任意通带信号的采样定理与频带整体适应性数据表示 [1]

王 桥 吴乐南
(东南大学无线电工程系 南京 210096)

摘 要 本文建立了任意通带信号的采样定理，对附有直流分量的带通信号、几个带通的组合、或者若干个带通与带限组合等等这类组合带信号，给出最低采样率的算法，可直接用于数据表示和数据压缩等相关问题。
关键词 采样定理，数据表示，最低采样率
中图号 TN911

1 引 言

采样定理至少用于两个目的：一是信号表示，二是波形重建。经典的采样定理是针对带限信号的，围绕它已经积累了丰富的文献。在通信理论中，人们又对窄带带通信号建立了相应的采样定理，例如对通带是 1,000kHz 至 1,001kHz 的信号，只需要 2kHz 采样即可重建信号，大大突破了 Nyquist 率。

在通信与数据压缩等领域的很多情况下，信号比较稳定地同时占据了某几个频带，例如频分复用 (FDM) 、某些领域的超声波检测信号等等。此时能否用较低的采样率表示或重建信号，是很令人感兴趣的课题。关于采样定理与数据压缩的联系，可参考文献 [1] 。

研究数据表示的目的之一是以尽可能少的离散数据完备地表示一个模拟信号。对复杂通带的信号可否建立采样定理？如何计算最低采样率 (保证精确重建信号)? 这些就是本文将要解决的问题。本文的实质性结果是：在理论上得出组合带信号的采样定理，构造出计算最低采样率的有效算法。同时对此进行了实验验证。

2 理论结果

2.1 任意通带信号的采样定理

首先需要一个定义，严格地规定不会发生频谱混叠。

定义 设 $\lambda > 0$ ，定义映射 $\rho : E \to [0,\lambda)$ 为 $\rho : t \mapsto \rho(t) \equiv t(\mathrm{mod}\ \lambda)$ ，在不计一个零测集的意义下，如果上述映射是单射，则称 E 关于 λ 相容。

例 1 带限信号的频带为 $[-f,f]$(注意实信号频谱总是关于原点对称的)，它关于任意实数 $\lambda \geq 2f$ 都是相容的。

例 2 带通信号的频带为 $[-f_e,-f_s]\bigcup[f_s,f_e]$ ，任意取

$$\lambda \in \bigcup_{n=0}^{N}\left[\frac{2f_e}{n+1},\frac{2f_s}{n}\right],\qquad N=\left[\frac{f_s}{f_e-f_s}\right],$$

$n=0$ 时，规定 $[2f_e,\frac{2f_e}{0}]=[2f_e,+\infty)$ 。可以验证频带 E 仅与这些 λ 相容。

[1] 1998-09-02 收到， 1999-07-07 定稿
国家自然科学基金 (项目编号 69772025) 和中国博士后科学基金资助课题

定理 1 如果频带 E 关于 λ 相容，则对频带内的任意信号 $f(x)$ ，有重建公式：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\frac{n}{\lambda})S(x-\frac{n}{\lambda}),\quad S(x)=\frac{1}{2\pi\lambda}\int_E e^{j2\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi. \tag{1}$$

证明 由于相容性， $F(\xi)$ 可以在集合 E 上展开为 Fourier 级数：

$$F(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\frac{n}{\lambda})e^{-j2\pi n\xi/\lambda},\qquad \xi\in E,$$

再做逆 Fourier 变换即可得到 (1) 式。 证毕

这一结论最初的思想萌发于我们最近的工作 [2] ，在那里解决了最近流行的一些采样定理与经典的 Shannon 采样定理之间内在的非协调性，并且不用标架得到了非均匀采样定理。当然由例 1 和例 2 知道 Shanon 采样定理和窄带带通信号的采样定理都是定理 1 的特例. 不过我们无意于这一类推广，而应力求对具体的组合频带，能实实在在地计算出最小的采样率 λ ，这对数据表示才是本质性的。

2.2 最低采样率的计算

计算最低采样率的困难在于，作为一个组合优化问题它不存在一般性的解析表达式。如果知道频带的区间构成 $E=[a_1,b_1]\bigcup\cdots\bigcup[a_n,b_n]$ ，（其中区间两两不相交），我们将用下面的想法设计最低采样率的算法。

根据相容性，若最低采样率为 $\lambda_{\min}$ ，则其中必然存在两个区间 $[a_m,b_m]$ 和 $[a_l,b_l]$ 以及一个非零整数 k ，使得

$$a_m=b_l+k\cdot\lambda_{\min}, \tag{2}$$

这是从线性最优化问题的解必然在约束多边形区域的边界上得到的结论。因此，可以对上述 n 个区间两两配对 (复杂度为 $O(n^2)$) 来尝试相容性，最低采样率必然出现在某一配对中。再估计出上述整数 k 的上界 ($k\lambda$ 只能是某一区间的右端与另一区间左端之差)，所以侯选的最低采样率 λ 只有有限个。

定理 2 最低采样率包含在下述有限集合 S' 中,

$$\lambda_{\min}\in S'=\left\{\frac{|a_m-b_l|}{k_{ml}};\ m\neq l,\ k_{ml}=1,2,\cdots,\left[\frac{|a_m-b_l|}{\Sigma}\right]\right\}, \tag{3}$$

其中 Σ 是通带的总宽度 $\Sigma=\sum_{m=1}^n(b_m-a_m)$ 。

证明 从定义里的单射性质知道，当 E 关于 $\lambda_{\min}$ 相容时，必然有 $\lambda_{\min}\geq\Sigma$ ；另外借助 (2) 式得到 $\lambda_{\min}=\frac{|a_m-b_l|}{k}$ (k 是某个正整数)，因此 k 满足 $k\leq\frac{|a_m-b_l|}{\Sigma}$ 。 证毕

这样一来只要对集合 S' 的元素验证相容性即可，最后对算法进行细化加工，写为

输入: $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n]$; **输出**: $\lambda_{\min}$

(1) 计算总宽度 $\Sigma=\sum_{m=1}^n(b_m-a_m)$ ，总跨度 $\Lambda=\max_m b_m-\min_m a_m$;

(2) $\lambda_{\min}:=\Lambda$;

```
for (m = 1 to n step 1)
{ for (j = 1 to n step 1 )
    { while (m ≠ j)
```

$\{ \ km := [\frac{|a_m - b_j|}{\Sigma}]$

while $(km > 0)$

$\{ \ \lambda := \frac{|a_m - b_j|}{km}$

if $(km > 0$ and $\lambda \notin S_E)$

$\{km := km - 1; \ \lambda := \frac{|a_m - b_j|}{km};\}$

else if $(\lambda < \lambda_{min})$

$\{\lambda_{\min} := \lambda; \ km = 0;\}$

$\} \} \} \}$

return $\lambda_{\min}$

(记号 $\lambda \notin S_E$ 表示 E 关于 λ 不相容)

注记 计算实际组合带信号的最低采样率，应该注意频带原点左右的对称性决定了通带的形式必然是 $[-q_N, -p_N], \cdots, [-q_1, p_1], \cdots, [p_N, q_N]$ 的合并。对应的恢复公式是

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\frac{n}{\lambda_{min}}) S(x - \frac{n}{\lambda_{min}}), \quad S(x) = \frac{1}{\lambda_{min}\pi x} \sum_{k=1}^{N} (\sin 2\pi q_k x - \sin 2\pi p_k x), \tag{4}$$

其中低通子带如 $[-f, f]$ 要写成 $[-f, 0] \bigcup [0, f]$ 。此外还要注意，组合带信号的最低采样率与 Nyquist 率的性质不同 (除非是单一的带限情形)， $\lambda > \lambda_{\min}$ 并不能保证以 λ 为采样率就可以恢复信号。

2.3 验证

由两个载波信号 (一个通带是 36Hz 至 38Hz ，另一个通带是 40Hz 至 42Hz) 叠加成为组合带信号 $f(x) = \cos 74\pi x(\sin 2\pi x/(2\pi x)) + \cos 82\pi x(\sin 2\pi x/(2\pi x))$ 。用采样函数 $S(x) = (\sin 84\pi x - \sin 80\pi x + \sin 76\pi x - \sin 72\pi x)/(8\pi x)$ 按采样率 8Hz 重建信号，公式为 $f(x) = \sum_n f(n/8) S(x - n/8)$ 。实验结果如图 1 所示。

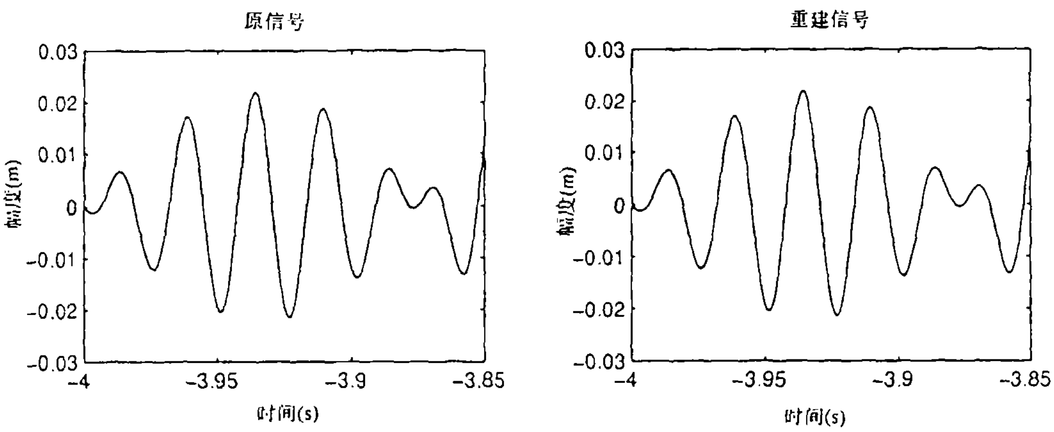

图 1 对组合带信号采样定理的实验验证

3 应　用

对一段附加了直流分量的带通模拟信号进行数据表示．信号的频带 (正频率部分) 为 41.5kHz 至 43.5kHz，附加了低于 500Hz 的低频分量．为了保证稳定性，我们在计算最低采样率时，把频带的范围扩大到 41kHz 至 44kHz，而低频部分为 1kHz．这样按照前面的算法得出最低采样率为 8kHz．所得数据可以完全恢复原始的模拟信号．一般对模拟信号进行 A/D 变换时，如果信号的频带呈现组合带形式，则可先将频带端点适当地进行外移，然后对组合带信号计算最低采样率，所得的数字信号可以用 (4) 式进行 D/A 转换．

在数据压缩领域，如果数据是按照不低于 Nyquist 率的采样率采集的，但是信号本身比较稳定地占据某些频带，则可以用 (4) 式得出采样率变换、并且设计出对应的预测器，可以有效地进行数据压缩．这方面的具体技术我们将另行撰文予以详细说明．

根据信号占据频带的稳定特性，直接从采样定理入手，以最经济的采样率记录数据，这是信号表示理论的目的之一，用途广泛．本文在理论上获得了一般性的任意通带信号的采样定理，特别给出了计算最低采样率的有效算法，并且用实验验证了理论结果．

致谢　作者诚挚地感谢本文编辑和审稿专家提出的细致、中肯的修改意见．

参　考　文　献

[1] 吴乐南．数据压缩的原理及应用，北京：电子工业出版社，1995 年：15–17.

[2] Wang Qiao. Regular and irregular sampling theorems in wavelet subspaces. Math. Appl. 1998, 11(3): 90–94.

SAMPLING THEOREM FOR SIGNALS IN ARBITRARY PASSBAND AND DATA REPRESENTATION ADAPTED TO CHANNEL

Wang Qiao　　Wu Lenan

(*Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing* 210096)

Abstract　A sampling theorem for signals in arbitrary passband is proposed and the efficient algorithm to solve the least sampling rate is given, which can be applied to signal representation based on its channel pattern.

Key words　Sampling theorem, Data representation, Least sampling rate

王　桥：　男，1966 年生，副教授，主要研究偏微分算子微局部分析、相空间调和分析及其在信号分析和量子信息论中的应用．

吴乐南：　男，1952 年生，教授、博士生导师．从事信号处理理论和多媒体应用技术等研究．