

基于相位匹配原理的稳健方位估计

王惠刚 李志舜 孙进才

(西北工业大学航海工程学院 西安 710072)

摘要: 文中介绍了一种新的信号方位估计原理——相位匹配原理(PMT), 该原理计算简单、且不受噪声相关特性的影响。论文提出了一个新的基于矩阵范数的判别准则, 该准则极大地改进了方位的估计精度和方差, 并保持了算法计算简单的特点。仿真结果表明改进后的准则在高信噪比下接近 MUSIC 的估计性能, 在低信噪比下却超过 MUSIC 估计, 而且其估计性能不受未知相关噪声的影响。

关键词: 相位匹配原理, 波达方向, 未知相关噪声

中图分类号: TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)02-0189-03

A Robust Criterion for Direction of Arriving Estimation Based on Phase Matched Theory

Wang Hui-gang Li Zhi-shun Sun Jin-cai

(Marine Engineering College, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract A new method for Direction of Arriving (DOA) Estimation—Phase Matched Theory (PMT) is introduced, which computation complexity is simple and performance is unaffected by unknown correlated noise. Compared with energy criterion, a robust criterion based on SVD improves the bias and variance of estimation and the simplicity is still kept. Computer simulation shows that the criterion's performance approximates MUSIC algorithm at high SNR and exceeds it at low SNR. Specially, this algorithm still has good performance under unknown correlated noise.

Key words Phase Matched Theory(PMT), Direction Of Arriving (DOA), Unknown correlated noise

1 引言

在雷达、声纳、通讯等领域常利用阵列来估计信号的波达方向 (DOA)。传统的方法采用波束形成技术, 只需要对阵元输出进行适当的相位补偿后, 再进行简单加权求和。波束形成技术算法简单且不受信号相干性的影响、稳健性好, 但对有限长度的基阵, 信号的方位分辨力低且性能受瑞利限制的限制。加大基阵孔径能够提高分辨力, 但往往受实际条件的限制。高分辨方位估计技术因为能获得比波束形成技术更高的分辨力而受到广泛的关注, MUSIC 方法、ESPRIT 方法等技术在实践中获得成功应用, 然而高分辨方法对模型的假设又相对较严格, 对未知的阵元相关噪声, 算法就显得非常复杂, 而且方位估计性能下降。

一种新的信号方位估计方法——信号相位匹配原理 (PMT) 给出了非常简单的估计方位方法, 具有计算简单、不受噪声相关性的影响, 因此适用于较小尺度的基阵。本文把信号相位匹配原理推广到多元阵, 并提出了一个基于数据矩阵的新的评判准则, 该准则具有更尖锐的指向性和更鲁棒

的方位估计。计算机仿真表明, 该算法的性能等同于 MUSIC 的性能, 在低信噪比下具有更小的方差, 而且性能不受噪声相关性的影响。

2 多元阵的相位匹配原理

文献[1,2]中提出了基于三元阵的信号相位匹配原理来抵消相干干扰的方法, 这里我们把该原理推广到多元阵的情形。对阵元数为 M 的均匀线列阵, 阵元间距为 d 。设远场信号的抵达方向为 θ_0 , 相邻阵元间的延迟为 $\tau_s = (d/c) \cdot \sin(\theta_0)$, c 为声速。第 i 个阵元的接收信号为

$$p_i(t) = s(t - (i-1)\tau_s) + n_i(t), \quad i = 1, \dots, M \quad (1)$$

对式(1)两边取傅里叶变换得

$$P_i(\omega) = S(\omega)e^{-j\omega(i-1)\tau_s} + N_i(\omega), \quad i = 1, \dots, M \quad (2)$$

其中 $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$, $P_i(\omega), N_i(\omega)$ 分别是 $p_i(t), n_i(t)$ 的傅里叶变换。

信号相位匹配的原理是: 对每个阵元的输出进行相位补偿, 如果补偿的相位等于由于信号方位导致的相位差, 则各

阵元的波达方向是相同的,也就是信号的空间相位是匹配的。对第*i*个阵元的相位补偿为 $e^{j\omega(i-1)\tau}$,则式(2)可改写为

$$P_i(\omega)e^{j\omega(i-1)\tau} - S(\omega)e^{j\omega(i-1)(\tau-\tau_s)} = N_i(\omega)e^{j\omega(i-1)\tau}, \quad i=1, \dots, M \quad (3)$$

当相位补偿引入的时延 $\tau = \tau_s$ 时,对式(3)的两边取模并展开为

$$\begin{aligned} & |P_i(\omega)|^2 + |S(\omega)|^2 - 2\operatorname{Re}(P_i'(\omega)) \cdot \operatorname{Re}(S(\omega)) - 2\operatorname{Im}(P_i'(\omega)) \\ & \cdot \operatorname{Im}(S(\omega)) = |N_i(\omega)|^2, \quad i=1, \dots, M \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $P_i'(\omega) = P_i(\omega)e^{j\omega(i-1)\tau}$ 。对式(4)进行变换,用后面的*M*-1个方程减去第1个方程,并移位有

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{Re}(P_i'(\omega) - P_1'(\omega))\operatorname{Re}(S(\omega)) + 2\operatorname{Im}(P_i'(\omega) - P_1'(\omega))\operatorname{Im}(S(\omega)) \\ & = |P_i(\omega)|^2 - |P_1(\omega)|^2 - |N_i(\omega)|^2 + |N_1(\omega)|^2, \quad i=2, \dots, M \end{aligned} \quad (5)$$

把*M*-1个方程写为矩阵形式:

$$\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{b} \quad (6)$$

其中 \mathbf{Q}_1 是 $(M-1) \times 2$ 的矩阵, \mathbf{b} 是 $(M-1) \times 1$ 的向量,分别定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1(i,:) &= [\operatorname{Re}(P_i'(\omega) - P_1'(\omega)), \operatorname{Im}(P_i'(\omega) - P_1'(\omega))] \\ \mathbf{r} &= [\operatorname{Re}(S(\omega)), \operatorname{Im}(S(\omega))]^\top \end{aligned}$$

$$\mathbf{b}(i,1) = |P_i(\omega)|^2 - |P_1(\omega)|^2 - (|N_i(\omega)|^2 - |N_1(\omega)|^2), \quad i=2, \dots, M$$

可以看出,在*M*>3时,式(6)是一个超定方程。把 $|N_i(\omega)|^2 - |N_1(\omega)|^2$ 作为超定方程的噪声,可采用带噪的最小二乘原理来求解,因此有

$$\mathbf{r} = \operatorname{pinv}(\mathbf{Q}_1)\mathbf{b}_1 \quad (7)$$

其中 $\operatorname{pinv}(\mathbf{Q}_1) = \operatorname{inv}(\mathbf{Q}_1^\top \mathbf{Q}_1)\mathbf{Q}_1^\top$ 定义为矩阵 \mathbf{Q}_1 的伪逆,

$\mathbf{b}_1(i,1) = |P_i(\omega)|^2 - |P_1(\omega)|^2$ 。文献[3]是利用信号的能量:

$$E = \|\mathbf{r}\|_2^2 = \operatorname{Re}(S(\omega))^2 + \operatorname{Im}(S(\omega))^2 \quad (8)$$

作为评判信号方位的准则的,即当 $\tau = \tau_s$ 时,信号空间相位是匹配的,因此在该方向上才能获得期望信号的解,所以此时的能量应该最大。

3 基于相位匹配原理估计方位的新准则

由于式(7)中需要计算矩阵 \mathbf{Q}_1 的伪逆,在阵元个数增加时,计算量也增加,同时矩阵求逆很容易引入数值计算的不稳定性,需要提出一个更简单有效的稳健方法。以式(6)为基础,提出了一种新的评判准则,该准则不需要矩阵求逆,而且具有更鲁棒的方位估计性能。从式(6)可以看出,在改变搜索角度(或进行相位补偿)的过程中,向量 \mathbf{b}_1 是不发生改变的,每次改变的只是矩阵 \mathbf{Q}_1 ,因此可以断定目标信息完全包含在矩阵 \mathbf{Q}_1 中,所以可考虑直接从矩阵的奇异值分解中来判断目标的方位。设 $(M-1) \times 2$ 维矩阵 \mathbf{Q}_1 的奇异值分解(SVD)为

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}^\top \quad (9)$$

其中 \mathbf{U} 是 $(M-1) \times (M-1)$ 的正交矩阵, \mathbf{V} 是 2×2 的正交矩阵, \mathbf{A} 是 $(M-1) \times 2$ 的对角矩阵。当 $M-1 > 2$ 时,取 \mathbf{A}_1 为 \mathbf{A} 中 2×2 的对角矩阵, \mathbf{U}_1 是 \mathbf{U} 中对应的 $(M-1) \times 2$ 矩阵,则 \mathbf{Q}_1 可重新写为

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{U}_1\mathbf{A}_1\mathbf{V}^\top \quad (10)$$

把式(10)代入到式(7),不难推得

$$\mathbf{r} = \mathbf{V}\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{U}_1^\top \mathbf{b}_1 \quad (11)$$

则信号的能量为

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}^\top \mathbf{r} = \mathbf{b}_1^\top \mathbf{U}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{V}^\top \mathbf{V} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{U}_1^\top \mathbf{b}_1 \\ &= \mathbf{b}_1^\top \mathbf{U}_1 (\mathbf{A}_1^2)^{-1} \mathbf{U}_1^\top \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1^\top (\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^\top)^{-1} \mathbf{b}_1 \end{aligned} \quad (12)$$

因为 \mathbf{b}_1 是常向量(不随相位的补偿而变化), \mathbf{U}_1 是正交矩阵,所以信号能量*E*仅与矩阵 $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^\top$ 的逆有关。为了避免矩阵求逆,只取矩阵 $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^\top$ 的对角线部分作为判别准则,因此新的判别准则是

$$E_1 = 1/\operatorname{Tr}(\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^\top) \quad (13)$$

其中 $\operatorname{Tr}(\cdot)$ 定义为矩阵的迹,即定义为矩阵的对角线元素之和。式(13)与式(11)相比,不需要计算矩阵的伪逆,只需要计算数据矩阵 $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^\top$ 对角线元素即可,因此计算更简单。从物理意义上也可以分析出式(13)比式(11)具有更优越的性能。从式(6)中的定义可以看出,矩阵 $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^\top$ 的非对角项是各阵元输出信号的互谱,而对角项是阵元输出信号的功率谱,由于各阵元间噪声的随机性,引入非对角项等于带来更多的噪声。在高信噪比下,两者的性能是接近的,但随着噪声的影响加大,式(13)比式(11)具有更稳健的性能。

由矩阵论^[4]的知识可以看出, $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^\top$ 的迹等价于矩阵 $\mathbf{Q}_1^\top \mathbf{Q}_1$ 的迹,也等价于 \mathbf{Q}_1 的奇异值的平方和,也等于 \mathbf{Q}_1 的*F*范数的平方,即

$$E_1 = \operatorname{Tr}(\mathbf{A}_1^2)^{-1} = 1/\operatorname{Tr}(\mathbf{Q}_1^\top \mathbf{Q}_1) = 1/\|\mathbf{Q}_1\|_F^2 \quad (14)$$

当信号的波达方向未知时,可以通过搜索算法来实现,设信号位于 $[\theta_l, \theta_h]$,根据需要估计的精度来确定搜索步长。假定搜索数为*L*,则搜索步长为 $\Delta\theta = (\theta_h - \theta_l)/L$ 。估计方位的计算步骤为

(1) 对各个阵元的输出选取合适的长度,分别做傅里叶变换,并计算 \mathbf{b}_1 ;

(2) 根据搜索角 $\theta_n = \theta_l + (n-1) \cdot \Delta\theta$ 计算各阵元的时延 $\tau_n = (d/c)\sin(\theta_n)$,用式(3)的形式对阵元的输出进行补偿得 $P_i'(\omega)$;

(3) 构造矩阵 \mathbf{Q}_1 ,并根据式(14)计算 E_1 ;

(4) 寻找 E_1 最大值对应的角度 θ_n ,即为估计的信号方位。

注意,如果是宽带信号,则步骤(2)和(3)中应该对信号所处的带宽内不同频率点的能量进行累积。

4 计算机仿真

为了验证算法的有效性，用计算机仿真信号对算法进行模拟仿真。发射频率为 $f = 30\text{kHz}$ ，采样频率 $f_s = 200\text{kHz}$ ，信号入射角度为 10° 方向，噪声为高斯白噪声，阵元个数为 8。为了统计评价算法的性能，每个信噪比都进行 100 次 Monte Carlo 仿真，取其平均结果来评价。采用的判别准则为：信号的能量准则式 (8) 和矩阵 Q_1 的 F 范数准则式 (14)，并把估计结果与 MUSIC 估计结果进行比较。分两种情况来验证算法的性能：(1) 假设阵元间隔为半波长，阵元间的噪声为互不相关的高斯白噪声；(2) 阵元间隔远小于半波长，阵元间的噪声为满足一定相关特性的高斯白噪声。

取阵元间隔 $d = 0.0245\text{m}$ ，声速 $c = 1500\text{m/s}$ ，搜索范围为 $[-10^\circ, 20^\circ]$ ，搜索间隔为 0.1° ，分别对 20dB 到 -20dB 的条件进行仿真。图 1 给出了 0dB 下基于能量准则式 (8)，矩阵范数准则式 (14) 和 MUSIC 方法^[5]的空间谱图。图 2 给出了在不同信噪比下 100 次 Monte Carlo 仿真下角度估计的均值和方差。从图中可以看出，基于矩阵 Q_1 范数的方法在真实方位上获得较尖锐的峰值，其空间谱非常接近 MUSIC 的方法的空间谱，优于基于能量的准则；同时新准则估计的均值和方差在不同信噪比下都很低，在 -15dB 以下的性能还优于 MUSIC 算法。

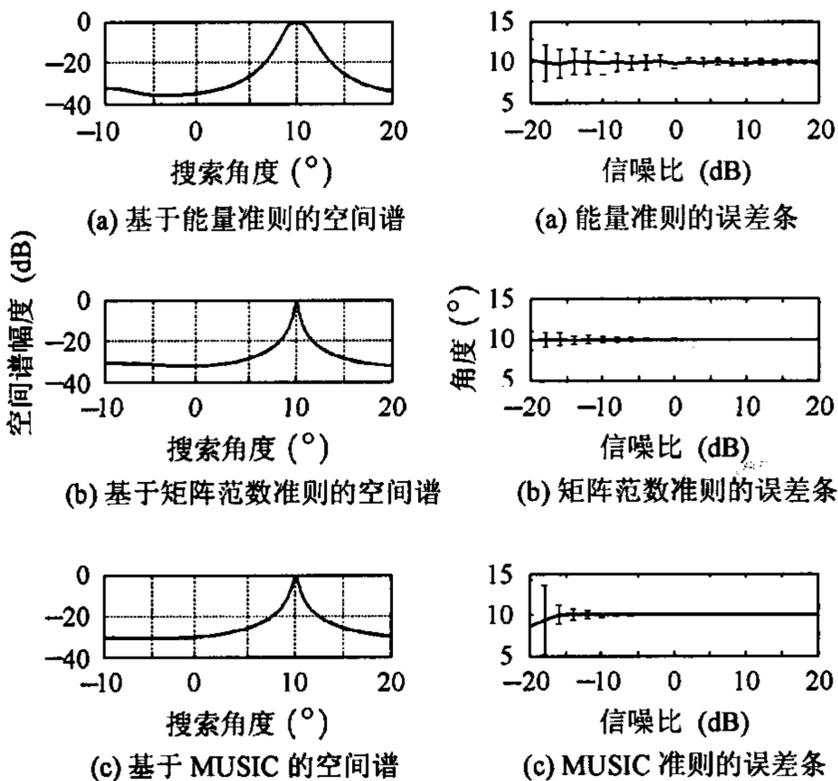


图 1 0dB 下能量准则、矩阵范数准则和 MUSIC 方法的空间谱

图 2 100 次 Monte Carlo 仿真下 3 种准则方位估计的均值和方差随信噪比变化曲线

改变信号发射频率为 $f = 10\text{kHz}$ ，其它参数保持不变。此时阵元间隔小于信号对应的半波长，阵元间的噪声就不能假设为互不相关。模拟阵元 i 和阵元 k 的空间噪声相关系数为 $\rho_{ik} = \sigma \exp(-(i-k)^2 \cdot \xi)$ ，其中 σ 对应着噪声的方差， ξ 定义为噪声的相关性， $\xi \gg 1$ 时对应着白噪声，在仿真中取 $\xi = 0.2$ 。MUSIC 算法求解未知相关噪声下的信号方位估计

的计算非常复杂，计算量也很大，而且性能会下降很多，这里没有给出仿真结果。图 3 是 0dB 下基于能量准则和矩阵范数准则的空间谱，图 4 是在不同信噪比下 100 次 Monte Carlo 仿真后，方位估计的均值和方差。从图中可以看出，基于矩阵范数的方法在相关噪声条件下仍然保持良好的性能，估计方差有所偏大是由于信号频率降低的原因。

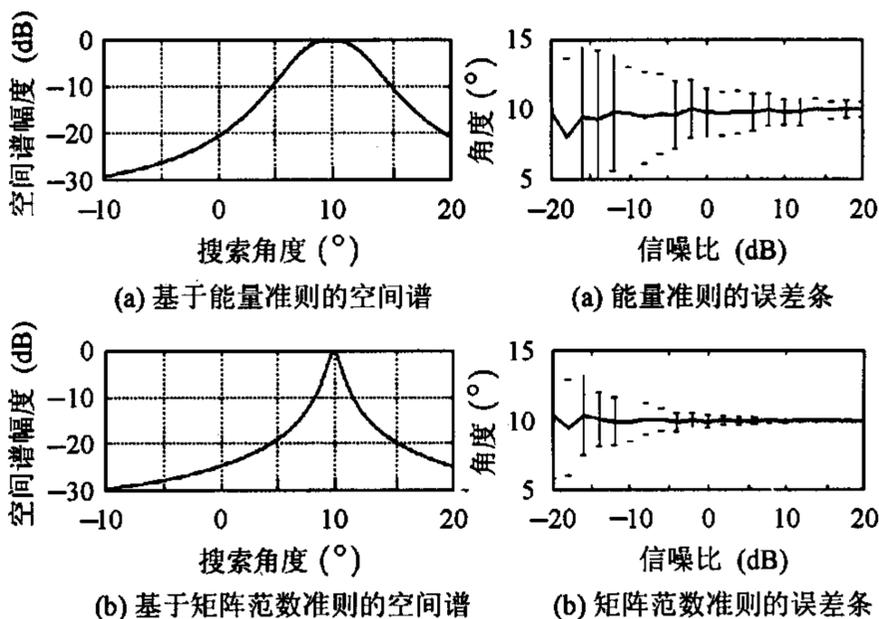


图 3 0dB 且相关噪声下能量准则和矩阵范数准则的空间谱

图 4 强相关噪声条件下 2 种准则方位估计的均值和方差随信噪比变化曲线

5 结论

本文在相位匹配原理的基础上提出了基于矩阵范数来估计方位的新准则，在保持相位匹配原理简单性的基础上，在信号的空间谱上具有更尖锐的峰值，因此具有更好的分辨力，而且该方法不受噪声相关性的影响，在小尺度阵上也具有较好的性能。文中详细推导和分析了两种不同准则之间的联系和差异，并用仿真比较并验证了算法的性能。

参考文献

- [1] 孙轶源, 朱维杰, 孙进才, 等. 利用信号相位匹配原理的正弦信号参数估计. 自然科学进展, 2001, 11(11): 1216 - 1220.
- [2] 孙进才, 朱维杰, 孙轶源. 利用三元阵的相干干扰抵消原理及仿真研究. 声学学报, 2001, 26(6): 537 - 544.
- [3] 孙进才, 朱维杰, 孙轶源. 利用小尺度阵的波达方向估计. 西北工业大学学报, 2003, 21(2): 152 - 155.
- [4] Golub G H, Van Loan C F 著, 袁亚湘译. 矩阵计算. 北京: 科学出版社, 2001.8, 第 2 章.
- [5] 刘德树. 空间谱估计及其应用. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1997.8, 第 2 章.

王惠刚: 男, 1974 年生, 讲师, 博士, IEEE 会员. 主要研究方向为统计信号处理、阵列信号处理和盲信号处理.

李志舜: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究兴趣为水声信号处理.