第 3 卷 第 1 期
1981 年 1 月

电 子 学 通 讯
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 3, No. 1
Jan., 1981

按门限判决规则检测调相二进码时的错误概率*

陈 捷
（中国科学院电子学研究所）

提 要

本文计算出伪随机码测距系统中按门限判决规则检测调相二进码时的错误概率，并与极大似然判决规则检测的结果进行了比较．文章指出：在相同条件下，从统计平均角度来看，按门限判决规则与按极大似然判决规则检测的结果相差不多；即使按最长捕获时间计算，前者检测结果也只不过比后者差 3 分贝．

通常，在伪随机码测距系统中，测距接收机采用本地码步进相关、判决来完成测距码的捕获，从而进行距离测量．判决过程除采用极大似然判决规则外，往往为了简化设备，也采用门限判决规则．采用门限判决规则的码相关捕获方案之一见图 1．输入到测距接收机的中频测距码信号为

$$S_i(t) = a\cos[\omega_c t + \Delta\varphi C(t)] \tag{1}$$

其中 a 为中频信号振幅，ω_c 为中频载频，$\Delta\varphi$ 为调制指数，$C(t)$ 为取值 ± 1 的二进制测距码．输入窄带高斯噪声为

$$n_i(t) = n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t \tag{2}$$

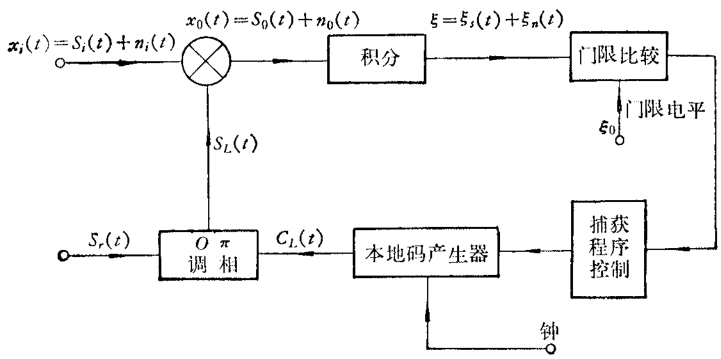

图 1 门限判决规则的码相关捕获方案之一

且 $\langle n_c\rangle = \langle n_s\rangle = \langle n_i\rangle = 0$ 以及 $\langle n_c^2\rangle = \langle n_s^2\rangle = \langle n_i^2\rangle = \sigma_n^2 = N_0B$，此处符号〈 〉表示求

* 1979 年 4 月 25 日收到．

均值，N_0 为噪声功率谱密度，B 为噪声带宽.

由中频载波锁相环提供的中频参考信号为

$$S_r(t) = -\sin\omega_c t \tag{3}$$

因此经相位开关调制后的输出参考信号为

$$S_L(t) = -C_L(t)\sin\omega_c t \tag{4}$$

式中 $C_L(t)$ 为测距接收机的本地码. 因此，乘法器输出为

$$\begin{aligned} x_0(t) &= S_0(t) + n_0(t) \\ &= \frac{a}{2}\sin\Delta\varphi\cdot C_L(t)C(t) + \frac{1}{2}C_L(t)n_s(t) \end{aligned} \tag{5}$$

再经积分器积分 T_i 时间后输出为

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^{T_i} S_0(t)\,dt + \int_0^{T_i} n_0(t)\,dt \\ &= \int_0^{T_i}\frac{a}{2}\sin\Delta\varphi\cdot C_L(t)C(t)\,dt \\ &\quad + \int_0^{T_i}\frac{1}{2}C_L(t)n_s(t)\,dt \end{aligned} \tag{6}$$

其中信号成分为

$$\xi_s(t) = \int_0^{T_i}\frac{a}{2}\sin\Delta\varphi\cdot C_L(t)C(t)\,dt \tag{7}$$

噪声成分为

$$\xi_n(t) = \int_0^{T_i}\frac{1}{2}C_L(t)n_s(t)\,dt \tag{8}$$

将此输出 ξ 与门限电平 ξ_0 比较. 未超过门限时判断为未捕获到，此时，通过捕获程序控制系统将本地码位移一比特时间间隔后，再次进行相关、判决. 直到输出 ξ 超过门限电平 ξ_0 时为止.

如果把接收到的测距码的一种位移状态看作一个信号，则总共就有测距码码长 L 个信号存在. 因此，每个信号的二进制信息单位便有 $n = \log_2 L$ 单位.

由于噪声 $\xi_n(t)$ 的存在，可能导致门限判决的错误. 为了计算门限判决时的错误概率，先求 ξ 的概率分布. 由于 $\xi(t)$ 是信号 $\xi_s(t)$ 与噪声 $\xi_n(t)$ 之和，$\xi(t)$ 的分布律决定于 $\xi_n(t)$ 的分布律. 而 $\xi_n(t)$ 又是 $n_s(t)$ 的线性函数，其分布律决定于 $n_s(t)$ 的分布律，也即决定于 $n_i(t)$ 的分布律. 因此，当 $n_i(t)$ 是高斯分布时，$\xi(t)$ 也是高斯分布. 高斯分布的概率密度函数由其均值 $\langle\xi\rangle$ 和方差 σ_ξ^2 便可唯一确定.

根据取样定理[1]，有

$$C(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k\phi_k(t) \tag{9}$$

$$C_L(t) = \sum_{k=1}^{N} C_{Lk}\phi_k(t) \tag{10}$$

以及

$$n_s(t)=\sum_{k=1}^{N}n_{sk}\phi_k(t) \tag{11}$$

式中 $N=2BT_i$. 基底信号 $\phi_k(t)$ 具有正交性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_k(t)\phi_l(t)\,dt=\begin{cases}0 & 当\ l\neq k\ 时\\ \dfrac{1}{2B} & 当\ l=k\ 时\end{cases} \tag{12}$$

因此,当无信号存在时,ξ 的均值 $\langle\xi\rangle_0$ 和方差 $\sigma_{\xi_0}^2$ 分别为

$$\langle\xi\rangle_0=0 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi_0}^2=\langle\xi^2\rangle_0&=\left(\frac{1}{4B}\right)^2\left\langle\sum_{k=1}^{N}n_{sk}C_{Lk}\cdot\sum_{l=1}^{N}n_{sl}C_{Ll}\right\rangle\\&=\left(\frac{1}{4B}\right)^2\langle n_{sk}\rangle^2\sum_{k=1}^{N}C_{Lk}^2=\frac{E_cN_0}{8}\end{aligned} \tag{14}$$

式中 $E_c=\int_0^{T_i}C_L^2(t)\,dt=\int_0^{T_i}C^2(t)\,dt$, 表示码能量. 当有信号存在时, ξ 的均值 $\langle\xi\rangle_1$ 和方差 $\sigma_{\xi_1}^2$ 分别为

$$\langle\xi\rangle_1=\frac{a}{2}\sin\Delta\varphi\cdot E_c \tag{15}$$

$$\sigma_{\xi_1}^2=\langle(\xi-\langle\xi\rangle_1)^2\rangle=\frac{E_cN_0}{8} \tag{16}$$

这样便有了 ξ 的概率密度函数.

对门限判决而言, 接收到的测距码被正确捕获的概率等于本地码与接收码相位同步时相关器输出大于门限 ξ_0, 而本地码与接收码相位不同步时相关器输出小于门限 ξ_0 的概率,也即

$$\begin{aligned}P_d&=P(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{2^n-1}\langle\xi_0,\xi_i\rangle\xi_0)\\&=P(\xi_i>\xi_0)\cdot\prod_{j=1}^{2^n-1}P(\xi_j<\xi_0)\\&=\int_{\xi_0}^{\infty}\frac{1}{(2\pi\sigma_{\xi_1}^2)^{1/2}}\exp[-(\xi_i-\langle\xi\rangle_1)/2\sigma_{\xi_1}^2]d\xi_i\\&\times\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2^n-1}\int_{-\infty}^{\xi_0}\frac{1}{(2\pi\sigma_{\xi_0}^2)^{1/2}}\exp[-\xi_j^2/2\sigma_{\xi_0}^2]d\xi_j\end{aligned} \tag{17}$$

进行变量变换后可得

$$\begin{aligned}P_d&=\int_{\frac{\xi_0-\langle\xi\rangle_1}{\sigma_{\xi1}}}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\exp(-u^2/2)\,du\times\left[\int_{-\infty}^{\xi_0/\sigma_{\xi0}}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\exp(-v^2/2)\,dv\right]^{2^n-1}\\&=\left[1-F\left(\frac{\xi_0-\langle\xi\rangle_1}{\sigma_{\xi1}}\right)\right]\times\left[F\left(\frac{\xi_0}{\sigma_{\xi0}}\right)\right]^{2^n-1}\end{aligned} \tag{18}$$

式中 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\exp(-t^2/2)\,dt$ 是概率积分函数.

当采用理想观察者准则时，门限电平 $\xi_0 = \langle\xi\rangle_1/2$，再考虑到 $\sigma_{\xi_0}=\sigma_{\xi_1}=(E_cN_0/8)^{1/2}$，则式(18)成为

$$P_d = [1 - F(-\sqrt{a^2 \cdot \sin^2\Delta\varphi \cdot E_c/2N_0})]\times[F(\sqrt{a^2 \cdot \sin^2\Delta\varphi \cdot E_c/2N_0})]^{2^n-1}$$
$$= [F(\sqrt{a^2\sin^2\Delta\varphi \cdot E_c/2N_0})]^{2^n} \tag{19}$$

于是错误概率为

$$P_E = 1 - P_d = 1 - [F(\sqrt{a^2\sin^2\Delta\varphi \cdot E_c/2N_0})]^{2^n} \tag{20}$$

考虑到码能量 $E_c = S_c \cdot T_i = S_c \cdot nT_b$（此处，$S_c$ 是码平均功率，积分时间 T_i 取 n 倍比特时间 nT_b，n 如前所述是码信号的二进制信息单位），于是式(20)成为

$$P_E = 1 - \left[F\left(\sqrt{a^2\sin^2\Delta\varphi \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{S_cT_b}{N_0}\right)}\right)\right]^{2^n} \tag{21}$$

考虑到中频测距信号 $S_i(t)$ 的平均功率为 $S = a^2/2$，调制损失为 $\sin^2\Delta\varphi$，并考虑到 $C(t)$ 取值仅为±1，即平均功率 $S_c = 1$，则，$S' = a^2\sin^2\Delta\varphi S_c = S \cdot 2\sin^2\Delta\varphi$ 与中频信号 $S_i(t)$ 分配给码的功率成比例．最后可将式(21)改写成

$$P_E = 1 - \left[F\left(\sqrt{\frac{n}{2}\left(\frac{S'T_b}{N_0}\right)}\right)\right]^{2^n} \tag{22}$$

将式(22)绘成曲线如图2所示，并将部分常用的数值结果列于表1.

当码捕获时间 T，码长 L，信号平均功率 S 以及调制指数 $\Delta\varphi$ 给定后，由式(22)可以求出错误概率 P_E；反之，给定错误概率，也可求出需要的信噪比.

对于复码由二元码 X，Y 构成的情形，设子码 X 长度为 79，子码 Y 长度为 127，则总步进次数 $M = 206$ 次．当要求码捕获时间为 $T = MT_i = 5$ 秒时，考虑到最长子码的比特数 $n = \log_2 127 = 7$，则每比特捕获时间为

$$T_b = \frac{T}{Mn} = 0.00347 \text{ 秒}$$

当给定错误概率 P_E 值，由图2曲线可查出 $S'T_b/N_0$ 值，从而得到 S'/N_0 比值．当给出调制指数 $\Delta\varphi$，便可得到所需的中频信号平均功率与噪声平均功率谱密度之比 S/N_0．设 $\Delta\varphi = 0.3$，对几种给定的 P_E 值得出的 S/N_0 值列于表2．作为对比，把采用极大似然判决规则时相应的结果也列于表2[2].

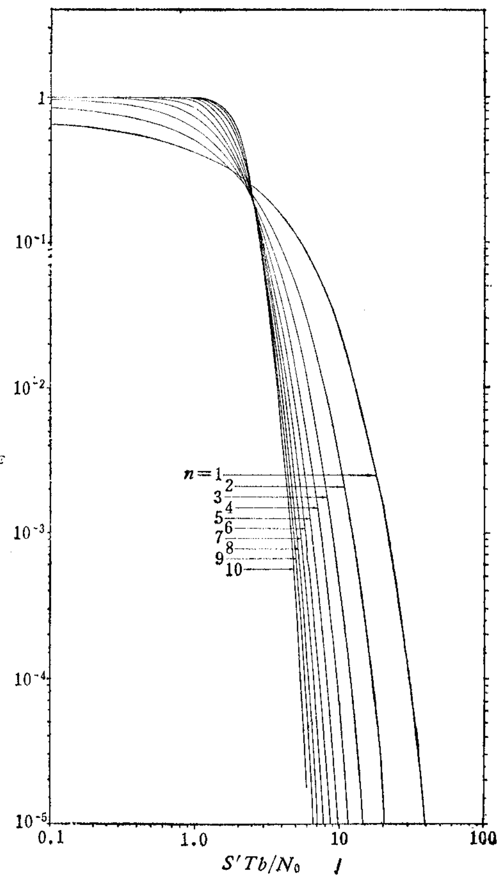

图2　$P_E - \frac{S'T_b}{N_0}$ 曲线

表 1 门限判决的错误概率

n	$\frac{S'T_b}{N_0}$	P_E	n	$\frac{S'T_b}{N_0}$	P_E
4	4	3.677249×10^{-2}	6	7	1.466843×10^{-4}
4	5	1.244990×10^{-2}	6	8	3.055425×10^{-5}
4	6	4.247496×10^{-3}	6	9	6.237868×10^{-6}
4	7	1.461415×10^{-3}	6	10	1.110413×10^{-6}
4	8	5.065515×10^{-4}	7	4	1.163170×10^{-2}
4	9	1.766412×10^{-4}	7	5	1.836547×10^{-3}
4	10	6.188350×10^{-5}	7	6	2.933470×10^{-4}
5	4	2.474481×10^{-2}	7	7	4.701367×10^{-5}
5	5	6.490602×10^{-3}	7	8	7.214563×10^{-6}
5	6	1.718610×10^{-3}	7	9	7.262424×10^{-7}
5	7	4.594534×10^{-4}	8	5	9.896767×10^{-4}
5	8	1.237632×10^{-4}	8	6	1.222114×10^{-4}
5	9	3.348722×10^{-5}	8	7	1.442908×10^{-5}
5	10	9.036521×10^{-6}	8	8	8.863281×10^{-7}
6	4	1.688204×10^{-2}	9	5	5.356609×10^{-4}
6	5	3.434266×10^{-3}	9	6	4.990186×10^{-5}
6	6	7.063775×10^{-4}	9	7	2.904941×10^{-6}

由表 2 可见，采用门限判决规则时所需载波信号平均功率与噪声功率谱密度之比要比采用极大似然判决规则时大 3 分贝左右．需要指出，由判决规则本身决定，极大似然判决规则要求的码捕获时间必需不少于 MT_i，然而门限判决规则捕获时间最多为 MT_i，平均为 $MT_i/2$．因此，从统计平均来看，采用门限判决规则时所需信噪比与采用极大似然判决规则时差不多．

表 2 二元复码情形下门限判决与极大似然判决

P_E	门限判决		极大似然判决	
	$\frac{S'T_b}{N_0}$	S/N_0 (分贝·赫)	$\frac{S'T_b}{N_0}$	S/N_0 (分贝·赫)
5×10^{-3}	4.5	38.7	2.1	35.4
1×10^{-3}	5.3	39.4	2.5	36.2
5×10^{-4}	5.7	39.7	2.7	36.5
1×10^{-4}	6.6	40.4	3.0	36.9
5×10^{-5}	7.0	40.6	3.3	37.4
1×10^{-5}	7.8	41.1	3.9	38.1

对于复码由三元码 X、Y、Z 构成的情形，设子码长分别为 31, 23, 15，则总步进次数 $M=69$ 次当码捕获时间 $T=MT_i=5$ 秒时，考虑到最长子码的比特数 $n=5$，所以每比特捕获时间 $T_b=0.0145$ 秒．同样设 $\Delta\varphi=0.3$，对几种给定的 P_E 值得出的 S/N_0 值列于表 3．极大似然规则时相应结果也同时列出．

由表 3 可见，采用门限判决规则时所需载波信号平均功率与噪声功率谱密度之比仍

表 3　三元复码情形下门限判决与极大似然判决

P_E	门限判决		极大似然判决	
	$\frac{S'T_b}{N_0}$	S/N_0 (分贝·赫)	$\frac{S'T_b}{N_0}$	S/N_0 (分贝·赫)
5×10^{-3}	5.2	33.1	2.5	29.9
1×10^{-3}	6.4	34.0	3.1	30.9
5×10^{-4}	7.0	34.4	3.4	31.3
1×10^{-4}	8.2	35.1	4.0	32.0
5×10^{-5}	8.7	35.4	4.4	32.4
1×10^{-5}	9.9	35.9	4.9	32.9

比采用极大似然规则时大 3 分贝左右. 同时，还可看出，三元码情形下采用门限判决所需信噪比要比二元码情形下采用极大似然规则所需信噪比低 2 分贝左右.

参　考　文　献

[1] 鞠德航、林可祥、陈捷，信号检测理论导论，科学出版社，1977.
[2] W. C. Lindsey and M.K. Simon, Telecommunication Systems Engineering, Prentice-Hall, Inc., (1973) *Sec*, 5-5.

THE ERROR PROBABILITY OF DETECTING PHASE-MODULATEL BINARY CODES ON THE BASIS OF THE THRESHOLD DECISION RULE

Chen Jie
(Institute of Electronics, Academia Sinica)

On the basis of the Threshold Decision rule calculations are made of the error probability of detecting phase-modulated binary codes in the system of Pseudo-random code for the measure of distance. The results are compared with results of measurements on the basis of the maximum likehood decision rule. It is pointed out that under similar conditions, results obtained from measurements according to the two rules from the point of view of statistical average differ very little; results obtained from the former differ only by 3dB from the later, even calculations are made according to the longest trapping time.