

秩 -1 子空间跟踪算法¹

陈 辉 王 永 良

(武汉雷达学院兵器运用工程重点实验室 武汉 430010)

摘 要 子空间估计和跟踪问题是在现代阵列信号处理应用中的一个重要课题, 该文深入研究幂迭代算法并成功地将幂迭代用于子空间跟踪, 分析和讨论了针对运动目标秩 -1 子空间的估计和跟踪及 DOA 估计问题. 通过计算机仿真实验证明了这种方法的有效性.

关键词 方位估计, 子空间跟踪, 阵列信号处理

中图分类号 TN911.7

1 引 言

在阵列信号处理中, 各种不同的运用中都用到协方差阵 $R = E[XX^H]$ 的特征分解, 如超分辨空间谱估计, 频率估计, 盲通道脉冲响应估计等. 在数据矩阵 X 是静态的过程中, 则采用基于子空间分解的阵列信号处理技术, 比较典型的如 MUSIC, ESPRIT 算法, 这些算法是针对数据协方差矩阵进行特征分析, 从中提取反映信号信息的特征量, 完成信号的参数估计. 但是在实际应用中, 如对运动目标, 则数据矩阵 X 不是静态的, 则就要求重复数据协方差矩阵的特征分解或数据矩阵的奇异值分解, 但是这一过程由于涉及的计算量太大, 不太容易实现. 在实际应用过程中需要不断通过阵元采样数据来更新数据矩阵, 从而得到新的特征信息, 实现对变化信号的跟踪. 因此大多数高分辨谱估计技术不能直接应用, 因为这些算法无法针对变化的信号进行处理, 得到变化信号所包含的信息.

为了解决这一问题, 已有不少学者提出关于 DOA 跟踪的算法. 这些算法基本上分为三类, 其一是直接从静态过程扩展到非静态过程自适应处理算法, 如将 Jacobi 旋转和逆幂迭代^[1]等, 文献 [1] 算法中的每步子空间更新过程所需计算量为 $O(N^2K)$, N 为输入矢量的维数, K 为估计特征矢量的数目; 其二是有关秩 1 矩阵的算法, 如 ROSA 算法^[2]和 RLS 算法^[3], 这些算法需要的计算量为 $O(NK)$, 另外还有一些 URV 分解^[4]和 QR 分解^[5]为基础的子空间跟踪算法, 其计算量均为 $O(N^2)$; 其三是一类带约束的最优问题, 如以梯度为基础的算法^[6,7].

本文在分析幂迭代算法的基础上提出一种基于幂迭代的子空间跟踪算法, 其计算过程避免了特征分解过程和一维搜索谱峰的过程, 所以在子空间的更新过程中只需计算最大特征值或最小特征值对应的特征矢量, 即每步子空间更新所需的计算量只与迭代次数有关, 即其计算量为 $O(Nr)$, r 为迭代次数.

2 幂迭代算法及分析

设空间有 M 个阵元, 接收的数据协方差矩阵为 R

$$R = E[XX^H] = (1/L)XX^H \quad (1)$$

¹ 2000-07-28 收到, 2000-12-06 定稿
空军中青年科技拔尖人才资金资助课题

其中 H 为共轭转置, X 为阵元接收的数据矢量, L 为快拍数, 对 R 进行特征分解可得

$$\left. \begin{aligned} R &= U \Lambda U^H \\ U &= [U_1, U_2, \dots, U_M] \\ \Lambda &= [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $U_i, i = 1, 2, \dots, M$ 为特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, M$ 对应的特征矢量, 一般情况下特征值满足如下条件: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > \lambda_{p+1} \geq \dots \geq \lambda_M$, P 为矩阵 R 的秩, 这里记 $U_S = [U_1, U_2, \dots, U_p]$ 为信号子空间, 而 $U_N = [U_{p+1}, U_{p+2}, \dots, U_M]$ 为噪声子空间。

幂迭代算法如下:

$$\left. \begin{aligned} R_0^{(k+1)} &= (R^{(k)})^n \\ R^{(k+1)} &= R_0^{(k+1)} / \text{tr}(R_0^{(k+1)}) \\ V &= [1 \ 1 \ \dots \ 1] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

则当 $R^{(0)} = KI - R$, K 为一常数且 $K \geq \max(\lambda_i)$, n 为一正整数且 $n > 1$, 有下式成立

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R^{(k)} V = V_1 \quad (4)$$

其中 V_1 为噪声子空间各矢量的线性组合矢量。

证明

$$R^{(0)} = KI - R - U(KI - \Lambda)U^H$$

$$R^{(k)} = R_0^{(k)} / \text{tr}(R_0^{(k)}) = U \Lambda_k U^H / \text{tr}(R_0^{(k)}) = U(KI - \Lambda)^{n^k} U^H / \text{tr}(R_0^{(k)}) = U \Lambda'_k U$$

其中 $\Lambda'_k = \text{diag}[(K - \lambda_1)^{n^k} \ \dots \ (K - \lambda_M)^{n^k}] / \text{tr}(R_0^{(k)})$, 而 $\text{tr}(R_0^{(k)}) = \text{tr}(\Lambda_k) = \sum_{i=1}^M (K - \lambda_i)^{n^k}$ 。当 $k \rightarrow \infty$ 时, $n^k \rightarrow \infty$, 在理想情况下, 有 $\lambda_p \gg \lambda_{p+1}$, 而 $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_M = \sigma^2$, σ^2 为空间噪声功率, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda'_k = \text{diag}[0 \ \dots \ 0 \ (K - \lambda_{p+1})^{n^k} \ \dots \ (K - \lambda_M)^{n^k}] / \text{tr}(\Lambda_k) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} R^{(k)} V &= [U_S \ U_N] \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda'_k [U_S \ U_N]^H V \\ &= (\beta'_{p+1} U_{p+1} U_{p+1}^H + \beta'_{p+2} U_{p+2} U_{p+2}^H + \dots + \beta'_M U_M U_M^H) \\ &= (\beta_{p+1} U_{p+1} U_{p+1}^H + \beta_{p+2} U_{p+2} U_{p+2}^H + \dots + \beta_M U_M U_M^H) = V_1 \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\beta_i = \beta'_i U_i^H V$ 为一常数, $\beta'_i = (K - \lambda_i)^{n^k} / \text{tr}(\Lambda_k)$, $i = p + 1, \dots, M$ 。

下面我们对幂迭代作进一步分析与讨论。

(1) 当幂迭代讨论中 $R^{(0)} = R^{-1}$ 时, 即为文献 [1] 所示的逆幂迭代算法。

(2) 当 $R^{(0)} = KI - R$, $K \geq \max(\lambda_i)$, $n = 2$ 时, 为文献 [8] 与文献 [9] 所示的幂迭代算法。

(3) 当 $R^{(0)} = R$ 时, 可以证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} R^{(k)} V = V'_1$, 当 $\lambda_i, i = 1, \dots, p$ 相差不大时, V'_1 为信号子空间对应矢量组合成的矢量, 当有 $\lambda_1 > \lambda_2$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} R^{(k)} V = \beta_1 U_1 = V'_1$, U_1 为最大特征值对应的特征矢量。证明如上。

(4) 上述幂迭代算法中, n 的作用是为了加快收敛速度, 随着 n 的增加收敛速度按 n^k 变化, $n = 1$ 时即不收敛。

在实际应用中, 有下列条件成立 $\lambda_{p+1} > \dots > \lambda_M$, 则 (6) 式可以进一步简化.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda'_k = \text{diag}[0 \ \dots \ 0 \ (K - \lambda_m)^{n^k}] / \text{tr}(\Lambda_k) \quad (7)$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R^{(k)} V^* = \beta_M U_M = V_1 \quad (8)$$

证毕

显然, 上式的收敛速度主要取决于两最小特征值对应的比, 即 $[(K - \lambda_M)/(K - \lambda_{M-1})]^{n^k}$, 当 $\lambda_{M-1} \gg \lambda_M$ 时, 则幂迭代的速度很快, 反之则很慢. 这里再讨论一下 K 的选择, 显然 $K \rightarrow \max(\lambda_i)$ 时, 则同样也会加快收敛的速度, 而在这里为了避免对 R 的特征分解, 即无法知道 R 的最大特征值, 所以这里选取 $K = \text{tr}(R)$.

在 DOA 估计算法中, 子空间更新过程所需要的计算量比较大, 因此我们用将上述的幂迭代思想应用到子空间的更新中, 即得到如下的算法:

(1) 根据下式估计数据协方差矩阵 R_k ;

$$R_k = \alpha R_{k-1} + (1 - \alpha) X_k X_k^H \quad (9)$$

(2) 按幂迭代算法进行处理: 对矩阵 R_k 进行更新 $R_k = (R_{k-1})^n / \text{tr}((R_{k-1})^n)$, 再求出收敛的特征矢量 V ;

(3) 根据收敛矢量, 来更新噪声子空间 $U_N = V V^H$ 或信号子空间 $U_S = I - V V^H$;

(4) 采用相应的高分辨算法从更新的子空间中估计相应的信号方位. 这里可采用求根 MUSIC 或 ESPRIT 算法求得信源的方向.

对于相干信号源可以按下述方法进行处理: 对方差矩阵进行预处理, 当求得更新协方差矩阵后, 运用空间平滑技术等解相干技术进行预处理, 然后再按上述算法进行处理.

3 仿真实验及分析

在仿真分析中, 为了避免迭代起始的暂态过程, 仿真开始的协方差矩阵为在原始信号方向下的 100 次快拍结果.

实验 1 实验采用 100 次观察, 存在 3 个独立信号源, 方向分别为 -10° , 0° , 20° , 其中 20° 信号在 50 次快拍时出现, 实验中 $n = 3$, 图 1 中 (a), (b), (c) 分别为遗忘因子 $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.95$ 时的仿真结果.

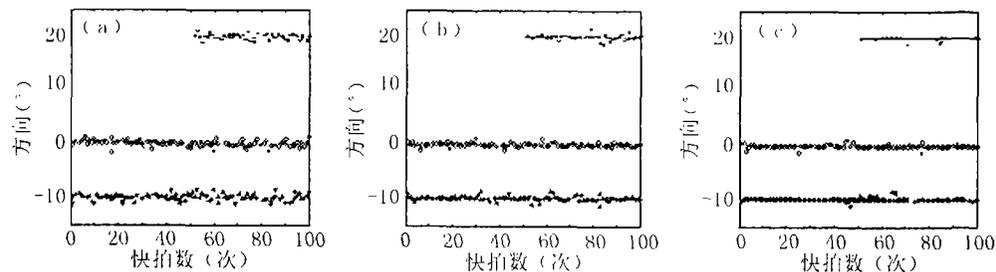


图 1 3 个独立信号源的跟踪 (第 3 个源在 50 次快拍出现)

(a) $\alpha = 0.05$, (b) $\alpha = 0.5$, (c) $\alpha = 0.95$

实验 2 实验采用 100 次观察, 原始信号为 2 个相干信号源, 方向分别为 $-10^\circ, 0^\circ$, 信噪比为 10dB, 实验中 $n = 3$, 方向分别为 $-10^\circ, 0^\circ$, 其中 -10° 信号按 -0.05° / 每次快拍数变化, 而 0° 信号则按 $+0.05^\circ$ / 每次快拍数变化, 图 2 中 (a), (b), (c) 分别为遗忘因子 $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.95$ 时的仿真结果.

实验 3 实验采用 200 次观察, 原始信号为 2 个不相干信号源, 实验中 $n = 3$, 方向分别为 $-10^\circ, 0^\circ$, 信噪比为 10dB, 方向分别为 $-10^\circ, 0^\circ$, 其中 -10° 信号按 $+0.05^\circ$ / 每次快拍数变化, 而 0° 信号则按 -0.05° / 每次快拍数变化, 图 3 中 (a), (b), (c) 分别为遗忘因子 $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.95$ 时的仿真结果.

从仿真结果可知, 当信号源方向变化时 $\alpha = 0.05$ 时跟踪情况相对好于 $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.95$, 而当信号源方向不变时, 则 $\alpha = 0.95$ 的跟踪比较稳定. 从以上的仿真结果可知, 本文的跟踪算法不仅可应用于相干源的场合, 也适用于非相干场合.

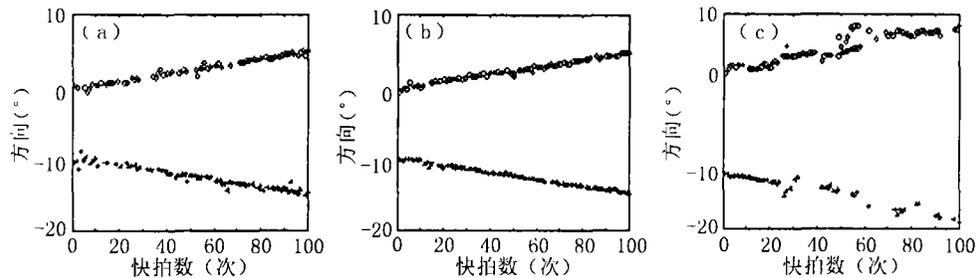


图 2 2 个相干信号源的跟踪
(a) $\alpha = 0.05$, (b) $\alpha = 0.5$, (c) $\alpha = 0.95$

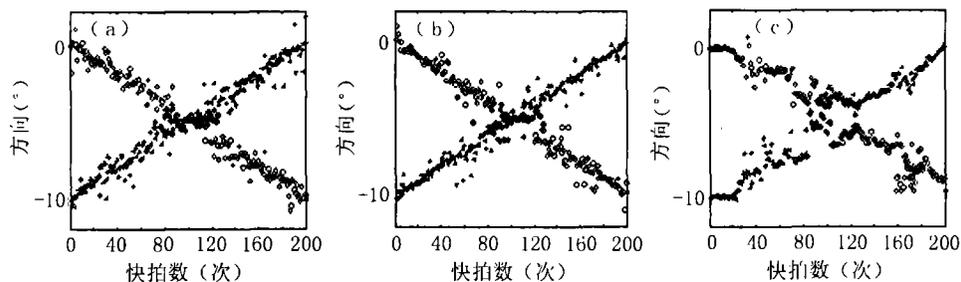


图 3 2 个独立信号源的跟踪
(a) $\alpha = 0.05$, (b) $\alpha = 0.5$, (c) $\alpha = 0.95$

4 结 论

本文首先分析了幂迭代算法, 在对幂迭代算法进行讨论的基础上, 提出了一种基于幂迭代的秩 -1 子空间跟踪算法. 理论和仿真都表明基于幂迭代算法的优点是其收敛速度比较快, 其运算量为 $O(Nr)$, 而且其实时跟踪性也比较好.

参 考 文 献

- [1] T. S. Durrani, K. C. Sharman, Eigenfilter approaches to adaptive array processing, IEE Proc.-F., 1983, 130(1), 22-28.
- [2] R. D. DeGroat, Noniterative subspace tracking, IEEE Trans. on SP, 1992, SP-40(3), 571-577.
- [3] B. Yang, Projection approximation subspace tracking, IEEE Trans. on SP, 1995, SP-43(1), 95-107.
- [4] G. W. Stewart, An updating algorithm for subspace tracking, IEEE Trans. on SP, 1992, SP-40, 1535-1541.
- [5] C. H. Bischof, G. M. Shroff, On updating signal subspaces, IEEE Trans. on SP, 1992, SP-40, 96-105.
- [6] J. Yang, M. Kaveh, Adaptive eigensubspace algorithms for direction or frequency estimation and tracking, IEEE Trans. on ASSP, 1988, ASSP-36(1), 241-251.
- [7] X. Yang, T. K. Sarkar, E. Arvas, A survey of conjugate gradient algorithms for solution of extreme eigen-problems of a symmetric matrix, IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37, 1550-1556.
- [8] 张永军, 陈宗鹭, 特征值平移超分辨率法, 电子科学学刊, 1998, 20(3), 417-420.
- [9] 张永军, 陈宗鹭, 幂迭代超分辨率快算法, 电子科学学刊, 1996, 18(5), 449-454.

A METHOD OF RANK-1 SUBSPACE TRACKING

Chen Hui Wang Yongliang

(Key Research Lab, Wuhan Radar Academy, Wuhan 430010, China)

Abstract Subspace estimation plays an important role in a field of modern signal processing applications. This paper studied deeply the power iteration, then an approach based on power iteration for tracking the signal subspace is presented. The problems of rank-1 subspace tracking and DOA estimation are discussed. The simulation results support the theoretical predications.

Key words Estimation of DOA, Subspace tracking, Array signal processing

陈 辉: 男, 1974 年生, 硕士, 讲师, 已发表论文十余篇. 主攻方向: 超分辨谱估计.

王永良: 男, 1965 年生, 博士, 教授, 现为武汉空军雷达学院兵器运用工程重点实验室主任. 空军中青年高科技拔尖人才, 中国电子学会高级会员, 已发表论文 80 余篇. 曾获省部级科技进步一等奖、二等奖各一项. 主要研究领域为: 雷达技术、阵列信号处理、自适应信号处理等.