

RELAX 算法的分辨特性分析¹

邵 朝 保 铮*

(西安邮电学院电信系 西安 710061)

*(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要 本文讨论了 RELAX 算法实现信号分离的数学机理以及实现信号分辨的一些特性, 探讨了这些特性对其实现信号分辨与否的表现; 而且对从 DD-RELAX 到 CD-RELAX、ELAX-AS 以及 MD-RELAX 的发展和联系作了分析讨论。最后对所作理论分析进行了计算机模拟。

关键词 信号分离和分辨, 信号保持与剔除, RELAX-AS 算法, 分辨特性分析

中图分类号 TN911.7

1 引 言

最大似然算法是建立在对数据的概率分布的一定假设下的最优化算法, 所以说该算法是最大限度地利用了数据中所包含的已知信息, 因而长期以来, 受到人们的普遍的重视^[1-5], 产生了一系列的相关的算法, 诸如文献 [1, 2] 及其最大似然算法的求解算法——交替投影 (AP) 算法^[3]、ANPA 算法^[4]、IMP 算法^[5]等。

最近文献 [6] 提出了一种所谓的对加性噪声以及系统误差假设可松弛的 (RELAXation) 算法, 文献 [7] 通过对该算法的讨论, 将这个原来为数据域 (DD-RELAX) 的算法推广到相关域 (CD-RELAX), 建立并讨论了该算法实现信号分离的数学机理和实现信号分辨的数学原理。文献 [8] 在文献 [7] 的基础上, 建立了导出 RELAX 算法的多维最优化问题, 并且通过对该优化问题的一维解法的讨论, 建立了类似于最大似然算法的一维求解算法 (AP 算法) 的一维求解算法 (Alternating Separation 算法, 简记为 AS 算法)。通过对这个一维求解算法实现信号分离的矩阵算子解析结构的讨论, 得出了文献 [7] 所建立的矩阵算子的递归迭代关系是文献 [8] 所建立的相应矩阵算子的解析表达式的 Taylor 展式的有限截断。基此说明 RELAX-AS 算法是一个实现信号保持与剔除的完备算法。

通过这些讨论, 不仅是对 RELAX 算法从计算速度上作了提高, 最根本的是奠定了 RELAX 算法的数学基础, 使之能够像最大似然算法、MUSIC 算法等那样成为一种独立的算法而存在。因而对其研究就有了自在的价值。

本文通过对 RELAX 算法所对应的目标函数作进一步分析讨论, 从它的目标函数本身归结出一些有关 RELAX 算法实现信号分辨所应遵从的一些准则。当这些准则被破坏时, RELAX 算法就不能实现对信号的分辨。

2 数据模型

假设有 M 个阵元组成的等距线阵, 接收到 D 个窄带平面波信号, 则阵列输出数据矢量可表示成

$$y(n) = A(\Theta)s(n) + e(n) = \sum_{i=1}^D a(\theta_i)s_i(n) + e(n), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

¹ 1997-12-11 收到, 1998-10-02 定稿

本文部分受邮电部中青年科学基金资助

其中 N 表示时域采样数, 即快拍数, $e(n)$ 是环境加性噪声矢量, $s(n)$ 是信号的复包络矢量, $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D)$ 表示空间信号的角度参数矢量. $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_D$ 为信号的能量.

对于阵列输出数据矢量 (1) 式中各信号 $s(n)$, 它们可以是相关的甚至是相干的; 而环境加性噪声矢量 $e(n)$ 则假设是零均值随机过程矢量, 其协方差矩阵未知, 但它与所关心的信号是相互统计独立的.

另外, 设系统误差矩阵 $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M\}$, $\gamma = \alpha e^{j\phi}$, 其中 α, ϕ 分别表示系统的幅度畸变因子和相位畸变因子. 考虑到系统误差畸变效应, 阵列输出数据矢量 (1) 式应该是

$$y(n) = \Gamma A(\Theta) s(n) + e(n), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1a)$$

在下面叙述中的适当场合, 用 (1a) 式代替 (1) 式. 阵列输出数据协方差矩阵为

$$R = E\{y(n)y^H(n)\} \approx E_N\{y(n)y^H(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(n)y^H(n). \quad (1b)$$

关于数据模型的详细假设请参阅文献 [7, 8].

3 RELAX-AS 算法的分辨特性分析

3.1 RELAX-AS 算法的建立

文献 [7] 通过对 RELAX 算法在数据域 (DD-RELAX) 的表现形式的讨论, 将该算法推广到了相关域, 得出了该算法在相关域的递归迭代表达式:

$$\theta_{i,m} = \arg \max_{\theta} \text{tr}\{P_{a(\theta)} Q_{i,m} R Q_{i,m}^H\}, \quad i = 1, 2, \dots, D, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (2)$$

其中矩阵算子 $Q_{i,m}$ 的递归迭代关系为 ($i = 1, 2, \dots, D, \quad m = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} Q_{i,m} &= I - P_{a(\theta_{1,m})} Q_{1,m} - \dots - P_{a(\theta_{i-1,m-1})} Q_{i-1,m} \\ &\quad - P_{a(\theta_{i+1,m-1})} Q_{i+1,m-1} - \dots - P_{a(\theta_{D,m-1})} Q_{D,m-1}. \\ &= I - \sum_{k=1}^{i-1} P_{a(\theta_{k,m})} Q_{k,m} - \sum_{k=i+1}^D P_{a(\theta_{k,m-1})} Q_{k,m-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中矩阵算子 $Q_{1,m}$ 满足约束条件 $Q_{1,0} = I$. 交替地利用 (2) 和 (3) 式, 就可以估计出一个个信号的方位参数. 这就是所谓的相关域 (CD-)RELAX 算法 [7].

若省去关系 (3) 式中的迭代序数, 则其表达式应写为 (确定的矩阵算子线性方程组) [8]

$$Q_i = I - \sum_{k \neq i} P_{a(\theta_k)} Q_k, \quad i = 1, 2, \dots, D. \quad (4)$$

假设仅有两个信号, 对应于关系式 (4) 式的矩阵算子 $\{Q_i, i = 1, 2\}$ 的解析表达式为

$$Q_1 = (I - P_{a(\theta_2)} P_{a(\theta_1)})^{-1} (I - P_{a(\theta_2)}), \quad Q_2 = (I - P_{a(\theta_1)} P_{a(\theta_2)})^{-1} (I - P_{a(\theta_1)}), \quad (5)$$

而这时对应于 (3) 式的矩阵算子 $Q_{i,m}$ 的迭代关系为 [7]

$$\left. \begin{aligned} Q_{1,m} &= I - P_{a(\theta_{2,m-1})} + P_{a(\theta_{2,m-1})}P_{a(\theta_{1,m-1})} - P_{a(\theta_{2,m-1})}P_{a(\theta_{1,m-1})}P_{a(\theta_{2,m-2})} \\ &\quad + \cdots - P_{a(\theta_{2,m-1})}P_{a(\theta_{1,m-1})} \cdots P_{a(\theta_{2,1})}P_{a(\theta_{1,1})}P_{a(\theta_{2,0})} \\ &\quad + P_{a(\theta_{2,m-1})}P_{a(\theta_{1,m-1})} \cdots P_{a(\theta_{2,1})}P_{a(\theta_{1,1})}P_{a(\theta_{2,0})}P_{a(\theta_{1,0})}, \\ Q_{2,m} &= I - P_{a(\theta_{1,m})} + P_{a(\theta_{1,m})}P_{a(\theta_{2,m-1})} - P_{a(\theta_{1,m})}P_{a(\theta_{2,m-1})}P_{a(\theta_{1,m-1})} \\ &\quad + \cdots + P_{a(\theta_{1,m})}P_{a(\theta_{2,m-1})} \cdots P_{a(\theta_{2,1})}P_{a(\theta_{1,1})}P_{a(\theta_{2,0})} \\ &\quad - P_{a(\theta_{1,m})}P_{a(\theta_{2,m-1})} \cdots P_{a(\theta_{2,1})}P_{a(\theta_{1,1})}P_{a(\theta_{2,0})}P_{a(\theta_{1,0})}. \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

文献 [8] 在上面工作的基础上, 通过进一步讨论, 建立了导出类似于优化问题 (2) 式、迭代关系 (4) 式的最优化问题 (一种多维 RELAX 算法的表现形式):

$$\min_{\Theta} G(\Theta) = \min_{\Theta} \left| y(n) - \sum_{i=1}^D P_{a(\theta_i)} Q_i y(n) \right|^2. \quad (6)$$

将优化问题 (6) 式的代价函数写作

$$G(\Theta) = \text{tr} \left\{ \left(I - \sum_{i=1}^D P_{a(\theta_i)} Q_i \right) R \left(I - \sum_{i=1}^D P_{a(\theta_i)} Q_i \right)^H \right\}, \quad (7)$$

其中矩阵算子 $Q_1, Q_2, \dots, Q_D$ 满足信号分离关系式:

$$Q_j a(\theta_i) = \begin{cases} a(\theta_j), & j = i; \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (8)$$

我们称之为信号保持特性和剔除特性, 要能够较好地实现信号参数的分辨, 必须使得信号保持特性和剔除特性同时较好地满足. 设给定参数 $\Theta_i = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_D)$, 且使算子 Q_j 满足矩阵算子线性方程组 (4) 式, 则由 (7) 式确定的多维函数 $G(\Theta)$ 可写作 [3,8]

$$G(\Theta) = G(\Theta_i) - g(\theta). \quad (9)$$

多维优化问题 (6) 式等价于一维优化问题

$$\max_{\theta} g(\theta), \quad g(\theta) = \text{tr} \{ P_{a(\theta)} Q_i R Q_i^H \}. \quad (2a)$$

对于 (2a) 式, 如果我们能够对于确定的数据模型利用矩阵算子线性方程组 (4) 式直接写出满足关系式 (6) 式的信号分离条件的矩阵算子 $Q_1, Q_2, \dots, Q_D$ 的解析表达式 (如 (5) 式那样的), 就可以在迭代关系式 (6) 式中避免如同 (4) 式那样复杂的循环迭代关系, 直接由 (2a) 式交替地完成信号参数的估计, 故称之为 RELAX-AS 算法.

另一方面, 对关系式 (5) 式, 采用 “Taylor 级数” 展开, 可得

$$\begin{aligned} Q_1 &= I - P_{a(\theta_2)} + P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)} - P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)}P_{a(\theta_2)} + \cdots - P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)} \cdots P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)}P_{a(\theta_2)} \\ &\quad + P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)} \cdots P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)}P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)} - \cdots, \\ Q_2 &= I - P_{a(\theta_1)} + P_{a(\theta_1)}P_{a(\theta_2)} - P_{a(\theta_1)}P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)} + \cdots + P_{a(\theta_1)}P_{a(\theta_2)} \cdots P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)}P_{a(\theta_2)} \\ &\quad - P_{a(\theta_1)}P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)} \cdots P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)}P_{a(\theta_2)}P_{a(\theta_1)} + \cdots. \end{aligned} \quad (3b)$$

比较 (3b) 式与 (3a) 式, 可见 3(a) 式只是 (3b) 式的有限截断的一个非常粗糙的估计。这样文献 [7] 中的 CD-RELAX 算法收敛速度依然缓慢就有了理论上的深层次原因。

3.2 另一形式的多维 RELAX 算法

另一方面, 对于矩阵算子 $Q_1, Q_2, \dots, Q_D$, 利用关系式 (4) 式可以写出矩阵算子 $Q = (Q_1^T, Q_2^T, \dots, Q_D^T)^T$ 满足的矩阵算子的方程:

$$PQ = J. \quad (10)$$

其中 $J = [I, \dots, I]^T$ 为由单位矩阵构成的块矩阵矢量。其中矩阵 P 依据矩阵 Q 的分块形式分块, 且块满足定义关系:

$$(P)_{i,j} = \begin{cases} I, & i = j; \\ P_{a(\theta_i)}, & i \neq j. \end{cases} \quad (11)$$

所以矩阵 P 是满秩的。

因为在由矩阵 A 的列矢量构成的线性子空间上, 算子 $\sum_{i=1}^D Q_i$ 的作用相当于恒等算子, 所以最优化问题 (6) 式的目标函数 (7) 式可写作

$$G(\Theta) = \text{tr} \left\{ \left(\sum_{i=1}^D (I - P_{a(\theta_i)}) Q_i \right) R \left(\sum_{i=1}^D (I - P_{a(\theta_i)}) Q_i \right)^H \right\} = \text{tr} \{ P^\perp Q R Q^H \}, \quad (12)$$

其中矩阵: $P^\perp = (P_{a(\theta_1)}^\perp, P_{a(\theta_2)}^\perp, \dots, P_{a(\theta_D)}^\perp)$, 这样对于每次迭代而言, 若确定了算子 Q , 利用 (12) 式就可作多维搜索, 再利用 (10), (11) 式通过迭代不断地改善矩阵算子 Q 的特性, 直到 Q 的各相应块满足关系式 (8) 式, 便得到了各信号参数的最终估计。这样 (10)–(12) 式就是实际便于操作意义上的 MD-RELAX 算法的搜索表达式。

3.3 函数 $g(\theta)$ 及 $G(\Theta)$ 的性质

设阵列输出数据协方差矩阵为

$$R = \sum_{i=1}^D a(\theta_i) R_s a^H(\theta_i) + R_e, \quad (13)$$

其中 R_s 为信号协方差矩阵, R_e 为噪声的协方差矩阵。而矩阵 $Q_1, Q_2, \dots, Q_D$ 满足信号分离关系式 (8) 式, 对于 (2a) 式表示的函数 $g(\theta)$ 的拟合因子 $Q_i R Q_i^H$ 有

$$\begin{aligned} Q_i R Q_i^H &= (\dots, 0, a(\theta_i), 0, \dots) R_s (\dots, 0, a(\theta_i), 0, \dots)^H + Q_i R_e Q_i^H \\ &= \delta_i a(\theta_i) a^H(\theta_i) + Q_i R_e Q_i^H. \end{aligned} \quad (14)$$

当噪声协方差矩阵 $R_e = \sigma I$ 时, 矩阵 $Q_i R Q_i^H$ 仅有一个非零特征值。而且此非零特征值所对应的特征向量是向量 $a(\theta_i)$ 。而一般情况只是附加一个微小扰动项 $Q_i R_e Q_i^H$ 。

在同样的情况下, 对于 (12) 式表示的函数 $G(\Theta)$ 的拟合因子 $Q R Q^H$ 有

$$Q R Q^H = \text{diag}\{Q_1 R Q_1^H, Q_2 R Q_2^H, \dots, Q_D R Q_D^H\}. \quad (15)$$

这是一个分块对角矩阵。进一步这个分块对角矩阵可写作

$$Q R Q^H = \sum_{i=1}^D (R_s)_{ii} (a(\theta_i) \otimes e_i) (a(\theta_i) \otimes e_i)^H + \text{diag}\{Q_1 R_e Q_1^H, Q_2 R_e Q_2^H, \dots, Q_D R_e Q_D^H\}. \quad (16)$$

式中的矢量 e_i 为 D 维单位矩阵的第 i 个列矢量, $\otimes$ 为矢量的 Kronecker 积。这说明 (15) 式每一个对角块都有 (14) 式的形式。显然 (16) 式中相对各块之间是互相正交的。注意到 (16) 式的第 i 个对角块仅含有第 i 个信号的信息, 所以说不管各个信号原来的关系如何, 在 (16) 式中它们都有相对正交的关系。由上面的关系 (14) 式, 当噪声协方差矩阵 $R_e = \sigma I$ 时, 在 (16) 式中各对应矩阵块只有一个非零特征根, 它所对应的特征矢量是相应信号的导向矢量, 这个非零特征根是对应信号功率与噪声功率之和。在理想情况下, 则各对角块的最大特征值之比对应于相应信号功率之比。而在一般情况下只是对此结论的一个微小扰动。

3.4 RELAX 算法实现信号分辨所应遵从的一些法则

我们认为 RELAX 算法之所以能够实现信号分辨, 关键是矩阵算子的信号保持和剔除特性 (8) 式。若这个关系是成立的, 则所有的信号参数估计问题都是单信号参数估计, 因而是一个相对容易的且对估计的准确性是有保障的。所以说 (8) 式是检验 RELAX 算法实现信号分辨与否的一个很重要的条件。即使在有系统误差的情况下, 要能够实现信号的分辨也应该有

$$Q_j \Gamma a(\theta_i) \approx \begin{cases} \Gamma a(\theta_j), & j = i; \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (8a)$$

所以在实现信号分辨的情况下, 函数:

$$y_{i,m} = \|Q_{i,m} a(\theta_i)\| / \|a(\theta_i)\| (= \|Q_{i,m} \Gamma a(\theta_i)\| / \|a(\theta_i)\|). \quad (17)$$

随着迭代的继续应该趋于 1; 而函数

$$x_{i,m} = \|Q_{i,m} a(\theta_j)\| / \|a(\theta_j)\|, (j \neq i) (= \|Q_{i,m} \Gamma a(\theta_j)\| / \|a(\theta_j)\|). \quad (18)$$

随着迭代的继续应该趋于 0。即使在有系统误差以及噪声分布的一般假设下, 也应该近似成立。

由 (14) 式, 在理想情况下, 矩阵 $Q_i R Q_i^H$ 仅有一个非零特征值, 而且此非零特征值所对应的特征向量是向量 $a(\theta_i)$ 。而一般情况只是附加一个微小扰动项 $Q_i R_e Q_i^H$, 即使在有系统误差以及噪声分布的一般假设下, 若关系 (8a) 式能够成立, 则这一结论也应该成立。所以设 $\lambda_{1,m}^i$ 是在第 m 次迭代后矩阵 $Q_i R Q_i^H$ 的最大特征值, $\lambda_{2,m}^i$ 是此时的次大特征值, $v_{1,m}^i$ 是此时的最大特征值 $\lambda_{1,m}^i$ 所对应的特征向量, 所以在实现信号分辨的情况下, 比值函数:

$$b_m^i = \lambda_{2,m}^i / \lambda_{1,m}^i \quad (19)$$

随着迭代的继续应趋于零; 而函数:

$$x_m^i = \cos \angle(a(\theta_i), v_{1,m}^i) = a^H(\theta_i) v_{1,m}^i / \|a(\theta_i)\| \quad (20)$$

随着迭代的继续应该趋于 1。

设信号次序是按相应信号的功率的降序关系排列的, 由 (16) 式, 在理想情况下, 对角分块矩阵 $Q R Q^H$ 每一对角块的非零特征值 $\lambda_{1,m}, \lambda_{2,m}, \dots, \lambda_{D,m}$, 随着迭代次数 m 的增大, 对应于相应信号的功率的降序关系 $\lambda_{1,m} = \delta_1 + \sigma \geq \lambda_{2,m} = \delta_2 + \sigma \geq \dots \geq \lambda_{D,m} = \delta_D + \sigma$ 。因此有渐进函数关系

$$b_{i,j,m} = \lambda_{i,m} / \lambda_{j,m} = (\delta_i + \sigma) / (\delta_j + \sigma) \approx \delta_i / \delta_j. \quad (21)$$

虽然这些准则函数的实际操作性还不尽人意,但它对于算法的性态分析至少提供了一种思路。

4 计算机模拟

在计算机模拟中,均假设所给阵列为均匀线阵,由 17 个各向同性的阵元构成,阵元间距为二倍波长。当考虑系统误差如果没有特别指出,则假定幅度畸变因子与相位畸变因子的方差均为 8%(实现分辨)或 10%(未实现分辨)。固定阵列输出快拍数为 100,加性噪声设为功率为单位 1 的高斯白噪声。设有两个空域平面波信号,它们的方位分别在 -0.125° , 0.125° ,且无特别声明时的信号幅度分别为 20 和 18,而各函数值是无量纲的。在下面的计算机模拟中,对于计算 RELAX 算法的目标函数 (2a) 式时采用了 MATLAB(R)V. 2C 中的函数 'fmin'。

图 1~图 5 的每个图中均有三条曲线(它们分别具有线形: (1)---; (2)·····; (3)- - -),它们分别对应于不同情况下用 RELAX-AS 算法的实验结果,其中的三条曲线分别表示了 (1) 无系统误差时用 RELAX-AS 算法搜索信号参数的一次实验中对对应函数的变化曲线; (2) 有系统误差时用 RELAX-AS 算法能够实现信号参数分辨的一次实验中对对应函数的变化; (3) 有系统误差时用 RELAX-AS 算法不能实现信号参数分辨的一次实验中对对应函数的变化。各图中相同情况的实验为同一次。

图 1 所画为函数 (17) 式的 $y_{i,m}$ 随着迭代次数 m 的变化曲线。通过前面的分析,无论是对于数据模型 (1) 式或 (1a) 式,在 RELAX-AS 算法能够实现信号的分辨时,随着迭代次数的增大,这个函数值应该趋于 1,即使在有系统误差的情况下,收敛值也应该在数值 1 附近。若偏差太大,RELAX-AS 算法就不能实现信号的分辨。

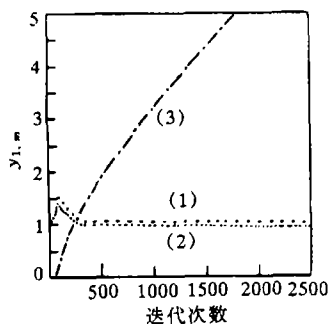


图 1 函数 $y_{i,m}$ 随迭代次数的变化

图 2 所画为函数 (18) 式的 $x_{i,m}$ 随着迭代次数 m 的变化曲线。通过前面的讨论我们知道,RELAX-AS 算法能够实现信号的分辨时,随着迭代次数的增大,这个函数值应该趋于 0。若偏差太大,RELAX-AS 算法就不能实现信号的分辨。

还应该注意到,对于 RELAX-AS 算法能够实现信号的分辨的情况,随着迭代次数的增大,函数 $y_{i,m}$ 趋于 1, $x_{i,m}$ 趋于 0,必须是同时发生的。

图 3 所画为函数 (19) 式的 b_m^i 随着迭代次数 m 的变化曲线。RELAX-AS 算法能够实现信号的分辨时,随着迭代次数的增大,这个函数值应该趋于 0。若偏差太大,RELAX-AS 算法就不能实现信号的分辨。

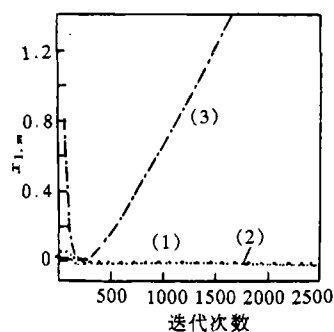
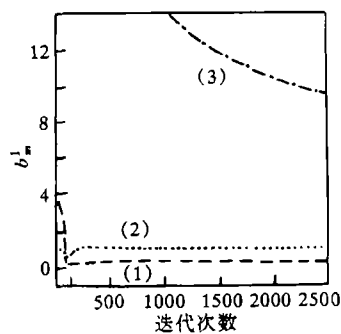
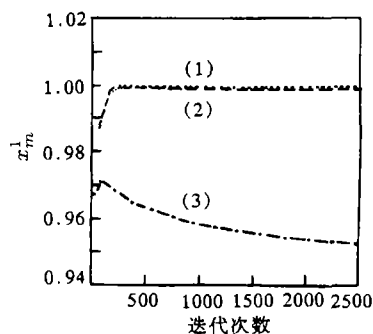
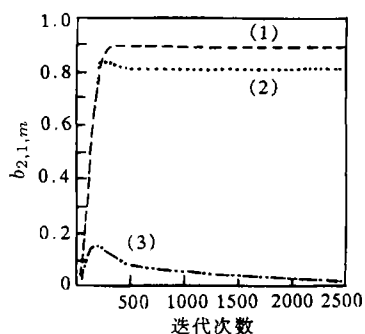
图 2 函数 $x_{1,m}$ 随迭代次数的变化图 3 函数 b_m^1 随迭代次数的变化

图 4 所画为函数 (20) 式的 x_m^i 随着迭代次数 m 的变化曲线。RELAX-AS 算法能够实现信号的分辨时, 随着迭代次数的增大, 这个函数值应该趋于 1。否则 RELAX-AS 算法就不能实现信号的分辨。从图中可看到 RELAX-AS 算法不能实现信号参数的分辨时, 这个值偏离其理论值的情况。

图 5 所画为函数 (21) 式的 $b_{i,j,m}$ 随着迭代次数 m 的变化曲线。RELAX-AS 算法能够实现信号的分辨时, 随着迭代次数的增大, 这个函数值应该趋于两个信号功率的比值。从图中看到 RELAX-AS 算法不能实现信号参数的分辨时, 这个值是趋于零的。其理论收敛值为 $(18^2 + 1)/(20^2 + 1) = 0.8105$ 。

图 4 函数 x_m^1 随迭代次数的变化图 5 函数 $b_{2,1,m}$ 随迭代次数的变化

5 总 结

通过本文的分析和讨论, 使我们认识到 RELAX 算法有其自身的一些实现信号参数分辨的性态和机理, 认识和掌握这些机理对于我们在实践中应用 RELAX 算法有一定的指导意义。

参 考 文 献

- [1] Li J, Compton R T. Maximum likelihood angle estimation for signals with known waveforms. IEEE Trans. on. SP, 1993, SP-41(9): 2850-2862.

- [2] Stoica P, Sharman K. Maximum likelihood, Methods for direction-of- arrival estimation. IEEE Trans. on. ASSP, 1990, ASSP-38(7): 1132-1143.
- [3] Ziskind I, Wax M. Maximum likelihood location of multiple sources by alternating projection. IEEE Trans. on. ASSP, 1988, ASSP-36(10): 1553-1560.
- [4] Hwang K, Chen Y C. Superresolution frequency estimation by alternating notch periodogram. IEEE Trans. on. SP, 1993, SP-42(2): 727-741.
- [5] Mather J L. Characterization of Iterative Multi-Parameter (IMP) Algorithm. Proceedings of the Institute of Acoustics, 1989, 11, part 8: 189-197.
- [6] Li J, Stoica P. Efficient mixed-spectrum estimation with applications to target feature extraction. IEEE Trans. on. SP, 1996, SP-44(2): 281-295.
- [7] 邵 朝, 保 铮. RELAX 算法从数据域到相关域分析. 西安电子科技大学学报, 1997, 24(2): 164-171.
- [8] 邵 朝, 保 铮. 一种改进的 RELAX 算法. 电子科学学刊, 1998, 20(1), 26-32.

THE ANALYSIS OF THE RESOLUTION CHARACTERS OF RELAX ALGORITHM

Shao Chao Bao Zheng*

(*Xi'an Institute of Posts and Telecommunications, Xi'an 710061*)

*(*Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071*)

Abstract The paper gives a detail analysis of the mathematical principle of the RELAX algorithm that separating and resolving the signals, and the performance of the characters of the separation and resolution in the circumstance that the algorithm resolves the signals or not. The relationship and development of the algorithm from DD-RELAX to CD-RELAX, RELAX-AS and MD-RELAX are also discussed. The computer simulation are made to confirm the theory analysis.

Key words Signal separation and resolution, Signal preserving and rejection, RELAX algorithm, RELAX-AS algorithm, Analysis of the characteristic of the resolution

邵 朝: 男, 1955 年生, 博士, 从事信号处理方面的研究.

保 铮: 男, 1927 年生, 教授, 中科院院士, 博士生导师, 现主要研究领域为信号处理和雷达系统.