

完整数字电路理论和三值代数¹

方振贤 刘莹

(黑龙江大学信息与电子科学系 哈尔滨 150080)

摘 要 本文研究仅用一个代数结构的完整数字电路理论, 保持布尔代数定律有效, 且克服布尔代数面临的困难。新理论给出了包括信号、网络和负载的实际电路的完整表达式; 证明了若干关于“ $\uparrow, \parallel, \perp$ ”运算和各类型电路间转换关系的定理。基于这些原理引伸出分析动态电路的状态方程法。

关键词 完整数字电路, 三值代数, 开关运算, 转换定理, 动态电路

中图分类号 TN79

1 引 言

为了克服布尔代数所面临的困难, 许多学者进行了研究^[1,2]。理论研究在进行之中, 现数字电路理论仍然不完整, 表现在: 尚未真正实现非完全描述组合电路, 而是用变相的完全描述电路代替; 用多个彼此分立的代数结构描述一个电路结构, 缺少完整性和相关性; 基本运算多, 难以一般化, 不利深入研究。布尔代数今后仍将起重要作用^[3], 为此本文研究在布尔代数基础上仅增加一个基本运算 $\uparrow$ 的三值代数^[4], 保持布尔代数定律的有效性, 克服其遇到的困难, 用单个代数结构建立完整数字电路理论。

2 开关运算和三值代数

所有开关运算都归为三值代数的导出运算。根据文献[4]的 ${}_xA = x \uparrow A = \begin{cases} x, & \text{当 } A = * \\ A, & \text{当 } A \neq * \end{cases}$

和定理 6 得出

$${}_xA = x \cdot {}_0\vec{A} + 1 \cdot {}_0A + 0 \cdot {}_0\overline{A} = x \cdot {}_0\vec{A} + \varepsilon \cdot {}_0\dot{A}, \quad (1)$$

其中 ${}_0\dot{A} = {}_0(A + \overline{A}) = {}_0\overline{A} \cdot \varepsilon$ 为开路随意值², 对二值逻辑电路, 随负载不同, ε 仅取 1 和 0 之一,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{若 } {}_0\overline{A} = 0 \text{ (即 } {}_0\dot{A} = {}_0A\text{);} \\ 0, & \text{若 } {}_0A = 0 \text{ (即 } {}_0\dot{A} = {}_0\overline{A}\text{).} \end{cases} \quad (2)$$

(1) 式表示, 当 $A = *$ 时开关接通, 源信号 x 传输; 而 $A \neq *$ 时开关断开。常用四种负载:

(1) 开路 0 电平负载 ($\varepsilon = 0$), 即电阻负载, 如 PMOS 负载管。(2) 开路 1 电平负载 ($\varepsilon = 1$), 如

¹ 1994-05-24 收到, 1995-01-03 定稿

² ε 与通常的随意值 d (don't-care) 相似, 这里 ε 体现开路时输出随负载 (或假想负载) 而变化的特性。根据文献[4]的定理 7(e), ${}_0\vec{A} = {}_0(A + \overline{A})$ 。

NMOS 负载管。(3) 电容负载, 开路时 ε 保持电容原存储信息。(4) 真开路, ε 随意, 在假想负载下 ε 可能取 1 或 0。 ${}_1A$ 表示开关 A 接 $+V_{DD}$, ${}_0A$ 表示开关接地, 由此体现电源和负载的作用。本文中 $x \sim z$ 表示源信号, $a \sim g$ 表示控制信号, $A \sim G$ 表示满足 (1) 式的开关量。

引理 1 (1) ${}_xA = x \cdot {}_0\vec{A} + \varepsilon \cdot {}_0\dot{A} \iff A = * \cdot {}_0\vec{A} + \varepsilon \cdot {}_0\dot{A}$. (2) ${}_x(A \uparrow B) = x \cdot {}_0(\vec{A}\vec{B}) + \varepsilon \cdot {}_0(\dot{A} + \dot{B}) \iff A \uparrow B = * \cdot {}_0(\vec{A}\vec{B}) + \varepsilon \cdot {}_0(\dot{A} + \dot{B})$.

证 (1) 显然成立。因 ${}_x(A \uparrow B) = x \uparrow (A \uparrow B) = (x \uparrow A) \uparrow B \xrightarrow{(1) \text{ 式 }} (x \cdot {}_0\vec{A} + \varepsilon \cdot {}_0\dot{A}) \cdot {}_0\vec{B} + \varepsilon \cdot {}_0\dot{B} = x \cdot {}_0(\vec{A}\vec{B}) + \varepsilon \cdot {}_0(\dot{A} + \dot{B})$, 又因 (1), 故 (2) 成立。

定义 1 $A \parallel B = * \cdot {}_0(\vec{A} + \vec{B}) + \varepsilon \cdot {}_0(\dot{A}\dot{B})$.

上述 $\uparrow$ 和 $\parallel$ 分别为开关串联和并联运算。运算优先次序为 $\uparrow \parallel \cdot +$ 。显然满足

$${}_x(A \parallel B) = x \cdot {}_0(\vec{A} + \vec{B}) + \varepsilon \cdot {}_0(\dot{A}\dot{B}). \quad (3)$$

引理 2 (1) ${}_0(\overrightarrow{A \uparrow B}) = {}_0(\vec{A}\vec{B})$, ${}_0(\overrightarrow{A \parallel B}) = {}_0(\vec{A} + \vec{B})$. (2) $A \cdot B = \begin{cases} A \uparrow B, & \text{当 } \varepsilon = 0; \\ A \parallel B, & \text{当 } \varepsilon = 1; \end{cases}$
 $A + B = \begin{cases} A \parallel B, & \text{当 } \varepsilon = 0; \\ A \uparrow B, & \text{当 } \varepsilon = 1. \end{cases}$

证 $A + B \xrightarrow[\text{定理 7}]{\text{文献 [4]}} * \cdot {}_0(\overrightarrow{A + B}) + {}_0(A + B) \xrightarrow[\text{引理 1}]{\text{文献 [5]}} {}_0(A + B) + * \cdot {}_0(\overrightarrow{A\vec{B}} + \overrightarrow{A\vec{B}} + \overrightarrow{A\vec{B}})$ 。若 $\varepsilon = 1$, $A + B \xrightarrow[\varepsilon=0]{\text{文献 [4]}} 1 \cdot {}_0(\dot{A} + \dot{B}) + * \cdot {}_0(\vec{A}\vec{B}) \xrightarrow[\varepsilon=1]{\text{文献 [5]}} A \uparrow B$, 若 $\varepsilon = 0$, $A + B \xrightarrow[\varepsilon=0]{\text{文献 [4]}} * \cdot {}_0(\vec{A} + \vec{B}) + {}_0(\dot{A}\dot{B}) \xrightarrow[\varepsilon=0]{\text{文献 [5]}} A \parallel B$ 。

定理 1 (开关运算基本定理) (1) $A \uparrow B = B \uparrow A$, $A \parallel B = B \parallel A$. (2) $(A \uparrow B) \uparrow C = A \uparrow (B \uparrow C)$, $(A \parallel B) \parallel C = A \parallel (B \parallel C)$. (3) $A \uparrow B \parallel C = (A \parallel C) \uparrow (B \parallel C)$. (4) $(A \parallel B) \uparrow C = A \uparrow C \parallel B \uparrow C$. (5) $A \parallel A \uparrow B = A$, $A \uparrow (A \parallel B) = A$.

证 $A \uparrow B \parallel C = * \cdot {}_0(\overrightarrow{A \uparrow B \parallel C}) + \varepsilon \cdot {}_0(\overrightarrow{A \uparrow B \parallel C}) \xrightarrow[\text{引理 2(1)}]{\text{引理 2(1)}} * \cdot {}_0(\overrightarrow{A\vec{B}} + \vec{C}) + \varepsilon \cdot {}_0(\overrightarrow{A\vec{B}} + \vec{C}) = * \cdot {}_0((\vec{A} + \vec{C})(\vec{B} + \vec{C})) + \varepsilon \cdot {}_0((\vec{A} + \vec{C})(\vec{B} + \vec{C})) \xrightarrow[\text{引理 2(1)}]{\text{引理 2(1)}} * \cdot {}_0(\overrightarrow{A \parallel C} \uparrow \overrightarrow{B \parallel C}) + \varepsilon \cdot {}_0(\overrightarrow{A \parallel C} \uparrow \overrightarrow{B \parallel C}) = (A \parallel C) \uparrow (B \parallel C)$ 。

推理 1 ${}_x(A \uparrow B \cdots \uparrow G) = x \cdot {}_0(\vec{A}\vec{B} \cdots \vec{G}) + \varepsilon \cdot {}_0(\dot{A} + \dot{B} + \cdots + \dot{G})$. ${}_x(A \parallel B \cdots \parallel G) = x \cdot {}_0(\vec{A} + \vec{B} + \cdots + \vec{G}) + \varepsilon \cdot {}_0(\dot{A}\dot{B} \cdots \dot{G})$.

定义 2 ${}_x A_1 \parallel {}_x A_2 \parallel \cdots \parallel {}_x A_k = \bigsqcup_{i \in K} x_i A_i = x_1 \cdot {}_0\vec{A}_1 + x_2 \cdot {}_0\vec{A}_2 + \cdots + x_k \cdot {}_0\vec{A}_k + \varepsilon \cdot {}_0(\dot{A}_1 \dot{A}_2 \cdots \dot{A}_k)$, $K = \{1, 2, \cdots, k\}$. $x_i \in B_2 = \{0, 1\}$, $\forall i, j \in K$, $(x_i \oplus x_j) \cdot {}_0(\vec{A}_i \vec{A}_j) = 0$. 其中 $\bigsqcup$ 为线“并接”运算, 若对任意 $i \neq j$, A_i 和 A_j 必不同为 $*$, 则 $\bigsqcup$ 化为线逻辑; 若 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$, 则 $\bigsqcup$ 化为开关并联; 一般 $\bigsqcup$ 可实现诸相容多路输出的并线传输。显然运算 $\bigsqcup$ 是可交换, 可结合的。

定理 2 (常量变量关系) (1) $A \uparrow * = A$, $A \uparrow \varepsilon = \varepsilon$, $A \parallel * = *$, $A \parallel \varepsilon = A$. (2) $* \uparrow \varepsilon = \varepsilon$, $\varepsilon \uparrow \varepsilon = \varepsilon$, $* \uparrow * = *$, $\varepsilon \parallel * = *$, $* \parallel * = *$, $\varepsilon \parallel \varepsilon = \varepsilon$ 。

证 $A \parallel * = * \cdot {}_0(\vec{A} + \vec{*}) + \varepsilon \cdot {}_0(\dot{A} \cdot \dot{*}) \xrightarrow[\varepsilon=1]{\text{文献 [4]}} * \cdot 1 + \varepsilon \cdot 0 = *$ 。

引理 3 ${}_xA = x \cdot {}_0\vec{A} + \varepsilon \cdot {}_0\dot{A} \implies \overline{{}_xA} = \overline{x} \cdot {}_0\vec{A} + \overline{\varepsilon} \cdot \dot{A}$ 。

证 $\bar{x}\bar{A} = \overline{x\bar{A}} = \overline{x \cdot_0 \vec{A} + \varepsilon \cdot_0 \dot{A}} = (\bar{x} +_0 \vec{A})(\bar{\varepsilon} +_0 \dot{A}) = \bar{x} \cdot_0 \vec{A} + \bar{\varepsilon} \cdot_0 \dot{A} \xrightarrow[\text{定理 7(b)}]{\text{文献 [4]}} \bar{x} \cdot_0 \vec{A} + \bar{\varepsilon} \cdot_0 \dot{A}.$

定理 3 (关于 $\uparrow$ 和 $\parallel$ 的反演) (1) $\overline{x(A \uparrow B \uparrow \cdots \uparrow G)} = \bar{x}(\bar{A} \uparrow \bar{B} \cdots \uparrow \bar{G})$, $\overline{x(A \parallel B \parallel \cdots \parallel G)} = \bar{x}(\bar{A} \parallel \bar{B} \parallel \cdots \parallel \bar{G})$. (2) $\overline{\bigsqcup_{i \in K} x_i A_i} = \bigsqcup_{i \in K} \bar{x}_i \bar{A}_i$.

证 利用 $\forall i, j \in K, (x_i \oplus x_j) \cdot_0 (\vec{A}_i \vec{A}_j) = 0$, 推出 $\overline{\bigsqcup_{i \in K} x_i A_i} = \overline{\sum_{i \in K} x_i \cdot_0 \vec{A}_i + \varepsilon \cdot \prod_{i \in K} \dot{A}_i} = (\sum_{i \in K} \bar{x}_i \cdot_0 \vec{A}_i + \prod_{i \in K} \dot{A}_i) \cdot (\bar{\varepsilon} + \sum_{i \in K} \dot{A}_i) = \bar{\varepsilon} \sum_{i \in K} \bar{x}_i \cdot_0 \vec{A}_i + \sum_{i \in K} \bar{x}_i \cdot_0 \vec{A}_i (\dot{A}_i + \sum_{j \neq i} \dot{A}_j) + \bar{\varepsilon} \prod_{i \in K} \dot{A}_i = \sum_{i \in K} \bar{x}_i \cdot_0 \vec{A}_i + \bar{\varepsilon} \prod_{i \in K} \dot{A}_i = \sum_{i \in K} \bar{x}_i \cdot_0 \vec{A}_i + \bar{\varepsilon} \prod_{i \in K} \dot{A}_i = \bigsqcup_{i \in K} \bar{x}_i \bar{A}_i$.

对于真开路, 输出不确定, 有 $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, 故 $\varepsilon \prod_{i \in K} \dot{A}_i \xrightarrow[\varepsilon \prod_{i \in K} \dot{A}_i]{\dot{A}_i = 0} \bar{\varepsilon} \prod_{i \in K} \dot{A}_i$, 即反演后开路状态不变, 相当于反演后 ON 阵列和 OFF 阵列互换, 而 DC 阵列不变. 对于假开路 $\varepsilon \neq \bar{\varepsilon}$, 即负载类型也参与变换, 如 PMOS 负载管变为 NMOS 负载管. 下面记任意函数为 $f(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel)$.

定理 4 (开关量吸收) (1) $A \uparrow f(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel) = A \uparrow f(*, B, \cdots, \uparrow, \parallel)$. (2) $A \parallel f(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel) = A \parallel f(\varepsilon, B, \cdots, \uparrow, \parallel)$.

证 令 $A = *$, (1) 显然成立; 反之令 $A = \varepsilon$, 因 $\varepsilon \uparrow f = \varepsilon$, (1) 仍成立. 同法证明 (2).

引理 4 $\varepsilon = 1 \Rightarrow {}_1A = 1$, $\varepsilon = 0 \Rightarrow {}_0A = 0$.

证 ${}_1A = 1 \cdot_0 \vec{A} + \varepsilon \cdot_0 \dot{A} \xrightarrow[\varepsilon = 1]{\varepsilon = 1} {}_0(\vec{A} + \dot{A}) = 1$.

用 $f(A, B, \cdots, G, \uparrow, \parallel)$ 代替 A , 引理 4 仍成立. 表明当负载呈阻性且输出在 0 和 1 之间变化, 对接地 (或接 $+V_{DD}$) 的开关网络必有开路 1 (或 0) 电平负载. 记 $f(A, B, \cdots, G, \uparrow, \parallel, *, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = f(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel, *, 0)$, 表示用开路 0 电平负载.

定理 5 (函数的否定) (1) $\bar{f}(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel, *, 0) = f(\vec{A}, \vec{B}, \cdots, \parallel, \uparrow, 1, *)$. (2) $\bar{f}(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel, 1, *) = f(\overleftarrow{A}, \overleftarrow{B}, \cdots, \parallel, \uparrow, *, 0)$. (3) $\bar{f}(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel, *, \varepsilon) = f(\bar{A}, \bar{B}, \cdots, \uparrow, \parallel, *, \bar{\varepsilon})$.

证 考虑 $\langle R, \uparrow, \parallel, 0, * \rangle$ 和 $\langle \vec{R}, \parallel, \uparrow, *, 1 \rangle$ 两个环, 对 R 中任一元素 A , $\vec{R}$ 中有一元素 $\vec{A}$ 双方单值对应, 即 $\theta: R \rightarrow \vec{R}$ 是一一映射, 满足: $\theta(0) = *$, $\theta(*) = 1$; 因 $\forall A, B \in R$, $\theta(A \uparrow B) = \overline{A \uparrow B} = \vec{A} \parallel \vec{B}$, $\theta(A \parallel B) = \overline{A \parallel B} = \vec{A} \uparrow \vec{B}$, 又 $R = \vec{R}$, 故关于 $\uparrow$ 和 $\parallel$ 运算 R 和 $\vec{R}$ 为同构. 在 R 中任意函数 $y = f(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel, 0, *)$ 对应 $\vec{R}$ 中有 $\vec{y} = f(\vec{A}, \vec{B}, \cdots, \parallel, \uparrow, *, 1)$, 故定理 5(1) 成立. 同法证定理 5(2) 和 5(3).

定理 6 (等价关系) ${}_1F(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel, 0, *) = {}_0F(\vec{A}, \vec{B}, \cdots, \parallel, \uparrow, *, 1)$, ${}_0F(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel, *, 1) = {}_1F(\overleftarrow{A}, \overleftarrow{B}, \cdots, \parallel, \uparrow, 0, *)$.

证 ${}_1F(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel, 0, *) = \overline{{}_0F(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel, 0, *)} \xrightarrow[\varepsilon=0]{\varepsilon=0} {}_0\bar{F}(A, B, \cdots, \uparrow, \parallel, 0, *) \xrightarrow[\text{定理 5}]{\text{定理 5}} {}_0F(\vec{A}, \vec{B}, \cdots, \parallel, \uparrow, *, 1)$.

定理 7 (关于 $\parallel$ 和 $\uparrow$ 运算的结合) $(\bigsqcup_{i \in K} x_i A_i) \uparrow F(B_1, B_2, \cdots, \uparrow, \parallel) = \bigsqcup_{i \in K} x_i (A_i \uparrow F(B_1, B_2, \cdots, \uparrow, \parallel))$.

证 可由定义 2 和 (1) 式推出.

因并接 $\parallel$ 后电源是双向的 (甚至是多向的), 故桥接开关运算可借助于 $\parallel$ 运算引入. 带桥接开关的电路反演后, 开路状态保持不变.

3 完整数字电路基本定理

不管电路如何复杂, 都包括信号, 网络和负载, 其中信号含源信号和控制信号。本文用一个与布尔代数兼容的代数结构有机地将信号、网络和负载统一描述。既继承布尔代数的作用, 又克服其遇到的困难, 将电路各有效成份连系起来, 建立单代数结构的完整数字电路理论。设开关 A 的导通和截止是由控制信号 a 控制的 ($a \in B_2$)。按器件性质分为高电平控制 (满足 ${}_0\bar{A} = a$) 和低电平控制 (满足 ${}_0\bar{A} = \bar{a}$), 记为

$$A = \begin{cases} \langle a \rangle = a * + \bar{a}\varepsilon, & \text{高电平控制;} \\ \langle \bar{a} \rangle = \bar{a} * + a\varepsilon, & \text{低电平控制;} \end{cases} \quad (5)$$

且

$$\langle \bar{\bar{a}} \rangle = \langle \bar{a} \rangle, \quad \langle a \rangle = \langle \bar{\bar{a}} \rangle; \quad (6)$$

其中 a 是布尔变量或布尔表达式; $\langle \bar{\bar{a}} \rangle$ 表示控制输入接 a , 低电平控制; 而 $\langle \bar{a} \rangle$ 表示控制输入接 $\bar{a}$, 高电平控制。不计这种结构上的区别, 逻辑上满足 (6) 式。由此 NMOS “非” 门、“与” 门、“或” 门和“异或非” 门各自表示为 ${}_0\langle a \rangle$, ${}_0(\langle a \rangle \uparrow \langle b \rangle)$, ${}_0(\langle a \rangle \parallel \langle b \rangle)$, ${}_0\langle a \oplus b \rangle$ ($\varepsilon = 1$)。PMOS “非” 门、“与” 门和“或” 门表示为 ${}_1\langle \bar{\bar{a}} \rangle$, ${}_1(\langle \bar{\bar{a}} \rangle \uparrow \langle \bar{\bar{b}} \rangle)$, ${}_1(\langle \bar{\bar{a}} \rangle \parallel \langle \bar{\bar{b}} \rangle)$ ($\varepsilon = 0$)。CMOS “非” 门、“与” 门和三态门表示为 ${}_0\langle a \rangle \parallel {}_1\langle \bar{\bar{a}} \rangle$, ${}_0(\langle a \rangle \uparrow \langle b \rangle) \parallel {}_1(\langle \bar{\bar{a}} \rangle \uparrow \langle \bar{\bar{b}} \rangle)$, ${}_0(\langle a \rangle \uparrow \langle b \rangle) \parallel {}_1\langle \bar{\bar{a}} \bar{\bar{b}} \rangle$ 。³ 用 $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \dots, \langle g \rangle$ 代替 $A, B, \dots, G$, 则上节所有定理仍成立。

引理 5 (1) $\langle a \rangle = * \iff \langle \bar{\bar{a}} \rangle = \varepsilon$, $\langle a \rangle = \varepsilon \iff \langle \bar{\bar{a}} \rangle = *$. (2) ${}_0\langle \bar{\bar{a}} \rangle = a$, $\langle \bar{\bar{a}} \rangle = \bar{a}$.
(3) ${}_0(\langle a \rangle \uparrow \langle b \rangle) = ab$, ${}_0(\langle a \rangle \parallel \langle b \rangle) = a + b$.

证 可由引理 2(1) 和 (5) 式推出。

定理 8 (吸收定理) $\langle a \rangle \uparrow f(\langle a \rangle, \langle \bar{\bar{a}} \rangle, \langle b \rangle, \langle \bar{\bar{b}} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel) = \langle a \rangle \uparrow f(*, \varepsilon, \langle b \rangle, \langle \bar{\bar{b}} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel)$; $\langle \bar{\bar{a}} \rangle \uparrow f(\langle a \rangle, \langle \bar{\bar{a}} \rangle, \langle b \rangle, \langle \bar{\bar{b}} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel) = \langle \bar{\bar{a}} \rangle \uparrow f(\varepsilon, *, \langle b \rangle, \langle \bar{\bar{b}} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel)$; $\langle a \rangle \parallel f(\langle a \rangle, \langle \bar{\bar{a}} \rangle, \langle b \rangle, \langle \bar{\bar{b}} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel) = \langle a \rangle \parallel f(\varepsilon, *, \langle b \rangle, \langle \bar{\bar{b}} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel)$; $\langle \bar{\bar{a}} \rangle \parallel f(\langle a \rangle, \langle \bar{\bar{a}} \rangle, \langle b \rangle, \langle \bar{\bar{b}} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel) = \langle \bar{\bar{a}} \rangle \parallel f(*, \varepsilon, \langle b \rangle, \langle \bar{\bar{b}} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel)$.

证 可由定理 4 和引理 5 推出。

定理 9 (1) $\langle a \rangle \uparrow \langle \bar{\bar{a}} \rangle = \varepsilon$, $\langle a \rangle \parallel \langle \bar{\bar{a}} \rangle = *$. (2) $\langle a \rangle \parallel \langle \bar{\bar{a}} \rangle \uparrow \langle b \rangle = \langle a \rangle \parallel \langle b \rangle$, $\langle a \rangle \uparrow (\langle \bar{\bar{a}} \rangle \parallel \langle b \rangle) = \langle a \rangle \uparrow \langle b \rangle$.

证 代入定理 8, 直接得出。

定理 10 $\langle a \rangle \uparrow \langle b \rangle \parallel \langle \bar{\bar{a}} \rangle \uparrow \langle c \rangle \parallel \langle b \rangle \parallel \langle c \rangle = \langle a \rangle \uparrow \langle b \rangle \parallel \langle \bar{\bar{a}} \rangle \uparrow \langle c \rangle$, $(\langle a \rangle \parallel \langle b \rangle) \uparrow (\langle \bar{\bar{a}} \rangle \parallel \langle c \rangle) \uparrow (\langle b \rangle \parallel \langle c \rangle) = (\langle a \rangle \parallel \langle b \rangle) \uparrow (\langle \bar{\bar{a}} \rangle \parallel \langle c \rangle)$.⁴

³ CMOS 的 ε 为真开路, 于是 $y = {}_0(\langle b \rangle \uparrow \langle \bar{\bar{a}} \bar{\bar{b}} \rangle) \parallel {}_1\langle \bar{\bar{a}} \bar{\bar{b}} \rangle \xrightarrow{\text{引理 5}} 0 \cdot (b \cdot \bar{a} \bar{b}) + 1 \cdot (ab) + \varepsilon b \bar{a} \bar{b} + ab = ab + \varepsilon \bar{b}$; 当 $b = 0$ 时, $y = \varepsilon$ (真开路), 否则, $b = 1$, $y = a$.

⁴ 与布尔代数证明 $AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}C$ 方法类似, 公式形式相似。另外, 定理 8 与布尔代数公式 $A \cdot \bar{A} = 0$, $A + \bar{A} = 1$, $A + \bar{A}B = A + B$, $A(\bar{A} + B) = AB$ 形式也相似。

定理 11 (展开定理) $f(<a>, <\ddot{a}>, , <\ddot{b}>, \dots, \uparrow, \parallel) = <a> \uparrow f(*, \varepsilon, , <\ddot{b}>, \dots, \uparrow, \parallel) \parallel <\ddot{a}> \uparrow f(\varepsilon, *, , <\ddot{b}>, \dots, \uparrow, \parallel) = (<a> \parallel f(\varepsilon, *, , <\ddot{b}>, \dots, \uparrow, \parallel)) \uparrow (<\ddot{a}> \parallel f(*, \varepsilon, , <\ddot{b}>, \dots, \uparrow, \parallel))$ 。

证 $f = * \uparrow f \xrightarrow{\text{定理 9}} (<a> \parallel <\ddot{a}>) \uparrow f \xrightarrow{\text{定理 1}} <a> \uparrow f \parallel <\ddot{a}> \uparrow f$, 再由定理 8 推出。

定理 11 为一维展开定理, 不难推广到多维. 记 $\theta(<a>_{\varepsilon=\alpha}) = _{\varepsilon=\beta}$ 为 $\theta(<a>)$

$\xrightarrow{\varepsilon \text{ 由 } \alpha \rightarrow \beta} $ 。

引理 6 $<\ddot{a}> \xrightarrow{\varepsilon \text{ 由 } \alpha \rightarrow \bar{\alpha}} <a>, <\ddot{a}> \xrightarrow{\varepsilon \text{ 由 } 0 \rightarrow 1} <\ddot{a}>, \overline{<\ddot{a}>} \xrightarrow{\varepsilon \text{ 由 } 1 \rightarrow 0} <\ddot{a}>, \overline{<\ddot{a}>} \xrightarrow{\varepsilon \text{ 由 } 1 \rightarrow 1} <\ddot{a}>, \overline{<\ddot{a}>} \xrightarrow{\varepsilon \text{ 由 } 0 \rightarrow 0} <\ddot{a}>$ 。

证 $<\ddot{a}> = \bar{A} \xrightarrow[\text{定理 7}]{\text{文献 [3]}} {}_0\bar{A} + * {}_0\bar{A} \xrightarrow{{}_0\bar{A} = {}_0\dot{A}} {}_0\bar{A} + * {}_0\dot{A} = 1 \cdot a + * \cdot \bar{a} \xrightarrow{\text{令 } \varepsilon=1} * \bar{a} + \varepsilon a = <\ddot{a}>$ 。

其余同法证明。

定理 12 (反演定理) $\prod_{i \in K} x_i f_i(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon) = \prod_{i \in K} \bar{x}_i f_i(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \bar{\varepsilon}), (\forall i, j \in K, (x_i \oplus x_j) \cdot {}_0(\bar{f}_i \bar{f}_j) = 0)$ 。

证 由定理 3 和定理 5 直接得出。

定理 12 中一般 x_i 为变量, ε 为真开路。特殊情形 x_i 可为恒定电平, 而 ε 可表示负载类型。下述推论是定理 12 的特例。

推论 2 $\bar{x} f(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon) = \bar{x} f(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \bar{\varepsilon})$ 。

引理 7 (1) ${}_0(\bar{f}(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \parallel, \uparrow, \varepsilon, *) \cdot \bar{f}(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon)) = 0$, (2) ${}_0(\bar{f}(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \parallel, \uparrow, \varepsilon, *) + \bar{f}(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon)) = 1$ 。

证 若 $f(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \parallel, \uparrow, \varepsilon, *) = f(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon) = *$, 二式同为 $*$, 且与各自的 ε 无关⁵, 令 $\varepsilon = 0$, 则 $(\bar{f}(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, 0) \xrightarrow{\text{定理 5 和引理 6}} f(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \parallel, \uparrow, *, 1) = *$, 即 $f(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, 0) = 0$, 与假设矛盾; 令 $\varepsilon = 1$ 也同样产生矛盾, 表明二函数不能同时为 $*$, 故引理 7(1) 成立。同法证引理 7(2)。

定理 13 (等价定理) ${}_0 f(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, 1) = {}_1 f(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \parallel, \uparrow, 0, *) = {}_0 f(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon) \parallel {}_1 f(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \parallel, \uparrow, \varepsilon, *)$ 。

证 依据引理 7, 本定理等式右端二函数不同为 $*$, 但必有一为 $*$, 满足 $\parallel$ 定义的约束条件, 且无开路状态, 于是 ${}_1 f(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \parallel, \uparrow, \varepsilon, *) \parallel {}_0 f(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon) = {}_1 \bar{f}(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \parallel, \uparrow, \varepsilon, *) + {}_0 \cdot {}_0 \bar{f}(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon) \xrightarrow{\text{引理 4}} {}_1 f(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \parallel, \uparrow, 0, *)$ 。

定理 13 和定理 6 表明, 实现同一逻辑可采用多种类型电路 (PMOS, NMOS 和 CMOS 等), 其中电源, 负载和控制电平均作为参数考虑在等价变换中。一般应考虑三态函数: ${}_1 g(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon) \parallel {}_0 f(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon), {}_0(\bar{f} \bar{g}) = 0$ 。由定理 12 和定理 13 可推出如下定理:

⁵ ${}_0(\bar{f}(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon) \xrightarrow[\text{定理 7}]{\text{文献 [4]}} {}_0(\bar{f}(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \varepsilon) \xrightarrow{\text{推论 2}} {}_0(\bar{f}(<a>, , \dots, \parallel, \uparrow, *, \bar{\varepsilon}))$, 表明 ε 反号后 ${}_0 \bar{f}$ 值不改变, 亦即 ${}_0 \bar{f}$ 之值与 ε 无关。

定理 14 $1g(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \uparrow, \parallel, *, \varepsilon) \parallel_0 f(<a>, , \dots, \uparrow, \parallel, *, \varepsilon) = 0g(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \uparrow, \parallel, *, \bar{\varepsilon}) \parallel_1 f(<a>, , \dots, \uparrow, \parallel, *, \bar{\varepsilon}) = 0g(<\bar{a}>, <\bar{b}>, \dots, \uparrow, \parallel, *, \varepsilon) \parallel_1 f(<\ddot{a}>, <\ddot{b}>, \dots, \uparrow, \parallel, *, \varepsilon), 0(\vec{f}\vec{g}) = 0$ 。

用 $f_i(<a_1>, <a_2>, \dots, \uparrow, \parallel)$ 代替 A_i 后定理 7 仍成立, 这表明, 某一级开关网络 $\parallel_{i \in K} x_i f_i(<a_1>, <a_2>, \dots, \uparrow, \parallel)$ 的输出可以作为下级网络 $F(<b_1>, <b_2>, \dots, \uparrow, \parallel)$ 的源信号输入, 从而形成多级电路。定理 7 得出等效它的单级网络形式; 反之, 单级网络经提公因子等处理后, 可化为多级网络, 传输门网络即此一例。如果某网络输出作为下级控制信号输入, 则要求输出非真开路, 或形式上开路, 实际开路电平已确定, 如 TTL 门输入开路等效输入高电平。显然 $\parallel$ 运算适用于各类型电路: CMOS, I^2L , 传输门, TTL 和动态电路。比较 “ $\uparrow, \parallel, \dots$ ” 和 “ $\bullet, +, -$ ” 看出, 两者规律十分类似, 但各有其特点, 且存在一定的关系。因能统一描述信号、网络和负载三部分, 函数式结构与实际电路结构相近, 在数字 VLSI 电路进行逻辑检验时, 易于由原始版图写出包括电源, 负载等成份的开关网络式; 然后利用本文的公式和转换定理, 求出相应的布尔表达式, 完成逻辑验证。网络设计时也易于转化为原始版图。

将“真开路”看作“真输出未确定”, 则可改变非完全描述组合电路设计思想, 用 OFF 和 ON 阵列分别设计 NMOS 和 PMOS 开关网络, 余下 DC 阵列则对应真开路, 于是原始设计要求和所实现的电路行为完全一致。该方法可以由 CMOS 型推广到其它型网络。

4 动态电路的状态方程

无比型动态电路是布尔代数失效的典型。本文提出状态方程法, 适用于任何动态电路, 能很方便地用函数形式表示动态电路, 画出各点波形, 评述其功能。

设电容 C_i 是开关网络 $x_i f_i(<a_1>, <a_2>, \dots, \uparrow, \parallel)$ 的负载, 在 t 和 $t + \delta t$ 时刻存入信息分别为 $y_i(t)$ 和 $y_i(t + \delta t)$, 简记为 y_i 和 y_i^+ 。因开路时电容 C_i 保存原信息, 即 $\varepsilon = y_i$, 所以 y_i 的下瞬间值为

$$\begin{aligned} y_i^+ &= x_i f_i(<a_1>, <a_2>, \dots, \uparrow, \parallel) |_{\varepsilon=y_i}, \\ &= x_i \cdot 0\vec{f}_i(<a_1>, <a_2>, \dots, \uparrow, \parallel) + y_i \cdot 0\dot{f}_i(<a_1>, <a_2>, \dots, \uparrow, \parallel), \quad i \in K. \end{aligned}$$

推广到一般开关网络, 可表为

$$\begin{aligned} y_i^+ &= \parallel_{j \in N x_i} f_{ij}(<a>, , \dots, \uparrow, \parallel) |_{\varepsilon=y_i} \\ &= \sum_{j \in N} x_{ij} \cdot 0\vec{f}_{ij}(<a>, , \dots, \uparrow, \parallel) + y_i \prod_{j \in N} 0\dot{f}_{ij}(<a>, , \dots, \uparrow, \parallel), \\ \forall_{j,l} \in N, \quad (x_{ij} \oplus x_{il}) \cdot 0(\vec{f}_{ij} \cdot \vec{f}_{il}) &= 0, \quad i \in K, \quad N = \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (7)$$

引理 8 $0\vec{f}(<a>, <\ddot{a}>, , <\ddot{b}>, \dots, \uparrow, \parallel, *, \varepsilon) = f(a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots, \bullet, +, 1, 0), 0\dot{f}(<a>, <\ddot{a}>, , <\ddot{b}>, \dots, \uparrow, \parallel, *, \varepsilon) = \bar{f}(a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots, \cdot, +, 1, 0) = f(\bar{a}, a, \bar{b}, b, \dots, +, \cdot, 0, 1)$ 。

证 考虑《 $B, \cdot, +, 1, 0$ 》和《 $H, \uparrow, \parallel, *, \varepsilon$ 》两个环, 对 B 中任一元素 a (或 $\bar{a}$), H 中有 $<a>$ (或 $<\ddot{a}>$) 双方单值对应 ($a = 0<\ddot{a}>, \bar{a} = 0<\ddot{a}>$), 即 $\theta: H \rightarrow B$ 是一一映射, 满足: $\theta(*) =$

$1, \theta(\varepsilon) = 0; \forall \langle a \rangle, \langle b \rangle \in H, \theta(\langle a \rangle \uparrow \langle b \rangle) = {}_0(\overline{\langle a \rangle \uparrow \langle b \rangle}) \stackrel{\text{引理 2}}{=} {}_0(\langle \bar{a} \rangle \langle \bar{b} \rangle) = ab$, 又 $\theta(\langle a \rangle \parallel \langle b \rangle) = a + b$ ⁶, 故关于上述运算 B 和 H 为同构。于是 H 中任一表达 $\langle y \rangle = f(\langle a \rangle, \langle \bar{a} \rangle, \langle b \rangle, \langle \bar{b} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel, *, \varepsilon)$ 对应 B 中为 $y = f(a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots, \bullet, +, 1, 0)$, 又因 $y = {}_0\langle \bar{a} \rangle$, 故引理 8 成立。

定理 15(转换定理) $\bigsqcup_{i \in K} x_i F_i(\langle a \rangle, \langle \bar{a} \rangle, \langle b \rangle, \langle \bar{b} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel, *, \varepsilon) = \sum_{i \in K} x_i \cdot F_i(a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots, \bullet, +, 1, 0) + \varepsilon \cdot \prod_{i \in K} F_i(\bar{a}, a, \bar{b}, b, \dots, +, \cdot, 0, 1), \forall i, j \in K, (x_i \oplus x_j) \cdot {}_0(\bar{F}_i \bar{F}_j) = 0$, 即 $(x_i \oplus x_j) \cdot F_i(a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots, \bullet, +, 1, 0) \cdot F_j(a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots, \bullet, +, 1, 0) = 0$ 。

证 由引理 8 和定义 2 直接推出。

利用定理 15, (7) 式可改写为

$$y_i^+ = \sum_{j \in N} x_{ij} \cdot f_{ij}(a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots, \cdot, +, 1, 0) + y_i \prod_{j \in N} f_{ij}(\bar{a}, a, \bar{b}, b, \dots, \cdot, +, 0, 1), \quad i \in K. \quad (8)$$

上式的特例是 $n = 1$, 得出 $y_i^+ = x_i f_i(\langle a \rangle, \langle \bar{a} \rangle, \langle b \rangle, \langle \bar{b} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel) |_{\varepsilon=y_i} = x_i \cdot {}_0 \bar{f}_i(\langle a \rangle, \langle \bar{a} \rangle, \langle b \rangle, \langle \bar{b} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel) + y_i \cdot {}_0 \dot{f}_i(\langle a \rangle, \langle \bar{a} \rangle, \langle b \rangle, \langle \bar{b} \rangle, \dots, \uparrow, \parallel)$, 同样可得出

$$y_i^+ = x_i f_i(a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots, \bullet, +) + y_i f_i(\bar{a}, a, \bar{b}, b, \dots, +, \bullet) \quad (9)$$

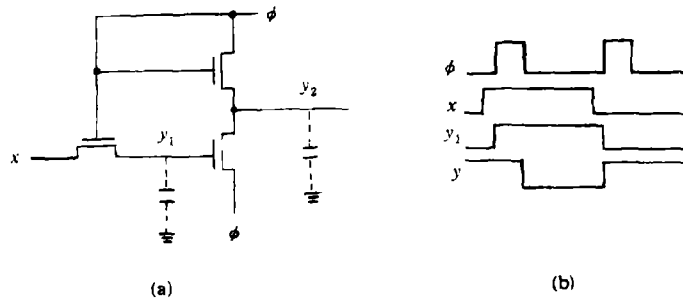


图 1 动态电路

(7)~(9) 式是动态电路状态方程。对给定电路, 先写出开关网络表达式, 并求它的状态方程, 由此画出波形图。这种分析方法适用于各种类型动态电路。以图 1(a) 为例阐述其分析过程。由图 1(a) 得出

$$y_1^+ = x \langle \phi \rangle |_{\varepsilon=y_1} = x \cdot \phi + y_1 \cdot \bar{\phi}, \quad (10)$$

$$y_2^+ = \phi(\langle y_1 \bar{\phi} \rangle \parallel \langle \phi \rangle) |_{\varepsilon=y_2} = \phi(y_1 \bar{\phi} + \phi) + y_2 y_1 \bar{\phi} + \phi = \phi + y_2 y_1 \quad (11)$$

⁶ 同样有 $\theta(\langle \bar{a} \rangle \uparrow \langle b \rangle) = \bar{a}b$, $\theta(\langle a \rangle \uparrow \langle \bar{b} \rangle) = a\bar{b}$, $\theta(\langle \bar{a} \rangle \uparrow \langle \bar{b} \rangle) = \bar{a}\bar{b}$, $\dots$, $\theta(\langle \bar{a} \rangle \parallel \langle b \rangle) = a + b$ 。因 H 中“...”仅出现在控制信号 a, b 等之上, 形如 $\langle \bar{a} \rangle$, $\langle \bar{b} \rangle$ 等, 故 B 中“—”也仅出现在单变量之上。

由 (10) 和 (11) 式画出 y_1 和 y_2 波形图, 示如图 1(b), 与实际波形完全一致。

参 考 文 献

- [1] 吴训威. 电子学报, 1993, 21(11): 83-86.
- [2] Mou Hu, Shensheng Xu, Smith K. C. Proc. of 22nd International Symposium on Multiple-Valued Logic. Sendai, Japan: May 1992, 396-400.
- [3] 树下行三, 浅田邦博, 唐津 修著, 裴武焕译. 超大规模集成电路设计 II, 北京: 科学出版社, 1991, 193-201.
- [4] 方振贤. 计算机学报, 1982, 5(6): 411-418.
- [5] 方振贤. 计算机学报, 1990, 13(9): 713-716.

PERFECT DIGITAL CIRCUIT THEORY AND TERNARY ALGEBRA

Fang Zhenxian Liu Ying

(*Department of Information and Electronic Science, Heilongjiang University, Harbin 150080*)

Abstract This paper deals with a perfect digital circuit theory by using only one algebra which keeps to follow the Boolean algebra's laws and overcomes the difficulty with which the Boolean algebra is faced. The new theory provides a good expression of any realistic circuit's structure which contains the signal, network and load. Several theorems on the switch operators " $\uparrow, \parallel, \downarrow$ " and on the relations to transform from one type of circuits into another are proved. Based on these theorems a state equation method is proposed for analyzing dynamic circuits.

Key words Perfect digital circuit, Ternary algebra, Switch operation, Transform theorem, Dynamic circuit

方振贤: 男, 1936 年生, 教授, 现从事数字逻辑和计算机应用的教学和研究工作。

刘 莹: 女, 1948 年生, 实验师, 现从事近代物理和电子技术的教学和研究工作。