第12卷 第5期 电子科学学刊 Vol. 12, No. 5
1990年9月 JOURNAL OF ELECTRONICS Sept., 1990

脉冲计数量化误差的研究与应用探讨* **

邹书文
(中山大学物理系,广州)

摘要 本文对数字化测量中脉冲计数的量化误差作了统计分析，导出了脉冲计数随机测量的概率分布,探讨了它在测量实践中的可能应用.

关键词 量化误差;二点分布;临界值

1. 引言

计数法测量频率和周期,不可避免要产生脉冲计数的量化误差. 实践表明,这种误差是测量误差的重要来源，且常常是主要来源. 它是如何产生的? 遵循怎样的规律? 如何减少它的影响提高测量精度? 为此,我们作了较为深入的研究,得到了具有一定普遍意义的结果.

2. 脉冲计数的量化误差和取值的概率分布

计数法测量频率和周期,若门控信号和计数信号中有一路为已知的"基准",那么由计数器计得的闸门(与门)开启时间通过的脉冲数 N，就可求得另一路的待测量（门控持续时间或计数信号频率). 但是,测量结果 N 只能是整数,是"量化"了的;而门控时间与计数信号周期之间不一定为整数倍关系,因而 N 与真值将有一差值 ΔN,这就是脉冲计数的量化误差. 显然,由于两路信号间没有同步锁定关系,门控信号的到来是随机的，因而闸门启闭截取计数脉冲的位置也是随机的. "截取位置"不同,计得的脉冲数就可能不一样,因此,对一定的门控信号和计数信号,不同时刻做的测量,N 的取值可能不同,N 是一个随机变数,取值随 N 而定的 ΔN 也是随机变数. 既然 N 和 ΔN 是随机变数,我们就应该了解它们所有不同的可能取值和相应各个取值的概率. 为此，假设计数信号是占空系数为 $\theta(0<\theta<1)$、周期为 T_0 的矩形脉冲,而门控脉冲的持续时间为 t, $t=N_0T_0$. 真值 N_0 一般不恰为整数,设其整数部分为 N_i，尾数为 N_f. 对这设定的两路信号,由于计数信号的周期性,只需考察闸门对一个计数脉冲周期有各种可能截取位置时,N 的各种可能取值和概率（该值位置宽度占一个计数脉冲周期的比例). 以两路信号处于某个相对位置为例,并分别以闸门启闭的两个位置为原点作坐标系,如图1所示. 可看到，若闸门启闭时刻向右移动一个脉冲周期即 x（用同一个 x 表示同步变化的两坐标变量）从0向1增加,作为 x 函数的 N 将取各种可能值. 引进计算机算法语言的取整函数后可得

$$N(x)=N_i-\mathrm{INT}(x)+\mathrm{INT}(\theta+N_f+x),\quad 0\leqslant x<1 \tag{1}$$

当 x 从0向1增加,且 θ、N_f 有各种可能值时,由 $N(x)$ 的取值分布情况可归纳得如下结

* 1988年8月22日收到,1989年3月2日修改定稿.
** 中山大学科研基金资助项目.

论:

(1) 对一定的计数信号和门控信号，N 的可能取值一般有两个，即 N_1 和 N_2，且有确定的出现概率 $P(N_1)$ 和 $P(N_2)$. 令 $P(N_1)=p$，则 $P(N_2)=1-p$. 因此,随机变数 N 服从于两个不同常数 N_1 和 N_2 以及 $p(0<p<1)$ 的二点分布. 且有

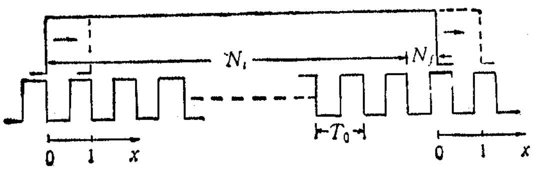

图 1　N 的取值随 x 而变

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= N_i + 1 + \mathrm{INT}(\theta + N_f) \\ N_2 &= N_1 - 1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} p &= \theta + N_f - \mathrm{INT}(\theta + N_f) \\ P(N_2) &= 1 - p \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(2) 相应于 N 的两个取值，ΔN 亦有两个:

$$\Delta N_1 = N_1 - N_0 = 1 - N_f + \mathrm{INT}(\theta + N_f),\quad \Delta N_2 = N_2 - N_0 = \Delta N_1 - 1 \tag{4}$$

其出现概率与对应的 N 的取值概率相同,因此，ΔN 的取值同样遵循二点分布. ΔN 的取值范围为 $-1<\Delta N<2$. 只有计数信号为窄脉冲 ($\theta\approx 0$) 的情况，才有类似通常的表示式: $-1<\Delta N<1$.

(3) 在 $\theta+N_f=1$ 或 0 的特殊情况下，N 和 ΔN 的取值唯一，即 N 取值 N_2，ΔN 取值 ΔN_2. 显然,这时可获得最精确的测量.

为了更深入了解随机变数 N 和 ΔN，可进一步求出它的数字特征量——数学期望值和方差:

$$E(N) = N_1 p + N_2(1-p) = N_1 - 1 + p \tag{5}$$

代入 N_1 和 p 值后则为

$$E(N) = N_i + N_f + \theta = N_0 + \theta \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(N) &= [N_1 - (N_1 - 1 + p)]^2 p + [(N_1 - 1) - (N_1 - 1 + p)]^2(1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned} \tag{7}$$

对于随机变数 ΔN，则有 $E(\Delta N)=\theta$，$\sigma^2(\Delta N)=\sigma^2(N)$.

至此,我们全面地描述了随机变数 N 和 ΔN 的特征. 下面就来探讨它的一些可能应用.

3. 脉冲计数随机测量的评估

由方差可得标准误差

$$\sigma(N) = \sqrt{p(1-p)} \tag{8}$$

不难看出,对应 $p=0.5$，$\sigma(N)$ 有极大值，也是 0.5. 这说明,作单次随机测量，脉冲计数的量化误差所导致的标准误差不大于半个脉冲.

由统计理论可知，如若对脉冲计数作 n 次随机测量，所得平均值 $\bar{N}$ 分布的标准误差 $\sigma(\bar{N})$ 为 $\sigma(N)/\sqrt{n}$. 但是，$\bar{N}$ 遵从什么样的分布? 由前述知道 N 遵从二点分布，取值 N_1 的概率为 p，不取值 N_1 而取值 N_2 的概率为 $1-p$. 若重复独立测量 n 次，N_1 总共出现 k 次 (k 可能取的值为 $0, 1, 2, \cdots n$)，显然，k 是一个随机变数,且服从二项分布，概率函数为

$$P(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{9}$$

表 1　$\bar{N}$的取值概率分布

k	0	1	2	3	4	5
$\bar{N}$	N_2	$N_2+0.1$	$N_2+0.2$	$N_2+0.3$	$N_2+0.4$	$N_2+0.5$
$P(k;\ 10,\ 0.1)$	0.3487	0.3874	0.1937	0.0574	0.0112	0.0015
$P(k;\ 10,\ 0.2)$	0.1074	0.2684	0.3020	0.2013	0.0881	0.0264
$P(k;\ 10,\ 0.3)$	0.0282	0.1211	0.2335	0.2668	0.2001	0.1029
$P(k;\ 10,\ 0.4)$	0.0060	0.0403	0.1209	0.2150	0.2508	0.2007
$P(k;\ 10,\ 0.5)$	0.0010	0.0098	0.0439	0.1172	0.2051	0.2461

6	7	8	9	10	$E(\bar{N})$	$\sigma(\bar{N})$
$N_2+0.6$	$N_2+0.7$	$N_2+0.8$	$N_2+0.9$	N_1		
0.0001	0.0000				$N_2+0.1$	0.09
0.0055	0.0008	0.0001	0.0000		$N_2+0.2$	0.13
0.0368	0.0090	0.0014	0.0001	0.0000	$N_2+0.3$	0.14
0.1115	0.0425	0.0106	0.0016	0.0001	$N_2+0.4$	0.15
0.2051	0.1172	0.0439	0.0098	0.0010	$N_2+0.5$	0.16

作 n 次测量的算术平均值为

$$\bar{N}=[N_1k+(n-k)N_2]/n=N_1-1+k/n \tag{10}$$

可见，统计量 $\bar{N}$ 是 k 的函数，对应每一个 k 值，相应有一个 $\bar{N}$ 值．因 k 服从二项分布，因而 $\bar{N}$ 也服从二项分布，且期望值与N的相同．

现在举例计算，n 一定、但取不同的 p 值时 $\bar{N}$ 的可能取值的概率分布．设 $n=10$，令 p 分别为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 (不难看出，p 分别为 0.9, 0.8, 0.7, 0.6时，情况与之对称，将得出相同结论，故后面只讨论 $p\leqslant 0.5$ 的情况)，计算结果如表 1 所示．从表中所列数据可看到，$\bar{N}$ 的概率分布的一个特点是 p 越小出现在期望值附近的概率密度峰值越大，分布的范围变窄，变化变陡峭．但是，由于 $\bar{N}$ 服从离散型二项分布，由计得的 $\sigma(\bar{N})$ 值，不易计算出 $\bar{N}$ 在区间 $[E(\bar{N})-\sigma(\bar{N}),\ E(\bar{N})+\sigma(\bar{N})]$ 内的概率含量．

统计理论已证明，当测量次数增多时，任意样本平均值的分布都逐渐接近于正态分布．对于二项分布，当 $np>5$ 和 $n(1-p)>5$ 时，就相当接近于正态分布[1]．显然，对于 $p\leqslant 0.5$ 的情况，只需 $np>5$．但是，在实际测量中，p 值可能很小，为把 $\bar{N}$ 分布看成是正态的，n 就要很大，以至于很难达到．为解决这一矛盾，可采用“临界值”的办法．即首先计算出一系列表示正态分布与二项分布临界状态的临界值 p_c, n_c 和 $\sigma(\bar{N})_c$．这些临界值的意义是：当重复测量 n_c 次时，凡是具有 p 值大于 p_c 的那些测量的 $\bar{N}$ 分布都可看为正态分布，$\sigma(\bar{N})_c$ 就是服从正态分布的那些测量可能具有的标准误差的下限．具有小于 $\sigma(\bar{N})_c$ 的那些测量的 $\bar{N}$ 分布不能被认为是正态分布，对这些测量，其误差限全用 $\sigma(\bar{N})_c$ 代替，以大代小，与服从正态分布的测量一样令其置信水平为 0.683．从表 1 可知，这样给出的置信水平，是以小代大．因而，上述作法至少不会夸大测量结果的精度和可靠性．现将计算所得的部分临界值列于表 2．使用时可根据测量次数查表确定测量结果如何表示，也可根据对测量精度的要求查表决定测量次数．

表 2 部分临界值

p_c	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
n_c	10	13	17	25	50	100	500	1000	5000
$\sigma(\bar{N})_c$	0.16	0.14	0.11	0.08	0.04	0.02	0.004	0.002	0.0004

最后的一个问题是不知道 p 值，如何计得 $\sigma(\bar{N})$. 这可采用通常的办法，把样本平均值的标准偏差 $S_{\bar{N}}=\sqrt{\left[\sum_{j=1}^{n}(N_j-\bar{N})^2\right]\Big/[n(n-1)]}$ 作为 $\sigma(\bar{N})$ 的估计值. 因此，在仅考虑量化误差或其它误差来源可忽略条件下，给出的置信水平为 68.3% 的测量结果应是

$$N_0=(\bar{N}-\theta)\pm S_{\bar{N}}, \ (\text{当}\ S_{\bar{N}}\geqslant\sigma(\bar{N})_c) \tag{11}$$

4. 应用整数倍概率分布提高测量精度

令 (2) 和 (3) 式中的 N_f 为 0，即门控宽度为计数脉冲周期的整数倍，根据(5)和 (6) 式可得

$$\theta=0:\ N_1=N_i+1,\ P(N_1)=0;\ N_2=N_i,\ P(N_2)=1;\ N_0=N_2 \tag{12}$$

$$\theta=0.5:\ N_1=N_i+1,\ P(N_1)=0.5;\ N_2=N_i,\ P(N_2)=0.5;$$
$$N_0=(N_1+N_2)/2-0.5 \tag{13}$$

由此可见，两信号间有“整数倍”关系时，对于计数信号为窄脉冲的情况，N的取值唯一，可获得精确测量；对于计数信号为矩形脉冲 ($\theta=0.5$) 的情况，虽是两个取值，但其概率相等，因而有可能找到满足条件的精确测量的方法.

在实际测量中，两信号间往往并不为整数倍关系. 但是，如果我们倍增门控时间，使原来不为整数的，经放大有可能为整数，这样，根据整数倍概率分布能得到精确测量的那部分就增加了，而且对测量的精确度可作出恰当估计. 例如，将门控时间增宽 10 倍，那么凡是十分之几的零头即为整数，考虑到不为十分之几的部分，测量精度为 0.1 个脉冲. 据此可推理门控再增宽的情况. 下面是采取的增宽门控宽度两种方法.

(1) 对于计数信号为窄脉冲　只要简单倍乘门控时间就可收到预期效果，正如通常的数字频率计测频率时通过倍乘选择增加小数点后面的有效位数那样. 这说明整数倍概率分布的原理与电子测量技术中的作法相一致.

(2) 对于矩形脉冲　可采用双计数电路结构，经倍乘选择后的门控信号和计数信号分成两支后(计数信号的其中一支需经倒相)才输入两个闸门进行计数. 如果门控脉冲是前后半周对称的周期信号，则由倒相器代替倍乘选择电路，通过连续重复多次开门取数的办法来达到增宽门控时间的效果，如图 2 所示. 设两闸门经连续相间开门 n 次(各 $n/2$ 次)后，两计数器计得的脉冲数分别为 N_1 和 N_2，那么根据 (13) 式可得精确到 ($1/n$) 个脉冲的结果:

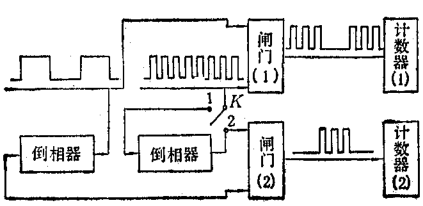

图 2　双计数测量电路

$$\bar{N}=(N_1+N_2)/n-0.5. \tag{14}$$

对于窄脉冲的情况，只要将图 2 中的开关打向 2 即可.

采用图 2 电路很适宜应用计算机进行测量. 我们曾用 Apple 微机测量音频信号频率[2].

以上研究，忽略了实际波形的脉冲沿时间和门控时间的不稳定性等因素带来的误差. 在总误差中只有这些误差相对很小时，才能只考虑量化误差. 虽然量化误差与频率无关，但应有与之相适应的测试电路，否则频率升高或门控增宽，计数器的速度就可能跟不上或产生溢出.

初稿曾得到张光昭教授审阅，特此致谢.

参　考　文　献

[1] 李惕碚，实验的数学处理，科学出版社，1983 年，第 41 页.
[2] 邹书文，物理，16(1987) 6，373—374.

STUDY ON THE QUANTIZED ERROR OF PULSE-COUNTING AND ITS APPLICATIONS

Zou Shuwen

(Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract Statistical analyses on the quantized error of pulse-counting in digitized measurement are made. A Probability distribution of pulse-counting in random measurement is obtamed The probable applications in measurement are studied.

Key words Quantized error; Bi-point distribution; Critical value