

# 对矩形波导中任意高度细导体柱的研究

黄 漪 杨乃恒 林守远

(南京电子技术研究所, 南京)

**摘要** 本文利用矩量法对矩形波导中任意高度的细柱体进行了研究。从柱体表面的电场积分方程出发, 选用脉冲基函数与点匹配的方法求解。对其中收敛较慢的一些无穷级数, 采用了若干数学处理, 大大加快了收敛速度。对柱体上的电流分布进行了较详细的讨论, 得出了一个新的较为精确的解析表达式, 求得的等效阻抗与有关文献中的实验值相当吻合。

**关键词** 波导; 波导不连续性; 矩量法; 基函数; 电流分布

## 一、引 言

矩形波导中的导电柱体是波导不连续性中的重要问题之一, 早在 50 年代, 就有许多学者对此进行了研究<sup>[1-5]</sup>。但是大多数是针对满高度的感性柱, 而且限于直径较小的细圆柱。直到最近, 由于各种数值解法的发展, 对任意截面形状的较粗的满高度柱体的研究获得了较满意的结果<sup>[6]</sup>, 但要解决任意截面、任意高度的柱体是比较复杂和困难的。本文用矩量法对这一问题进行了研究, 对于任意截面形状, 任意高度的细柱体 (柱体直径小于波长的 1/20) 获得了较满意的结果。

要用解析方法精确求出波导中的导体柱上的电流分布和波导内的电磁场是十分困难的, 只能采用一些近似的方法。这些方法大多事先假定柱体上的电流分布, 然后再用各种近似方法求解场方程, 所以结果有一定局限性, 特别是事先假定的电流分布在某些情况下误差较大<sup>[7]</sup>。本文采用矩量法, 事先不必假定柱体上的电流分布, 由柱体表面切向电场为零的边界条件建立电场积分方程, 用脉冲展开函数与点匹配的方法进行求解, 就可获得电流分布的数值解, 从而求得波导中的场分布及其等效电路。

## 二、理 论 分 析

如图 1 所示, 一细理想导电柱体在波导内与波导宽边垂直, 柱体的高度为  $h$ , 半径为  $R$ , 其轴位于  $(x_0, y, 0)$ 。假定波导内是均匀、无耗和各向同性的媒质  $(\epsilon, \mu)$ , 且波导的尺寸只能使主模传输, 入射波为  $TE_{10}$  模。其电场只有  $y$  分量, 其表达式为

$$E_y^i = \sin \frac{\pi}{a} x e^{-i\beta z} \quad (1)$$

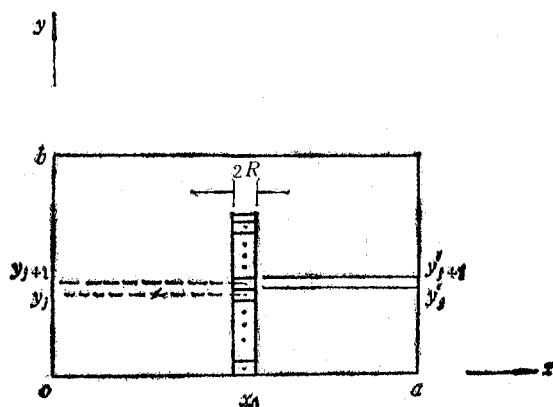


图 1 波导中任意高度的导体柱及其分段

式中  $\beta = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ 。由于考虑的柱体很细,其面电流沿周向的变化可忽略,即面电流  $\mathbf{J} = J(y)\hat{\phi}$ , 产生的散射场为

$$\mathbf{E}_s = -j\omega\mu \int_S \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' \quad (2)$$

其  $y$  方向的分量为

$$E_y^s = -j\omega\mu \int_S G_{yy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(y') dS' \quad (3)$$

上式积分在柱体表面  $S$  进行,  $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  为矩形波导中的并矢格林函数<sup>[8,9]</sup>,  $G_{yy}$  为它的  $yy$  分量, 其表达式为

$$\begin{aligned} G_{yy} = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_n}{abk^2 \Gamma_{mn}} (k^2 - k_y^2) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} x' \\ & \times \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{n\pi}{b} y' e^{-\Gamma_{mn}|z-z'|} \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $k_y = n\pi/b$ ,  $\Gamma_{mn} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 - k^2}$ ,  $\delta_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$

把(1)和(4)式代入柱体表面的边界条件,总电场的切向分量为零,即  $E_y^i + E_y^s = 0$  便得到电场积分方程,简写为

$$\mathcal{L}[I(y)] = \sin \frac{\pi}{a} x e^{-i\beta z} \quad (5)$$

式中算符

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I(y)] = & -j\omega\mu \int_0^b \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_n)(k^2 - k_y^2)}{abk^2 \Gamma_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \right. \\ & \times \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{n\pi}{b} y' e^{-\Gamma_{mn}|z-z'|} I(y') dy' \end{aligned} \quad (6)$$

注意上式中面电流密度  $J(y')$  沿柱体周向的积分已由轴向电流  $I(y')$  所代替,  $I(y') = 2\pi R J(y')$ 。

我们采用脉冲基函数和点匹配的办法求解(5)式。为此,把导体柱等分为 $M$ 段,每段长 $\Delta l$ ,第 $j$ 段的端点及中点的 $y$ 坐标分别为 $y'_j, y'_{j+1}$ 和 $y_j (j = 1, 2, \dots, M)$ 。定义脉冲展开函数

$$P_j(y) = \begin{cases} 1, & y'_j \leq y \leq y'_{j+1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (7)$$

将电流 $I(y)$ 在脉冲基函数下展开,即

$$I(y) = \sum_{j=1}^M I_j P_j(y) \quad (8)$$

式中 $I_j$ 为待定的常数,表示第 $j$ 段上的电流值,它是一个复数。

必须注意,在柱体的顶端电流 $I$ 应为零,但电荷并不为零,为满足这一边界的连续性条件,在分段时在顶端应留出半小段(如图1所示),这和自由空间线天线的情况<sup>[10]</sup>完全一样。检验函数选取为

$$W_i(x, y, z) = \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \delta(z - z_i) \quad (9)$$

$\delta(x)$ 为狄拉克 $\delta$ 函数,  $(x_i, y_i, z_i)$ 是柱体表面的匹配点,与文献[10]中处理线天线的矩量法一样,为避免源点和场点重合点的奇异积分,我们把电流近似看作为集中在轴线上的线电流,而场仍取在柱体的表面,即匹配点为 $(x_0 + R, y_i, 0)$ 。定义函数 $f$ 和 $g$ 的对称积为

$$\langle f, g \rangle = \int_S f g dS \quad (10)$$

式中 $S$ 为柱体表面。把(8)式代入(5)式,再和检验函数取对称积,经整理可得矩阵方程为

$$[Z_{ij}][I_j] = [V_i] \quad (11)$$

式中 $[I_j]$ 为 $M \times 1$ 阶矩阵,其元素即(8)式中的待定系数,  $[V_i]$ 也是 $M \times 1$ 阶矩阵,其元素为

$$V_i = \sin \left[ \frac{\pi}{a} (x_0 + R) \right] \quad (12)$$

$[Z_{ij}]$ 为 $M \times M$ 阶方阵,其元素可分为两部分,即

$$Z_{ij} = Z_{ij}^0 + Z_{ij}^* \quad (13)$$

式中

$$Z_{ij}^0 = Z_{ij}|_{n=0} = \frac{j\omega\mu\Delta l}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_{m0}} \sin \frac{m\pi}{a} (x_0 + R) \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \quad (14)$$

表示柱体上第 $j$ 段上单位电流在第 $i$ 段表面产生的所有的 $TE_{m0}$ 的场。

$$\begin{aligned} Z_{ij}^* = Z_{ij}|_{n \neq 0} &= \frac{j\omega\mu}{abk^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(k^2 - k_y^2)}{\Gamma_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} (x_0 + R) \\ &\times \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \cos \frac{n\pi}{b} y_i \int_0^b \cos \frac{n\pi}{b} y' dy' \end{aligned} \quad (15)$$

表示柱体的第 $j$ 段上的单位电流在第 $i$ 段的表面产生的除 $TE_{m0}$ 外的各高次模的场。

(14)和(15)式都是收敛很慢的级数,为了用较短的时间能准确地求得它们的近似值,

必须将它们作一些变换,以加速其收敛。利用等式<sup>[11]</sup>

$$\frac{1}{4} \ln \left[ \frac{\sin^2(x+y)/2 + \operatorname{sh}^2 t}{\sin^2(x-y)/2 + \operatorname{sh}^2 t} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mx) \sin(my)}{m} e^{-2mt} \quad (16)$$

可把(14)式化成

$$\begin{aligned} Z_{ij}^0 = & \frac{j\omega\mu}{ab} \Delta l \left\{ -\sin \frac{\pi}{a} (x_0 + R) \sin \frac{\pi}{a} x_0 \left( \frac{J}{\beta} + \frac{a}{\pi} \right) \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\Gamma_{m0}} - \frac{a}{m\pi} \right) \sin \frac{m\pi}{a} (x_0 + R) \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \\ & \left. + \frac{a}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin [\pi(2x_0 + R)/(2a)]}{\sin [(\pi R)/(2a)]} \right| \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{\Gamma_{m0}} - \frac{a}{m\pi} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{ak}{m\pi} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{ak}{m\pi} \right)^4 + \dots \right] \frac{a}{m\pi}$$

显然它随  $m$  增加时收敛的速度比  $\frac{1}{\Gamma_{m0}}$  提高了两个量级,因此可以方便地计算。

对于(15)式,可利用等式(证明见文献[9]中附录B):

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} (x_0 + R) \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \\ &= \frac{a}{2\pi} \{ K_0[k_n R] - K_0[k_n(2x_0 + R)] \} \\ &+ \frac{a}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \{ K_0[k_n(2ma - R)] + K_0[k_n(2ma + R)] \\ &- K_0[k_n(2ma + 2x_0 + R)] - K_0[k_n(2ma - 2x_0 + R)] \} \\ &\approx \frac{a}{2\pi} \{ K_0[k_n R] - K_0[k_n(2x_0 + R)] - K_0[k_n(2a - 2x_0 - R)] \} \quad (18) \end{aligned}$$

式中  $k_n = \sqrt{(n\pi/b)^2 - k^2}$ ,  $K_0[x]$  是零阶第二类修正贝塞尔函数,它随  $x$  的增大以很快速度趋于零,又因为

$$\int_{y_{i+1}}^{y_i'} \cos \frac{n\pi}{a} y' dy' = \frac{b}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi}{b} y_{i+1}' - \sin \frac{n\pi}{b} y_i' \right)$$

(15)式便可化为

$$\begin{aligned} Z_{ij}^n = & \frac{j\omega\mu}{\pi^2 k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2 - k_y^2}{n} \left( \sin \frac{n\pi}{b} y_{i+1}' - \sin \frac{n\pi}{b} y_i' \right) \cos \frac{n\pi}{b} y_i \\ & \times \{ K_0[k_n R] - K_0[k_n(2x_0 + R)] - K_0[k_n(2a - 2x_0 - R)] \} \quad (19) \end{aligned}$$

正如上面指出的,(19)式的收敛速度很快。经过这些变换,就可以方便准确地计算  $Z_{ij}$  的值了。

必须指出,在(18)式的近似中,我们取了三项,而在 Lewin<sup>[2,3]</sup> 以及最近 Ittipiboon<sup>[12]</sup> 的论文中都只取了前两项,这是不够的。因为一般情况下  $(2x_0 + R)$  与  $(2a - 2x_0 - R)$

是同数量级的,而且当  $x_0 \rightarrow a$  时,第三项比第二项更为重要,因此不能忽略。

至此,我们求得了矩阵方程(11)式中各元素的便于计算的表达式(19), (17)和(12)式,从而可以求得  $[I_i]$ 。一旦求得  $[I_i]$ ,便可由(2)式求得波导中的散射场,它与入射场的迭加就是波导中的总场。因为只有  $y$  方向的电流,所以

$$\mathbf{E}^i = -j\omega\mu \sum_{i=1}^M \int_{y_i'}^{y_{i+1}'} \mathbf{G}_y(x, y, z | x_0, y', 0) I_i dy' \quad (20)$$

式中

$$\mathbf{G}_y = (1/k^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}$$

其中

$$\mathbf{A} = j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_n}{ab\Gamma_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{n\pi}{b} y' e^{-\Gamma_{mn}|z|}$$

是幅度为  $1/\mu$  的  $y$  方向电流元的矢量磁位。波导内任一点的总电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r \quad (22)$$

由于我们假定波导内只能传输主模,各高次模均为消失模,因此在离柱体足够远处仅有主模存在。由(1)和(20)式可以求得主模电场为

$$E = \sin \frac{\pi}{a} x \times \left[ e^{-j\beta z} - \frac{\omega\mu\Delta l}{ab\beta} \sin \frac{\pi}{a} x_0 e^{-j\beta z} \sum_{i=1}^M I_i \right] j \quad (23)$$

由(23)式可以求得主模的反射系数

$$\Gamma = E_y^- / E_y^+ = -\frac{\omega\mu}{ab\beta} \Delta l \sin \frac{\pi}{a} x_0 \sum_{i=1}^M I_i \quad (24)$$

主模的传输系数为

$$T = E_y^+ / E_y^- = 1 - \frac{\omega\mu}{ab\beta} \Delta l \sin \frac{\pi}{a} x_0 \sum_{i=1}^M I_i = 1 + \Gamma \quad (25)$$

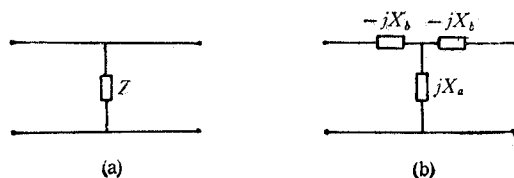


图 2 细柱体的等效电路

由于导体柱很细且无耗,具有互易性和对称性,因此,根据电路理论,可以方便地求得其等效电路为一并联阻抗,如图 2(a) 所示,阻抗  $Z$  的值为

$$Z = jX = -Z_0(1/\Gamma + 1)/2 \quad (26)$$

式中  $Z_0 = \omega\mu/\beta$  是主模特性阻抗。

### 三、计算结果和讨论

利用本文的公式计算了不同波导尺寸、频率和不同位置、高度的细圆柱体的等效阻

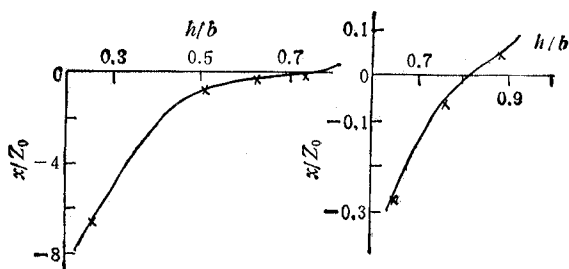


图 3 矩量法解与实验值的比较 ( $R = 0.794\text{mm}$ ,  $\lambda = 30\text{mm}$ ,  $x_0/a = 0.5$ )  
——矩量法解,  $\times \times \times$  实验值<sup>[1]</sup> ( $X = X_a - X_b/2$ )

抗。结果表明,其实部与虚部之比小于  $10^{-6}$ ,所以实部可以忽略,其等效阻抗是一纯电抗。这与理想导体的假设完全一致。图 3 给出了计算值与文献[1]中的实验值,结果表明,两者吻合得很好。注意:文献[1]中采用的是如图 2(b) 所示的 T 型网络。当  $R$  很小时,  $jX_b$  很小,图 2(b) 可用图 2(a) 代替<sup>[3]</sup>,其中  $X = X_a - X_b/2$ 。还需说明的是,本文所有的计算都是针对标准波导 BJ100 ( $22.86\text{mm} \times 10.16\text{mm}$ ) 中的导电柱体的。

图 4 给出了  $X/Z_0$  随柱体归一化高度  $h/b$  的变化曲线。当  $h=6$  时,这是波导中满高度感性柱的特例。由于这时柱体顶端电流不再为零,分段时不再需要留出半小段,作了这一微小修正后,不必改变原有公式和程序就可进行计算。

下面,我们讨论在矩形波导内细柱体上的电流分布问题。Lewin 曾用变分法研究这一问题,假定其分布为正弦分布,即  $I_1(y) = \sin k(h-y)$ <sup>[2]</sup>。Al-Hakkak<sup>[5]</sup> 把 Lewin 的  $I_1(y)$  代入他推得的阻抗公式表明,当  $h > \lambda/4$  时,求得的值与实验值相差较远。Chang 等人<sup>[4]</sup>在研究波导中可变高度的薄片时,发现用  $I_1(y)$  求得的阻抗值有时误差较大,因而提出了另外两种电流分布假设:  $I_2(y) = \cos[\pi y/(2h)]$ , 和  $I_3(y) = \cos ky - \cos kh$ 。

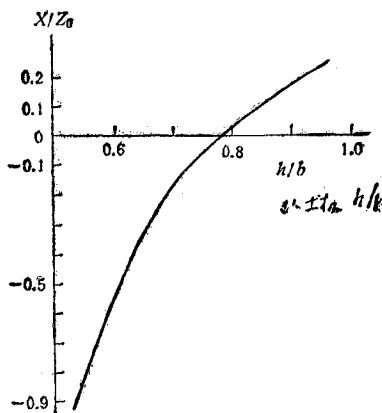


图 4 柱体的等效电抗随高度的变化  
( $R = 0.4\text{mm}$ ,  $\lambda = 30\text{mm}$ ,  $x_0/a = 0.3$ )

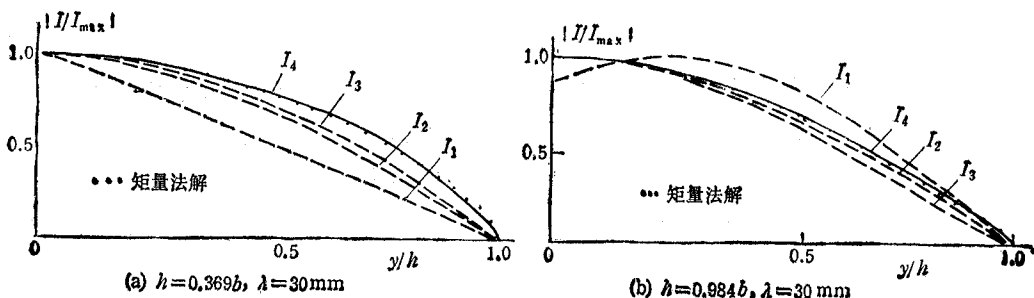


图 5 几种不同的电流分布

图 5 给出了两种不同柱体高度的  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  和我们的矩量法解的电流分布曲线。从图

中可见,矩量法解与他们的假定并不完全吻合,尤其与  $I_1$  相差较大,这与 Al-Hakkak 和 Chang 等人的结论是一致的。根据我们的矩量法解,在  $I_2$  的基础上利用曲线拟合技术,得到了一个新的电流分布表达式为

$$I_4(y) = \left[ 1 + \frac{1}{8} \frac{\lambda}{h} \left( \frac{y}{h} \right)^3 \right] \cos \frac{\pi y}{2h} \quad (27)$$

$I_4$  与  $I_2$  不同的是多了一项修正项  $\{\lambda(y/h)^3 \cos[\pi y/(2h)]/8h\}$ 。它反映了电流分布与入射波长和柱体高度的关系。在图 5 中还同时画出了  $I_4$  的归一化曲线。它与矩量法解非常一致。顺便指出,用  $I_4$  的形式来计算较宽的导体薄片和较粗的柱体时,可获得比前三种电流分布的假设更精确的结果,这将在另一文中介绍。

细柱体的等效阻抗是它的位置、高度和入射波长的函数。当  $z = 0$  时,由(24)和(25)式得出反射系数  $\Gamma = -1$  时,传输系数  $T = 0$ 。这表明柱体在波导内产生了谐振。这时柱体的高度称为谐振长度  $h_{res}$ 。Lewin 给出了细柱靠近波导窄壁时的  $h_{res}$  与  $\lambda$ 、 $R$  和  $x_0$  之间的关系为<sup>[2]</sup>

$$h_{res} = \frac{1}{4} \lambda - \frac{2x_0 - R}{2 \ln(2x_0/R)} \quad (28)$$

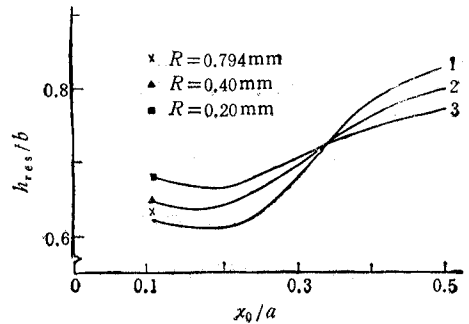


图 6 归一化谐振长度与细柱位置的关系

图 6 给出了三种不同尺寸的圆柱归一化谐振长度随归一化位置用本文方法计算的曲线,与(28)式求得的值作了比较,结果表明两者基本符合。

## 四、结 论

对置于矩形波导宽边的任意高度细柱体,由电场积分方程出发,利用矩量法,选用脉冲基函数和点匹配的方法,运用一些数学变换加快了其中无穷级数的收敛速度,从而准确和方便地求出了柱体上的电流分布。在矩量法解的基础上,采用曲线拟合技术得到了一个较为精确的新的电流分布近似表达式。用本文方法求解的过程简单,解的收敛性与稳定性都较好;求得的等效阻抗值与 Marcuvitz 的实验值吻合较好;求得的谐振长度也与 Lewin 等人的结果一致。导出的公式同样也适用于满高度 ( $h = b$ ) 的特殊情况。

不过本文假设的柱体直径很细,只考虑轴向电流,忽略了它沿周向的变化,因此只对  $2R/\lambda < 1/20$  的细圆柱可获得较准确的结果。

R. F. Harrington 教授曾对本课题的研究给予有益的指导,作者在此表示衷心的感谢。

## 参 考 文 献

- [1] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, McGraw-Hill Book Company Inc., (1951).
- [2] L. Lewin, *Advanced Theory of Waveguide*, Iliffe, London, (1951).
- [3] L. Lewin, *Proc. IEE Monograph No.259R*, (1957).
- [4] K. Chang, P. J. Khan, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-22**(1974), 536—541.
- [5] M. L. Al-Hakkak, *Electron. Lett.*, **5**(1969), 513—514.
- [6] Y. Leviatan, et al., *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-31**(1983), 806—812.
- [7] Huang Yi, *IEEE AP-S International Symposium*, 1990, Dallas, Texas, USA, Session 21.
- [8] C. T. Tai, *Dyadic Green's Function in Electromagnetic Theory*, Scranton, Pa, Intex Publisher, (1971).
- [9] C. T. Tai, *Proc. IEEE*, **61**(1973), 480.
- [10] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, New York, Macmillan, (1968).
- [11] 黄漪, 南京电子工程研究中心硕士论文, 1987年.
- [12] A. Ittiphoon, L. Shafai, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-33**(1985), 327—335.
- [13] A. G. Willianason, *IEE Proc. H*, **133**(1986), 1—9.

## ANALYSIS OF A CONDUCTING THIN POST WITH ARBITRARY HEIGHT IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE

Huang Yi    Yang Naiheng    Lin Shouyuan

(Nanjing Research Institute of Electronics Technology, Nanjing)

**Abstract**      A thin post with arbitrary height in a rectangular waveguide is treated by the moment method. The electric field integral equation of the post is solved with the pulse expansion and point matching. The convergence of some series involved is accelerated by using some mathematical treatments. The current distribution on the post is discussed. A new and more exact closed form for it is given. The computed results show in good agreement with those in Marcuvitz's *Waveguide Handbook*.

**Key words**      Waveguide; Discontinuity of waveguide; Moment method; Expansion function; Current distribution