第9卷 第3期　　电子科学学刊　　Vol.9, No. 3
1987年5月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　May, 1987

旋转因子合并的频率抽取FFT算法——RCFA的新解释

许 蔚　　陈宗骘
(中国科学院电子学研究所)

提　　要

对频率抽取 FFT 算法进行修改,将两级旋转因子进行合并,得到旋转因子合并的频率抽取 FFT 算法.它与马滕斯(Martens)利用多项式代数理论导出的递归割圆因式分解算法(RCFA)结果完全相同,具有结构简单、计算效率高的优点. 与 RCFA 相比,它便于被工程技术人员理解和使用,还很容易被推广到时间抽取的情况.

一、引　　言

离散傅里叶变换 (DFT) 是非常有用的一种变换. 目前常用的 DFT 快速算法有快速傅里叶变换 (FFT)、威诺格拉德 (Winograd)-傅里叶变换算法 (WFTA)、素因子算法 (PFA) 等. FFT 是一种递归形式的算法, 因此结构简单,实现容易,为人们所普遍采用. WFTA 和 PFA 虽然计算效率高于 FFT,但没有递归形式,因此结构复杂, 实现困难,妨碍了它们的普遍使用. 马滕斯利用多项式代数理论, 导出了一种计算 DFT 的新算法——递归割圆因式分解算法 (RCFA)[1]. 它的计算效率可与 WFTA 和 PFA 相比,而又具有递归结构,结构简单,实现方便, 所以是一种比较理想的 DFT 计算方法. 由于多数工程技术人员不熟悉多项式代数理论,因而 RCFA 难于为他们所理解应用. 我们对频率抽取 FFT 算法进行旋转因子合并,可以得到相同的结果,大大地方便了工程技术人员的理解和应用.

二、旋转因子合并的频率抽取 FFT 算法

根据常用的 DFT 定义[2],一个N点复数序列 $\{x(n)|n=0,1,\cdots,N-1\}$ 的 DFT 为一个新的N点复数序列 $\{X(k)|k=0,1,\cdots,N-1\}$. 它称为 $\{x(n)\}$ 的频谱,满足:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\ k=0,1,\cdots,N-1, \tag{1}$$

其中

1986年5月23日收到,1986年9月1日修改定稿.

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}. \tag{2}$$

频率抽取 FFT 算法把一个N点 DFT 的计算分解为两个分别代表奇频和偶频频谱的长度减半的 DFT 的计算，并一直分解直至 1 点 DFT[2]．在分解过程中，对偶频部分，只需进行复数加减法就能完成分解；而对奇频部分，则不仅需要进行复数加减法，还需要进行复数乘法才能完成分解．所以我们应该注意研究奇频部分．对奇频部分再进行频率抽取的分解，我们得到图 1 所示的计算流程．

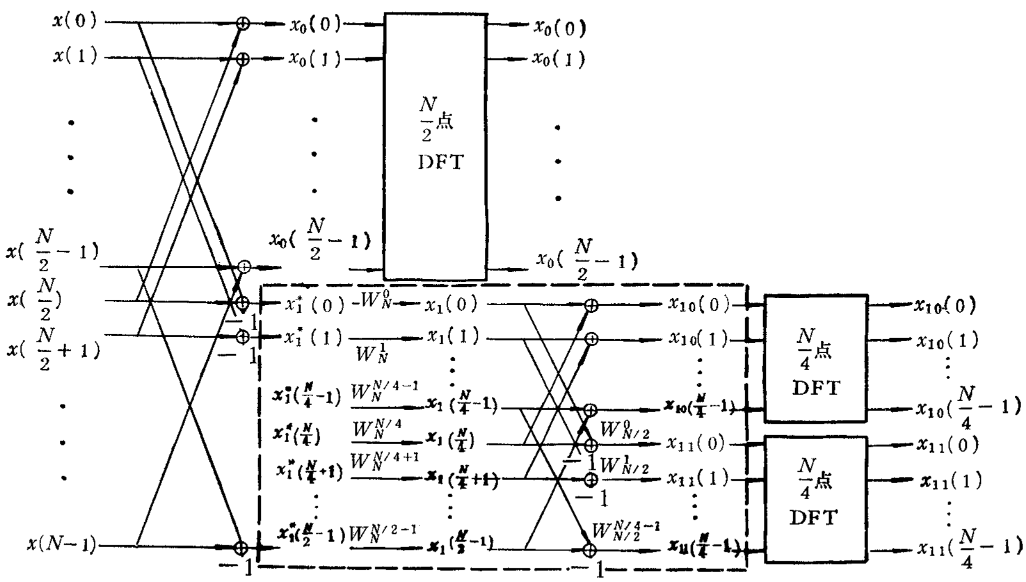

图 1　对奇频进行第二级频率抽取后的N点 DFT 示意图

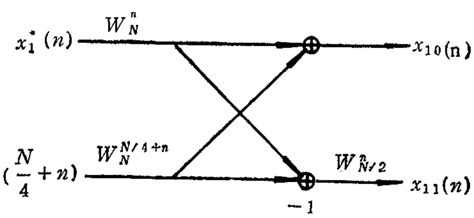

图 2　两级频率抽取中的复乘运算单元

在图 1 中，两级频率抽取过程中所需进行的乘法都画在一个虚线框内．框中共有$N/4$个运算单元，它们的一般表示如图 2．

图 2 所表示的数学关系为：

$$x_{10}(n) = x_1^*(n)W_N^n + x_1^*(N/4+n)W_N^{(N/4+n)}, \tag{3}$$

$$x_{11}(n) = [x_1^*(n)W_N^n - x_1^*(N/4+n)W_N^{(N/4+n)}]W_{N/2}^n. \tag{4}$$

由图 2 可以看出，输入处的两个旋转因子正好差 $W_N^{N/4}$，由(2)式知：

$$W_N^{N/4} = -j, \tag{5}$$

而乘以 j 的复乘法是不必实际相乘的．这样就有可能把输入处的两个旋转因子中的公共部分 W_N^n 移到输出处与第二级旋转因子合并，而在输入处的下端留下一个不必实际相乘

的 j 因子. 可用数学公式把这个过程描述如下. 将(5)式代入(3)式和(4)式,分别得:

$$x_{10}(n) = [x_1^*(n) + x_1^*(N/4+n)W_N^{N/4}]W_N^n = [x_1^*(n) - jx_1^*(N/4+n)]W_N^n, \tag{6}$$

$$x_{11}(n) = [x_1^*(n) - x_1^*(N/4+n)W_N^{N/4}]W_N^n W_{N/2}^n = [x_1^*(n) + jx_1^*(N/4+n)]W_N^{3n}. \tag{7}$$

这样,图 2 的运算单元就简化成了图 3 的运算单元.

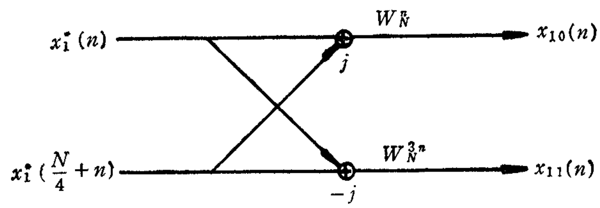

图 3　两级旋转因子合并后的频率抽取复乘运算单元

比较图 2 和图 3 可以看出,在每个运算单元中,经过旋转因子合并, 复乘法的次数由 3 次减少为 2 次,而复加法的次数保持不变,因而运算效率提高了.

将图 3 的运算单元代替图 2 的运算单元置于图 1 中, 就完成了一级旋转因子合并.

将留下的一个 $N/2$ 点 DFT 和两个 $N/4$ 点 DFT 按同样的方法分解并合并旋转因子,直至 2 点和 1 点 DFT,就得到旋转因子合并的频率抽取 FFT 算法.

对于 16 点的 DFT,其旋转因子合并后的频率抽取 FFT 算法流程如图 4 所示.

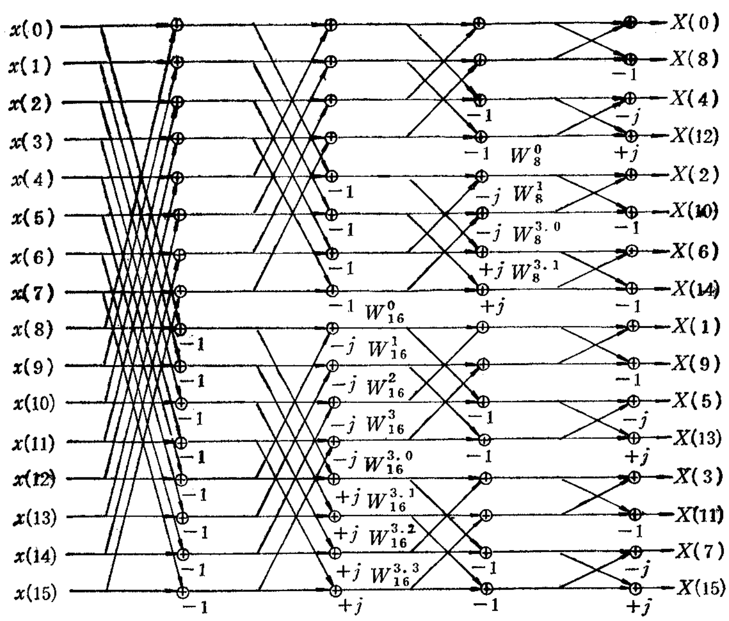

图 4　计算 16 点 DFT 的旋转因子合并的频率抽取 FFT

与 16 点的 RCFA 流程[1](图 5)相比,可以看出, 除了因为所采用的 DFT 定义有所不同导致因子 j 与 $-j$ 互换之外,它们的结果完全相同.

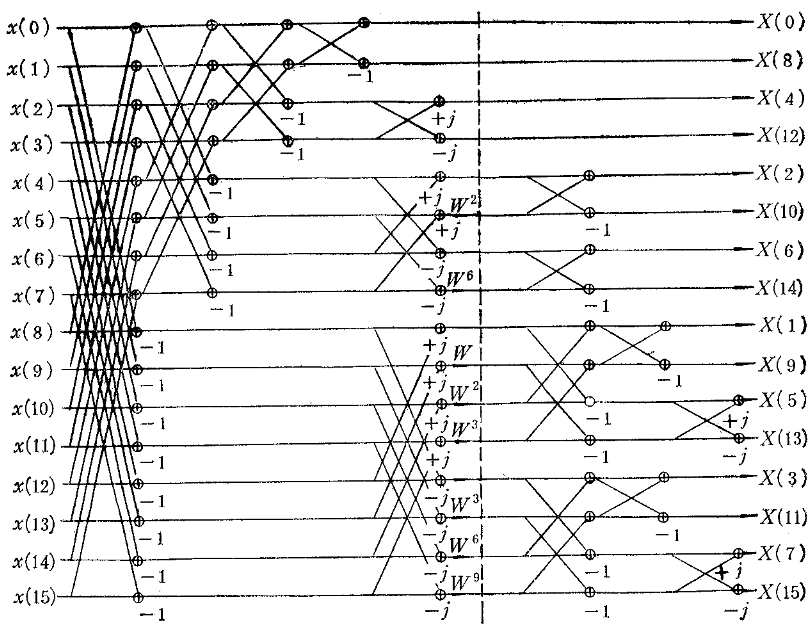

图 5 计算 16 点复序列的 DFT 的 RCFA 流程

三、一些有关的结果

在频率抽取 FFT 中，除了最后剩余的一级旋转因子不能被合并外(实际上最后剩余的一级旋转因子是不必实际相乘的)，其余所有的旋转因子都可以从图 2 的形式合并到图 3 的形式. 而当级数比较多时，最后一级的运算所占的百分比很小，旋转因子合并前后的运算次数主要取决于参加合并的那些级. 由于图 2 中每 3 个旋转因子的乘法合并后变成图 3 中 2 个旋转因子的乘法，所以当级数比较多时，RCFA 或旋转因子合并的频率抽取 FFT 的复乘法次数约为频率抽取 FFT 的复乘法次数的 2/3.

根据第二部分的讨论，设 $N=2^t$ 时旋转因子合并的频率抽取 FFT 所需的复乘法次数为 $M(t)$，则有:

$$M(t)=2^{t-1}-2+M(t-1)+2M(t-2), \tag{8}$$

$$M(1)=M(2)=0. \tag{9}$$

从(8)式、(9)式看来，这似乎是一个难以用解析的通用表达式来表示的函数. 马滕斯已经给出了它的近似表达式如下[1]:

$$M(t)\approx\frac{1}{3}\cdot 2^t\left(t-\frac{8}{3}\right). \tag{10}$$

我们对 $t=3,4,\cdots,13$ 的情况，用(8)式和(9)式计算了 $M(t)$ 的值，发现它精确地符合如下表达式:

$$M(t)=\frac{1}{3}\cdot 2^t\left(t-\frac{8}{3}\right)+1+\frac{1}{9},\quad t\ 为奇数; \tag{11}$$

$$M(t)=\frac{1}{3}\cdot 2^t\left(t-\frac{8}{3}\right)+1-\frac{1}{9},\quad t\text{ 为偶数}. \tag{12}$$

事实上，从(8)式、(9)式出发，利用数学归纳法，我们可以严格地证明，当 $t\geqslant 3$ 时，(11)式、(12)式成立.

旋转因子合并的频率抽取 FFT 利用了基 2-FFT 中因子 j 的复乘法不必实际计算的性质，从而合并旋转因子，减少了复乘法运算. 那么对于同样利用了因子 j 的复乘法性质的基 4-FFT，能不能也通过两级旋转因子合并的方法来减少复乘法运算，从而得到更高的效率呢？回答是否定的. 因为在基 2 的情况下，第二级蝶形运算单元的输入口上下两端的位置差为 $N/2^2$ 点，所以它们的旋转因子差是 $W_N^{N/4}$，即 j 的幂，可以用因子 j 的复乘法来消去这一差额，从而把两个旋转因子都并入下一级旋转因子. 而在基 4 的情况下，第二级蝶形运算单元的四个输入口的位置差依次为 $N/4^2$ 点，它们的旋转因子差是 $W_N^{N/16}$ 的幂而不是 j 的幂，不做实际的复乘法是不能消去这一差额的，因而无法进行两级旋转因子的合并.

那么，在基 2 的情况下，能不能将更多级的旋转因子合并呢？回答也是否定的. 因为第三级蝶形运算单元的输入口上下两端的位置差为 $N/2^3$ 点，因而它们前面的旋转因子差为 $W_N^{N/8}$ 的幂，也不是 j 的幂.

四、结　论

对频率抽取 FFT 算法进行两级旋转因子合并，得到的旋转因子合并的频率抽取 FFT 算法与 RCFA 结果完全相同. 这种算法的导出避免了多项式代数理论的使用，易于被工程技术人员所接受，因而是更为理想的 DFT 快速算法. 旋转因子合并的方法也很容易推广到时间抽取的情况. 但是，两级旋转因子合并的方法不能推广到基 4 的情况，也不能推广为多级旋转因子合并.

参　考　文　献

[1] J. B. Martens, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-32(1984), 750.
[2] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, Digital Siginal Processing, Prentice-Hall Inc., 1975.
董士嘉、杨耀增译，数字信号处理，科学出版社，1980.

TWIDDLE FACTOR MERGED FREQUENCY-DECIMAL FFT ALGORITHM——A NEW EXPLANATION FOR RCFA

Xu Wei and Chen Zongzhi

(Institute of Electronics, Academia Sinica)

Merging the widdle factors in two neighbouring stages for frequency-decimal FFT algorithm, we can obtain the twiddle factor merged frequency-decimal FFT algorithm. Its result is exactly the same as that of the rescursive cyclotomic factorization algorithm (RCFA) which Martens (1984) proposed by using polynomial algebra theory. So it has the advantages of simple structure and high efficiency. It is much easier to be understood and used by engineers than RCFA, and it is also easy to be generalized for the time-decimal case.