FIR 数字滤波简化前端滤波器实现。冗余采样导致采集信号带宽的增大, 信噪比恶化, 可采取两种方法克服: 一种是采样前预滤波, 这是 Nyquist 采样的常规做法。另一种方法是在采集后应用频带的先验带宽信息对信号进行 FIR 带通滤波去除通带外的干扰与噪声, 由于冗余采样后采样序列将增长, 因此可采用高阶 FIR 滤波器实现高性能滤波, 以得到与 Nyquist 采样相仿的信噪比, 这样前端滤波器实现的难度大为降低。

5 仿真结果及分析

以下面的数据序列 $X(n)$ 检测这种算法的性能:

$$X(n) = A_1 \cos[2\pi f_1 n] + A_2 \cos[2\pi f_2 n + 2\pi/3] + N(n)$$

这里为 A_1, A_2 信号幅度, $N(n)$ 为白噪声。

首先研究这个算法在不同信噪比下的方差与分辨概率的统计性能。设信号是等功率的, 即 $A_1 = A_2$ 。抽样序列长度取 100, 此时 FFT 分析的分辨力极限为 0.01。设频率分布范围为 0.15~0.25, 用 81 个神经元表示 0.15~0.25 范围内等间隔频率。取两个信号归一化频率为 0.2, 0.205 和 0.2, 0.2025, 即分别为 FFT 极限的 1/2 和 1/4。用本文提出的方法、AR 和 MUSIC 分别进行 1000 次 Monte-Carlo 计算, 统计结果如图 1 所示。这里 AR 和 MUSIC 方法的谱峰搜索函数分别为

$$P_{AR}(f) = \frac{T\sigma_w^2}{N^2 |1 + \sum_{i=1}^p a_i \exp(-j2\pi i f)|^2}, \quad P_{MUSIC}(f) = \frac{1}{\left| \sum_{i=p+1}^M |e^H(f) v_i|^2 \right|}$$

这里 v_i 为噪声空间的特征向量, a_i 为 AR 模型系数, p 为信号个数。 $e^H(f) = [1, \exp(j2\pi f_1), \dots, \exp(j2\pi f_i N)]^T$ 。

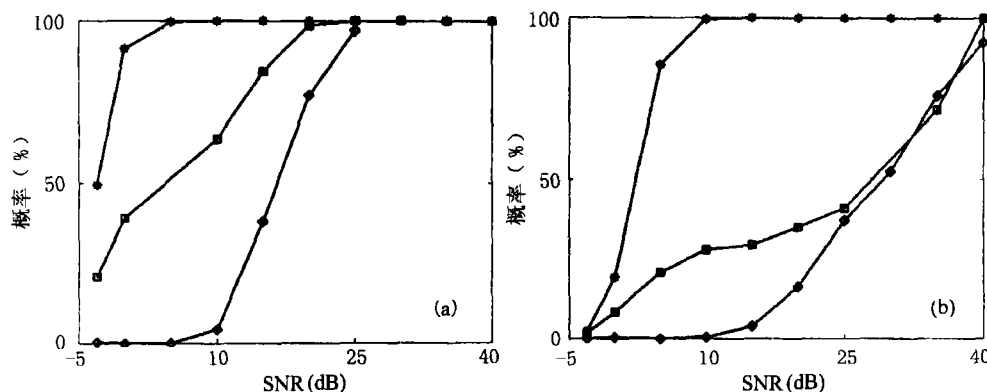


图 1 三种方法在不同信噪比下分辨概率曲线

(a) 在 $f_1 - f_0 = 0.005$ 条件下结果 (b) 在 $f_1 - f_0 = 0.0025$ 条件下结果

(* 为冗余采样方法的结果, □ 为 MUSIC 方法处理结果, ◇ 为 AR 方法处理结果)

从图中可以看到, 相同信噪比下, 冗余采样方法分辨概率总是高于其他两种方法。在 $f_1 - f_0 = 0.005$ 条件下, 为达到分辨概率大于 80%, 冗余采样方法对信噪比的要求为 0dB, 而 MUSIC 方法为 12dB, AR 方法为 20dB。冗余采样方法的信噪比阈值要较其他两种方法低 12dB 以上。在目标频率进一步接近 $f_1 - f_2 = 0.0025$ 时, 为达到分辨概率大于 80%, 三种方法信噪比

要求分别为 5dB, 32dB, 32dB. 冗余采样方法的信噪比阈值要较其他两种方法低 27dB. 可见冗余采样方法具有高的分辨力, 可在低信噪比条件下工作. 在图 2 中分别给出了两种情况下三种方法分辨的典型例子.

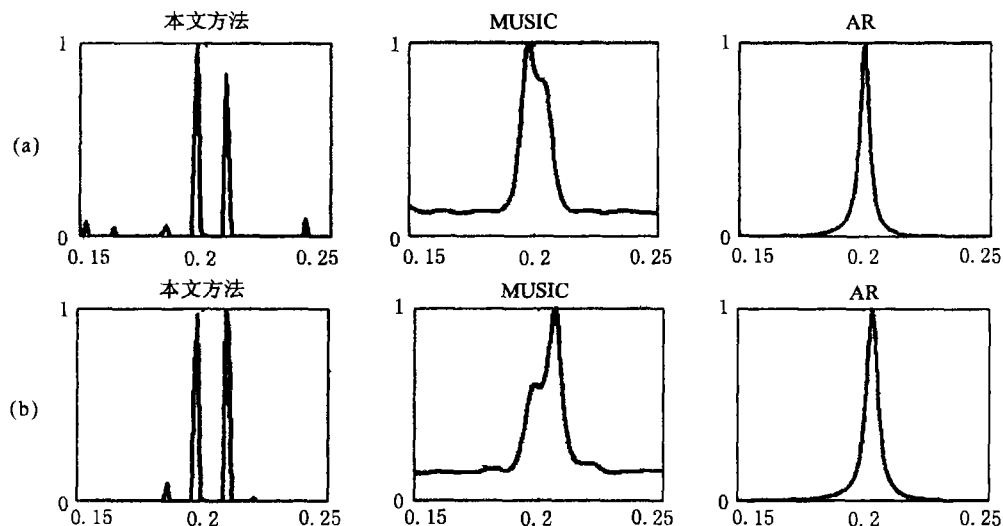


图 2 应用 3 种方法进行分辨的两个典型例子

(a) 在 $f_1 - f_0 = 0.0025$, $\text{SNR} = 5\text{dB}$ 条件下结果 (b) 在 $f_1 - f_0 = 0.005$, $\text{SNR} = 0\text{dB}$ 条件下结果

进一步用 Monte-Carlo 法研究算法在上述两种情况下, 不同信噪比下方差的统计性能. 计算结果如图 3 所示.

从图中可以看到, 在 $f_1 - f_0 = 0.005$ 条件下, 冗余采样方法的方差性能在相同信噪比下好于 AR 方法, 在信噪比低时好于 MUSIC 方法, 在信噪比高时略逊于 MUSIC 方法. 在 $f_1 - f_0 = 0.0025$ 时, 冗余采样方法的方差性能在相同信噪比下好于其他两种方法.

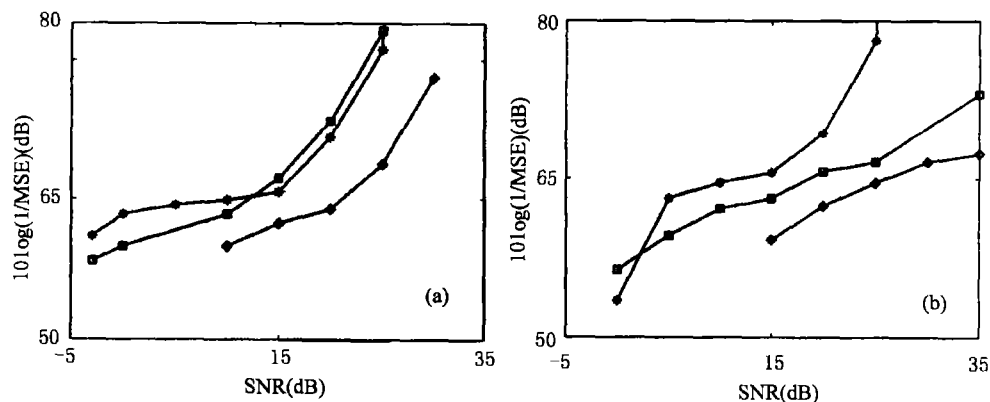


图 3 3 种方法在不同信噪比下方差曲线

(a) 在 $f_1 - f_0 = 0.005$ 条件下结果 (b) 在 $f_1 - f_0 = 0.0025$ 条件下结果

(* 为冗余采样方法的结果, □ 为 MUSIC 方法处理结果, ◇ 为 AR 方法处理结果)

6 结 论

综合上述可以看到, 本文提出的基于冗余采样的信号谱估计方法, 它充分利用冗余采样产生的有限带宽的特性, 计算量小, 可满足系统实时修正的要求, 具有超强的分辨能力, 在低信噪比时有良好性能, 是一种有效的信号处理的方法. 事实上, 具有关于频率分布存在先验信息的信号在信号检测中是经常遇到的信号类型, 这种方法可适用于任何存在频率发布先验信息的信号.

参 考 文 献

- [1] Xiao Xian-Ci, Modern Spectrum Estimation: Theory and Application, Harbin, Harbin Institute of Technology Press(肖先赐, 现代谱估计——原理与应用, 哈尔滨, 哈尔滨工业大学出版社), 1991, 20-113.
- [2] J. Hopfield, Neural network and physical systems with emergent collective computational abilities, Proc. Natl Acad. Sci. USA, 1982, 79, 2554-2558.
- [3] R. D. Jones, Y. C. Lee *et al.*, Function approximation and time series prediction with neural network. Proc.Int.Joint Conf. Neural Network, San Diego, 1990, 1, 649-665.
- [4] Li Yang, Feng Zhenghe, Xiao Yanhong, Huang Jingyu, A neural network algorithm for signal processing of LFM CW or LFSCW, 1999 Asia Pacific Microwave Conference, Singapore, 1999, 900-903.

SUPER-RESOLUTION SPECTRUM ESTIMATION BASED ON ORTHOGONAL REDUNDANCY SAMPLING

Li Yang Dai Bowei* Xiao Yanxia** Liang Liwan

Pan Weifeng Chen Yaqin Feng Zhenghe

(State Key Lab. on Microwave & Digital Comm., Tsinghua Univ., Beijing 100084, China)

*(Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

** (Dept. of Autom. Contl, Beijing Univ. of Aeronaut. & Astronaut., Beijing 100083, China)

Abstract A novel method based on orthogonal redundancy sampling is proposed for harmonics estimation, which utilizes orthogonal redundancy sampling to obtain a signal with the information of its frequency range, and decomposes signal's auto-correlation matrix into the summation of rank-1 matrixes to estimate frequency of harmonics with the information. The results are compared with that of MUSIC and AR algorithms, and find that this method has a lower SNR threshold and higher range resolution.

Key words Spectrum estimation, Super-resolution, Orthogonal redundancy sampling

李 阳: 男, 1973 年生, 工学博士, 主要从事无线通信及信号处理的科研工作.

戴博伟: 男, 1973 年生, 工学博士, 主要从事雷达及信号处理的科研工作.

肖艳霞: 女, 1977 年生, 硕士生, 专业为自动控制.

梁立万: 男, 1975 年生, 工学硕士, 主要从事雷达及信号处理的科研工作.

潘伟峰: 男, 1976 年生, 硕士生, 专业为电磁场与微波技术.

陈雅琴: 女, 1946 年生, 副教授, 主要从事高频电子线路与系统的教学与科研工作.

冯正和: 男, 1945 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事微波毫米波技术及无线通信的教学与科研工作.