

傅氏变换迭代法波束赋形的精度和效率*

舒士畏

(中国科学院电子学研究所)

(一)傅氏变换迭代法的收敛值和赋形区外的能量

傅氏变换迭代法^[1]是新近提出来的波束赋形方法。其赋形精度和效率是天线设计者所关心的问题。本文从迭代法的收敛值和赋形区以外的能量来表示该方法的赋形精度和效率,现讨论如下:

假设被赋形的函数为 $F_D(u)$

$$F_D(u) = \begin{cases} F_D(u), & u_1 \leq u \leq u_2; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

按照傅氏变换迭代法, F_D 经变换后,求得 $G_1(x)$

$$G_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{u_1}^{u_2} F_D(u) e^{-iux} du;$$

再由 $G_1(x)$ 经逆变换,求得 $F_1(u)$

$$F_1(u) = \int_{-1}^1 G_1(x) e^{iux} dx.$$

经这样一次变换和逆变换后,在赋形区内的差值函数为 ΔF_1

$$\Delta F_1 = F_D - F_1.$$

这就是傅氏变换法一次迭代的全过程。进一步迭代,实际上是对 ΔF_1 进行的。

1. 迭代法的收敛值 为了讨论方便起见,将开始时的 F_D 看作是零次迭代的差值函数,即

$$G_0(x) = 0, \quad F_0(u) = 0, \quad \Delta F_0(u) = F_D - F_0.$$

于是,零次迭代的全过程可写成:

$$\Delta F_0 = F_D - F_0, \quad \Delta G_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{u_1}^{u_2} \Delta F_0 e^{-iux} du.$$

$$\Delta F'_0 = \int_{-1}^1 \Delta G_0 e^{iux} dx, \quad F_1 = F_0 + \Delta F'_0.$$

同时可写出:

$$P_0 = \int_{u_1}^{u_2} |\Delta F_0|^2 du, \quad q_0 = \int_{u_1}^{u_2} |\Delta F'_0|^2 du.$$

它们分别表示迭代前和迭代后赋形区内的能量。

同上,对于第 i 次迭代,可写出相应的各关系式:

* 1984年1月17日收到,1984年7月16日修改定稿。

$$\Delta F_i = F_D - F_i, \quad \Delta G_i = \frac{1}{2\pi} \int_{u_1}^{u_2} \Delta F_i e^{-jux} du,$$

$$\Delta F'_i = \int_{-1}^1 \Delta G_i e^{jux} dx, \quad F_{i+1} = \sum_{i=0}^i \Delta F'_i;$$

$$P_i = \int_{u_1}^{u_2} |\Delta F_i|^2 du, \quad q_i = \int_{u_1}^{u_2} |\Delta F'_i|^2 du.$$

由于天线口径是有限的,所以 $q_i < P_i$. 令 $q_i = t_i P_i$, $0 < t_i < 1$.

又由于文献 [1] 已证明 $\int_{u_1}^{u_2} |\Delta F_{n+1}|^2 du < \int_{u_1}^{u_2} |\Delta F_n|^2 du$, 所以 $P_i < P_{i-1}$.

令 $P_i = m_i P_{i-1}$, $0 < m_i < 1$.

于是,经 n 次迭代后可写出:

$$q_n = t_n \cdot \prod_{n=0}^n m_n \cdot P_0,$$

$$q_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ t_n \cdot \prod_{n=0}^n m_n \cdot P_0 \right\} = t_\alpha \prod_{n=0}^\alpha m_n \cdot P_0,$$

其中 t_α 为迭代次数无穷多时的 t_i 值,显然 $0 < t_\alpha < 1$. 无穷乘积 $\prod_{n=0}^\infty m_n$ 或 $\prod_{n=0}^\infty (1 + a_n)$

具有零值的充分和必要条件是 [2]: 级数 $\sum_{n=1}^\infty \ln m_n$ 或 $\sum_{n=0}^\infty \ln (1 + a_n)$ 的和为 $(-\infty)$.

若 $a_n < 0$, 且级数 $\sum_{n=0}^\infty a_n$ 发散,或 $\sum_{n=0}^\infty a_n$ 收敛,而 $\sum_{n=0}^\infty a_n^2$ 发散,那么 $\prod_{n=0}^\infty (1 + a_n)$ 具有零值.

根据达朗贝尔准则 [3], 对于级数 $\sum_{n=0}^\infty a_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 则 (1) $\rho < 1$, 级数收敛; (2) $\rho > 1$, 级数发散; (3) $\rho = 1$, 不能肯定.

对于本文讨论的迭代法,将分两种情况来讨论.

(1) $a_{n+1} \geq a_n$ 此时 $m_{i+1} > m_i$, 所以 $\prod_{n=0}^\infty m_n \leq \prod_{n=0}^\infty m_1$, 于是 $\sum_{n=0}^\infty \ln m_n \leq -\infty$,

从而 $\prod_{n=0}^\infty m_n = 0$, 因此 $q_\infty = 0$.

当然, m_n 的变化可能不是单调的,但总可以把 $\prod_{n=0}^\infty m_n$ 写成如下形式:

$$\prod_{n=0}^\infty m_n \leq \prod_{n=0}^\infty M,$$

其中 $M = \max \{m_n\}$, 所以 $q_\infty = 0$. 又由于 $P_\infty = t_\infty \cdot q_\infty$, 所以 $P_\infty = 0$, 从而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F_D$.

由此可见,在此情况下,在赋形区内,迭代法将以实际被赋形的函数为其收敛值.

(2) $a_{n+1} < a_n$ 此时, 要直接求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 是困难的. 为了判断 $\prod_{n=0}^{\infty} m_n$ 是否有零值, 必须借助于迭代法的物理过程.

由于 $P_i < P_{i-1}$, 所以迭代的最终结果必然是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{P_i - P_{i-1}\} = 0$, 亦即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 此仍无法肯定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛. 但是, 由于 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_{u_1}^{u_2} |\Delta F_n|^2 du = \int_{u_1}^{u_2} |\Delta F_{n-1}|^2 du,$$

而 $\Delta F_n = F_D - F_n$, $F_n = \sum_{i=0}^n \Delta F'_i$, 所以 $\Delta F'_n = 0$, $\Delta F_n = 0$, 从而有 $F_n = F_D$.

由此可见, 在此情况下, 迭代法仍以实际被赋形的函数为其收敛值.

从上述讨论可见, 只要迭代次数足够多, 在赋形区内波束赋形的精度, 要多精就可做到多精.

2. 赋形区以外的能量 从上述运算过程中可知, 每次迭代总有一部分能量落在赋形区之外, 我们将研究每次迭代落在赋形区外的能量.

讨论时, 应记住傅氏变换迭代法对 $F(u)$ 和 $G(x)$ 的处理如下:

在求新的 $F(u)$ 时,

$$G(x) = \begin{cases} G(x), & -1 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

在求新的 $G(x)$ 时,

$$F(u) = \begin{cases} F(u), & u_1 \leq u \leq u_2; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

于是, 对于一次迭代, 可写出下列能量关系:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F_D(u)|^2 du &= \int_{u_1}^{u_2} |F_D(u)|^2 du, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F_D(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |G_1(x)|^2 dx, \\ \int_{-1}^1 |G_1(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(u)|^2 du, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(u)|^2 du = q_1 + R_1, \end{aligned}$$

其中 $q_1 = \int_{u_1}^{u_2} |F_1(u)|^2 du$, 为赋形区内能量; $R_1 = \left(\int_{-\infty}^{u_1} + \int_{u_2}^{\infty} \right) |F_1(u)|^2 du$, 为赋形区外能量.

令 $K = \int_{-1}^1 |G_1(x)|^2 dx / \int_{-\infty}^{\infty} |G_1(x)|^2 dx$, 并称 K 为傅氏逆变换能量转换系数, 于是可得出:

$$R_1 = \left(\frac{K}{t} - 1 \right) q_1.$$

可见, 每次迭代在赋形区外的能量是赋形区内能量的 $\left(\frac{K}{t} - 1 \right)$ 倍. $\frac{K}{t}$ 可写成:

$$\frac{K}{t} = \int_{-1}^1 |G_1(x)|^2 dx / \int_{u_1}^{u_2} |F_1(u)|^2 du.$$

这样,就可以在每次迭代后,算出赋形区以外的能量. 天线口径越小,赋形区间越窄,则赋形区外的能量越大. 迭代次数越多,则赋形区外的能量也越大.

综上所述,迭代法波束赋形的精度主要受到赋形区外的能量(旁瓣)增加的限制. 因此,赋形区外的能量或旁瓣电平可作为迭代法迭代次数的门限.

(二) 一个有意义的例子

我们将举一个赋形 δ 函数的例子,来说明上述分析的全过程. 这一例子,对于说明迭代法的重要特性有重要意义. δ 函数 F_D

$$F_D = \begin{cases} 1, & |u| \leq u_0, \quad u_0 \ll 1; \\ 0, & |u| > 0. \end{cases}$$

根据迭代法的分析,可写出下列一系列的关系式:

$$\begin{aligned} \Delta F_0 &= F_D, \quad \Delta G_0 = \frac{\sin(u_0 x)}{\pi x} \simeq \frac{u_0}{\pi}, \\ \Delta F'_0 &\simeq \frac{2u_0}{\pi}, \quad t_0 = \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2, \\ m_0 &= \left(1 - \frac{2u_0}{\pi}\right)^2, \quad \Delta F'_n = \frac{2u_0}{\pi} \left(1 - \frac{2u_0}{\pi}\right)^n, \\ F_n &= \sum_{n=0}^n \Delta F'_n = 1 - \left[1 - \frac{2u_0}{\pi}\right]^n, \end{aligned}$$

可见,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta F'_n = 0.$$

在这一例子中,

$$\begin{aligned} t_0 &= t_1 = \cdots = t_n = \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2 \ll 1, \\ m_0 &= m_1 = \cdots = m_n = \left(1 - \frac{2u_0}{\pi}\right)^2 < 1, \\ \frac{K_1}{t_1} &= \frac{K_2}{t_2} = \cdots = \frac{K_n}{t_n} = \frac{1}{4u_0}. \end{aligned}$$

所以,每次迭代后,赋形区外的能量 R

$$R = \left(\frac{1}{4u_0} - 1\right)q.$$

由于 $u_0 \ll 1$, 赋形区外的能量比赋形区内的能量要大得多,波束的赋形效率极低.

从这一例子中,可看出迭代法的一些重要特性:

(1) 尽管 $m_i < 1$, 但由于 $u_0 \ll 1$, 尽管迭代法是收敛的,但收敛速率很慢,每增加一次迭代,收效甚微.

(2) 由于 $t_i \ll 1$, 每次迭代在赋形区内得到的能量甚少. 这一点与上述结论相一致.

(3) 赋形区外的能量是赋形区内能量的 $\left(\frac{1}{4u_0} - 1\right)$ 倍. 这是一个十分惊人的数值.

所以,尽管在赋形区内达到了赋形要求,但其赋形效率极低.

根据上述三点,当增大天线口径或增大 u_0 时,赋形效率将得到明显提高。

作者感谢冯孔豫同志在本文写作过程中的帮助和讨论。

参 考 文 献

- [1] 冯孔豫,电子学通讯,2(1980),95.
- [2] 《数学手册》编写组,数学手册,人民教育出版社,1979年,第192页.
- [3] 《数学手册》编写组,数学手册,人民教育出版社,1979年,第181页.

ACCURACY AND EFFICIENCY OF FOURIER TRANSFORM ITERATIVE METHOD FOR SYNTHESIZING PATTERN

Shu Shiwei

(Institute of Electronics, Academia Sinica)

Fourier transform iterative method for synthesizing a pattern is recently proposed by Feng (1980). The accuracy and efficiency of the method are analyzed, and the result shows that in the shaped region, Fourier transform iterative method will converge to a desired shape, but the energy beyond the shaped region will increase as the iterative number becomes larger. As example, synthesizing δ function by the method is given.