高阶 Hopfield 型神经网络的吸引域和指数收敛速度的估计¹

徐炳吉* 周伦* 廖晓昕* 刘新芝***

*(华中科技大学控制科学与工程系 武汉 430074)

** (滑铁卢大学应用数学系 滑铁卢 加拿大)

摘要 利用 Lyapunov 方法, 对高阶连续 Hopfield 型神经网络平衡点的局部指数稳定性进行研究, 得到了该网络平衡点的吸引域及其中每点趋向于平衡点的指数收敛速度的估计结果.

关键词 高阶神经网络, 吸引域, 指数收敛速度

中图分类号 TN-052

1 引言

随着神经网络的广泛应用和研究的不断深入, 高阶神经网络的研究也愈来愈受到人们的重视^[1-7]. 在神经网络的许多应用中, 提高网络的收敛速度以减少网络的计算时间是一个重要的问题, 由于指数收敛速度可用于决定网络的计算速度, 因此研究网络的指数稳定性和对其指数收敛速度进行估计是有意义的. 一般神经网络有多个平衡点, 稳定的平衡点也不止一个, 所以平衡点的吸引域的估计显得特别重要. 下面对二阶 Hopfield 型神经网络的局部指数稳定性进行分析.

考虑具有下列形式的二阶 Hopfield 型神经网络^[7]

$$C_i \frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n T_{ij} g_j(u_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T_{ijk} g_j(u_j) g_k(u_k) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

其中 $C_i > 0$, $R_i > 0$ 和 I_i 分别为第 i 个神经元的电容常数、电阻常数和网络的外部输入, T_{ij} 和 T_{ijk} 分别为网络的一阶和二阶连接权.

假设存在常数 $M_i > 0$, $k_i > 0$ 使得输入输出函数 $g_i(u_i)$ 满足条件:

$$|g_i(u_i)| \leq M_i, \quad 0 < g'_i(u_i) \leq k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

设 $u = u^*$, 即 $u_i = u_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$ 为系统 (1) 式的平衡点, $x = u - u^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $f_i(x_i) = g_i(x_i + u_i^*) - g_i(u_i^*)$, 易知

$$|f_i(z)| \leq k_i |z| \text{ 且 } z f_i(z) \geq 0, \quad z \in R \quad (3)$$

且 (1) 式可写为等价形式:

$$C_i \frac{dx_i}{dt} = -\frac{x_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n T_{ij} f_j(x_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T_{ijk} \left[f_j(x_j) f_k(x_k) + f_k(x_k) g_j(u_j^*) + f_j(x_j) g_k(u_k^*) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

¹ 2000-10-16 收到, 2001-05-16 定稿

国家自然科学基金 (60074008), 高校博士点基金 (20010487005), 国家“973 项目” (G1998020319) 资助课题

由 Taylor 中值定理得

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T_{ijk} \left[f_j(x_j) f_k(x_k) + f_k(x_k) g_j(u_j^*) + f_j(x_j) g_k(u_k^*) \right] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (T_{ijk} + T_{ikj}) \zeta_k f_j(x_j) \quad (5)$$

其中 ζ_k 介于 $g_k(u_k)$ 与 $g_k(u_k^*)$ 之间。

文中约定, 对任意矩阵 A , $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

2 吸引域和局部指数收敛性分析

定理 1 设 u^* 为系统 (1) 式的一个平衡点, 若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 M 矩阵, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{R_j} - \left(T_{jj} g'_j(u_j^*) + \sum_{k=1}^n |T_{jjk} + T_{jkj}| |g_k(u_k^*) g'_j(u_j^*)| \right), & i = j \\ - \left(|T_{ij} g'_j(u_j^*)| + \sum_{k=1}^n |T_{ijk} + T_{ikj}| |g_k(u_k^*) g'_j(u_j^*)| \right), & i \neq j \end{cases}$$

则 u^* 是系统 (1) 式的一个局部指数稳定的平衡点, u^* 的吸引域为 $G_\delta(u^*) = \left\{ u \in R^n \mid \sum_{i=1}^n p_i C_i |u_i - u_i^*| < \delta \right\}$, 从 $G_\delta(u^*)$ 中任意一点 u_0 出发的运动轨道 $u(t, u_0)$ 总在 $G_\delta(u^*)$ 中, 且 $u(t, u_0)$ 满足 $\|u(t, u_0) - u^*\| \leq a \|u_0 - u^*\| e^{-\eta t}$, $\forall t \geq 0, \forall u_0 \in G_\delta(u^*)$,

其中 $a = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \{p_i C_i\}}{\min_{1 \leq i \leq n} \{p_i C_i\}} \sqrt{n}$; $\eta = \frac{\lambda \varepsilon}{\max_{1 \leq i \leq n} \{p_i C_i\}}$, $\lambda = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i (|T_{ij}| + \sum_{k=1}^n |T_{ijk} + T_{ikj}|) \right\}$, $0 < \varepsilon < \frac{\min_{1 \leq j \leq n} \{b_j\}}{\lambda}$, $p_i > 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ 为一组使得 $b_j = \sum_{i=1}^n p_i a_{ij} > 0$, $(j = 1, 2, \dots, n)$ 的常数; δ 为使 $|g_j(x_j + u_j^*) - g_j(u_j^*) - g'_j(u_j^*) x_j| \leq \left(\frac{\min_{1 \leq j \leq n} \{b_j\}}{\lambda} - \varepsilon \right) |x_j|$, $(j = 1, 2, \dots, n)$; $|g_j(x_j + u_j^*) g_k(x_k + u_k^*) - g_j(u_j^*) g_k(u_k^*) - g'_j(u_j^*) g_k(u_k^*) x_j - g_j(u_j^*) g'_k(u_k^*) x_k| < \left(\frac{\min_{1 \leq i \leq n} \{b_i\}}{\lambda} - \varepsilon \right) (|x_j| + |x_k|)$, $(j, k = 1, 2, \dots, n)$, $x \in \left\{ x \in R^n \mid \sum_{i=1}^n p_i C_i |x_i| < \delta \right\}$ 成立的 最大可能值。

证明 因为 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 M 矩阵, 所以存在一组常数 $p_i > 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ 使得 $b_j = \sum_{i=1}^n p_i a_{ij} > 0$, $(j = 1, 2, \dots, n)$ 。

取 Lyapunov 函数 $V = \sum_{i=1}^n p_i C_i |x_i|$, 沿 (4) 式的解对 V 求 Dini 导数得

$$\begin{aligned} D^+V|_{(4) \text{ 式}} &= \sum_{i=1}^n p_i \left(-\frac{x_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n T_{ij} f_j(x_j) \right) \operatorname{sgn}(x_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_i T_{ijk} (f_j(x_j) f_k(x_k) + f_k(x_k) g_j(u_j^*) + f_j(x_j) g_k(u_k^*)) \operatorname{sgn}(x_i) \\ &\leq -\sum_{j=1}^n \frac{p_j}{R_j} |x_j| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i T_{ij} f_j'(0) x_j \operatorname{sgn}(x_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_i (T_{ijk} + T_{ikj}) g_j'(u_j^*) g_k(u_k^*) x_j \operatorname{sgn}(x_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |T_{ij}| |H_j(x_j)| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_i |T_{ijk} + T_{ikj}| |F(x_j, x_k)| \\ &\leq -\sum_{j=1}^n b_j |x_j| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i \left(|T_{ij}| |H_j(x_j)| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |T_{ijk} + T_{ikj}| |F(x_j, x_k)| \right) \end{aligned}$$

式中 $H_j(x_j) = f_j(x_j) - f_j'(0)x_j = g_j(x_j + u_j^*) - g_j(u_j^*) - g_j'(u_j^*)x_j$, $F(x_j, x_k) = f_j(x_j)f_k(x_k) + f_k(x_k)g_j(u_j^*) + f_j(x_j)g_k(u_k^*) - g_j'(u_j^*)g_k(u_k^*)x_j - g_k'(u_k^*)g_j(u_j^*)x_k$.

由 $g_i(u_i)$ 在 R 上连续知, $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \frac{\min_{1 \leq j \leq n} \{b_j\}}{\lambda}$, $\exists \delta > 0$, 当 $V(x) < \delta$ 时, 有 $|H_j(x_j)| \leq \left(\frac{\min_{1 \leq j \leq n} \{b_j\}}{\lambda} - \varepsilon \right) |x_j|$, $|F_j(x_j, x_k)| < \left(\frac{\min_{1 \leq j \leq n} \{b_j\}}{\lambda} - \varepsilon \right) (|x_j| + |x_k|)$, $(j, k = 1, 2, \dots, n)$, 因此, 当 x 满足 $V(x) < \delta$ 时, 有 $D^+V|_{(4)} \leq -\varepsilon \lambda \sum_{j=1}^n |x_j| \leq -\eta V$.

由比较原理^[8] 可得 $V(x(t, x_0)) \leq V(x_0)e^{-\eta t}$, $\forall t \geq 0, \forall x_0 \in G_\delta = \{x \in R^n | V(x) < \delta\}$. 易知 $\min_{1 \leq i \leq n} \{p_i C_i\} \|x\| \leq V \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i C_i\} n^{1/2} \|x\|$, 故有 $\|x(t, x_0)\| \leq a \|x_0\| e^{-\eta t}$, $\forall t \geq 0, \forall x_0 \in G_\delta$, 即 $\|u(t, u_0) - u^*\| \leq a \|u_0 - u^*\| e^{-\eta t}$, $\forall t \geq 0, \forall u_0 \in G_\delta(u^*)$. 证毕

注: 对于系统 (1) 式, 当二阶连接权 $T_{ijk} \equiv 0$ 时可得其特殊情形, 即一阶 Hopfield 网络

$$C_i \frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n T_{ij} g_j(u_j) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

由定理 1 得到 Hopfield 神经网络 (6) 式的平衡点 u^* 局部指数稳定的充分条件为 $\Lambda = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ 为 M 阵, 其中 $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1/R_j - T_{ij} g_j'(u_j^*), & i = j \\ -|T_{ij} g_j'(u_j^*)|, & i \neq j \end{cases}$.

文献 [9] 所给出的 Hopfield 神经网络 (6) 式的平衡点 u^* 局部指数稳定的充分条件为 $T_{ii} g_i'(u_i^*) + \sum_{j=1, j \neq i}^n |T_{ij} g_j'(u_j^*)| < \frac{1}{R_i}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$.

由 M 矩阵的性质可知, 此条件是 Λ 为 M 矩阵的简单的充分条件, 从而文献 [9] 的定理 1 是这里的定理 1 应用于 Hopfield 神经网络 (6) 式时的特例.

定理 2 设 $u^* \in D = \{(u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in R^n | |u_i - u_i^*| \leq \alpha, (i = 1, 2, \dots, n)\}$ 为系统 (1) 式的一个平衡点, 若存在常数 $p_i > 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ 及 $r, 0 < r < \min_{1 \leq i \leq n} \{p_i / (R_i C_i)\}$ 使得

$T_r = (t_{ij})_{n \times n}$ 半负定, 其中

$$t_{ij} = -\frac{p_i - R_i C_i r}{R_i k_i} \delta_{ij} + \frac{1}{2} |p_i T_{ij} + p_j T_{ji}| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |p_i (T_{ijk} + T_{ikj}) + p_j (T_{jik} + T_{jki})| M_k$$

则 u^* 是系统 (1) 式的一个局部指数稳定平衡点, u^* 的吸引域为 $G(u^*) = \{(u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in R^n \mid |u_i - u_i^*| < \frac{\alpha}{\beta}, (i = 1, 2, \dots, n)\} \subset D$, 从 $G(u^*)$ 中任意一点 u_0 出发的运动轨道 $u(t, u_0)$ 总在 D 中, 且 $u(t, u_0)$ 满足 $\|u(t, u_0) - u^*\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (1 + \mu_i \alpha_i)^2} \|u_0 - u^*\| e^{-\theta t}, \forall t \geq 0, \forall u_0 \in G_\delta(u^*)$, 其中

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{\max_{1 \leq l \leq n} \{p_l C_l k_l\}}{p_j C_j}} \sum_{j=1}^n \left(|T_{ij}| + \sum_{k=1}^n |T_{ijk} + T_{ikj}| L_k \right) \sqrt{\frac{2k_j}{p_j C_j}}, \mu_i = \frac{2R_i \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i\}}{2 \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i\} - R_i C_i r}$$

$$\theta = \frac{r}{2 \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i\}}, \beta = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ 1 + \mu_i \sum_{j=1}^n \left(|T_{ij}| + \sum_{k=1}^n |T_{ijk} + T_{ikj}| M_k \right) \sqrt{\frac{2k_j}{p_j C_j}} \sum_{l=1}^n p_l C_l k_l \right\}$$

证明 先证从 $G(u^*)$ 中任意一点 u_0 出发的运动轨道 $u(t, u_0)$ 总在 D 中.

若不然, 则必存在某时刻 $t_1 > 0$ 及某 $i (1 \leq i \leq n)$ 使 $|u_i(t_1, u_0) - u_i^*| = \alpha$, 且 $|u_j(t, u_0) - u_j^*| \leq \alpha, t \in [0, t_1], (j = 1, 2, \dots, n)$.

由 (2), (3) 式得 $x_i f_i(x_i) \geq f_i^2(x_i)/k_i, (i = 1, 2, \dots, n)$.

取 Lyapunov 函数 $V = \sum_{i=1}^n p_i C_i \int_0^{x_i} f_i(z) dz, t \in [0, t_1]$, 沿 (4) 式的解对 V 求导数, 并由 (2), (5) 式及上式得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(4) \text{ 式}} &= -r \sum_{i=1}^n C_i x_i f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{R_i} - r C_i \right) x_i f_i(x_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (p_i T_{ij} + p_j T_{ji}) f_i(x_i) f_j(x_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_i (T_{ijk} + T_{ikj}) \zeta_k f_i(x_i) f_j(x_j) \\ &\leq -r \sum_{i=1}^n C_i x_i f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{R_i} - r C_i \right) \frac{1}{k_i} f_i^2(x_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2} |p_i T_{ij} + p_j T_{ji}| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |p_i (T_{ijk} + T_{ikj}) + p_j (T_{jik} + T_{jki})| M_k \right] |f_i(x_i)| |f_j(x_j)| \\ &= -r \sum_{i=1}^n C_i x_i f_i(x_i) + |f(x)|^T T_r |f(x)| \end{aligned}$$

式中 $|f(x)| = (|f_1(x_1)|, |f_2(x_2)|, \dots, |f_n(x_n)|)^T$.

由 $T_r = (t_{ij})_{n \times n}$ 半负定知 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(4) \text{ 式}} \leq -r \sum_{i=1}^n C_i x_i f_i(x_i) \leq -2\theta V$. 从而由比较原理^[8]

可得 $V(x(t, x_0)) \leq V(x_0) e^{-2\theta t}, \forall t \in [0, t_1]$.

由 (3) 式得 $V(x_0) \leq \sum_{i=1}^n p_i C_i f_i(x_i(0)) x_i(0) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i(0)|^2\} \sum_{i=1}^n p_i C_i k_i$.

由 (2) 式可证

$$\int_0^{x_i} f_i(z) dz \geq \frac{f_i^2(x_i)}{2k_i}, \forall x \in G = \left\{ x \in R^n \mid |x_i| < \frac{\alpha}{\beta}, (i = 1, 2, \dots, n) \right\}, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

故有 $V \geq p_i C_i \int_0^{x_i} f_i(z) dz \geq \frac{p_i C_i}{2k_i} f_i^2(x_i)$, $\forall t \in [0, t_1]$, $(i = 1, 2, \dots, n)$. 所以 $|f_i(x_i)| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i(0)|\} \sqrt{\frac{2k_i}{p_i C_i} \sum_{j=1}^n p_j C_j k_j} e^{-\theta t}$, $\forall t \in [0, t_1]$, $(i = 1, 2, \dots, n)$.

由 (2), (4), (5) 式得

$$\begin{aligned} C_i D^+ |x_i| &\leq -\frac{1}{R_i} |x_i| + \sum_{j=1}^n |T_{ij}| |f_j(x_j)| + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |T_{ijk} + T_{ikj}| M_k |f_i(x_j)| \\ &\leq -\frac{1}{R_i} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i(0)|\} \beta_i e^{-\theta t}, \quad \forall t \in [0, t_1] \end{aligned}$$

式中 $\beta_i = \sum_{j=1}^n (|T_{ij}| + \sum_{k=1}^n |T_{ijk} + T_{ikj}| M_k) \sqrt{\frac{2k_j}{p_j C_j} \sum_{l=1}^n p_l C_l k_l}$.

故由比较原理^[8]可得

$$\begin{aligned} |x_i(t, x_0) &\leq |x_i(0)| e^{-t/R_i C_i} + \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i(0)|\} \frac{\beta_i}{C_i} \int_0^t e^{-\theta s} e^{-(t-s)/R_i C_i} ds \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i(0)|\} (1 + \mu_i \beta_i) e^{-\theta t}, \quad \forall t \in [0, t_1] \end{aligned}$$

因此 $|x_i(t_1, x_0)| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i(0)|\} (1 + \mu_i \beta_i) e^{-\theta t_1}$, 即 $|u_i(t_1, u_0) - u_i^*| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|u_i(0) - u_i^*|\} (1 + \mu_i \beta_i) e^{-\theta t_1} < \alpha$, 此为矛盾. 所以 $\forall t \geq 0$, $u(t, u_0) \in D$.

取 Lyapunov 函数 $V = \sum_{i=1}^n p_i C_i \int_0^{x_i} f_i(z) dz$, 类似于上面的证明可得 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4) \text{ 式}} \leq -2\theta V$.

因此 $V(x(t, x_0)) \leq V(x_0) e^{-2\theta t}$, $\forall t \geq 0$, $\forall x_0 \in G$, 而由 (3) 式得 $V(x_0) \leq \sum_{i=1}^n p_i C_i f_i(x_i(0)) \times x_i(0) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i C_i k_i\} \|x_0\|^2$. 故由 (7) 式及上式得

$$|f_i(x_i)| \leq \|x_0\| \sqrt{\frac{2k_i}{p_i C_i} \max_{1 \leq l \leq n} \{p_l C_l k_l\}} e^{-\theta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \in G, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

又由 (2), (4), (5) 式及上式得

$$C_i D^+ |x_i| \leq -\frac{1}{R_i} |x_i| + \alpha_i \|x_0\| e^{-\theta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \in G, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

因此 $|x_i(t, x_0)| \leq \|x_0\| (1 + \mu_i \alpha_i) e^{-\theta t}$, $\forall t \geq 0$, $\forall x_0 \in G$, $(i = 1, 2, \dots, n)$.

故 $\|x(t, x_0)\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (1 + \mu_i \alpha_i)^2} \|x_0\| e^{-\theta t}$, $\forall t \geq 0$, $\forall x_0 \in G$, 即

$$\|u(t, u_0) - u^*\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (1 + \mu_i \alpha_i)^2} \|u_0 - u^*\| e^{-\theta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u_0 \in G(u^*) \quad \text{证毕}$$

定理 3 设 $g'_i(s)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ 在 R 中连续, u^* 为系统 (1) 式的一个平衡点. 若存在常数 $p_i > 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ 及 $\mu > 0$ 使得 $T_\mu = (d_{ij})_{n \times n}$ 负定, 则 u^* 为局部指数稳定的平衡点. 其中

$$d_{ij} = -\frac{p_i \delta_{ij}}{R_i (g'_i(u_i^*) + \mu)} + \frac{1}{2} |p_i T_{ij} + p_j T_{ji}| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |p_i (T_{ijk} + T_{ikj}) + p_j (T_{jik} + T_{jki})| M_k$$

证明 设 $k_i = g'_i(u_i^*) + \mu$, ($i = 1, 2, \dots, n$) 则 $0 < g'_i(u_i^*) < k_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$)。由 $g'_i(s)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) 的连续性, 必存在常数 $\alpha > 0$ 使得, 对 $\forall u \in D = \{(u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in R^n \mid |u_i - u_i^*| \leq \alpha, (i = 1, 2, \dots, n)\}$, 有 $0 < g'_i(u_i) \leq k_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$)。

因 T_μ 负定, 故存在常数 $r, 0 < r < \min_{1 \leq i \leq n} \{p_i / (R_i C_i)\}$ 使 $T_r = (t_{ij})_{n \times n}$ 半负定, 其中

$$t_{ij} = -\frac{p_i - C_i R_i r}{R_i k_i} \delta_{ij} + \frac{1}{2} |p_i T_{ij} + p_j T_{ji}| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |p_i (T_{ijk} + T_{ikj}) + p_j (T_{jik} + T_{jki})| M_k$$

故由定理 2 知结论成立。

证毕

推论 1 设 $g'_i(s)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) 在 R 中连续, u^* 为系统 (1) 式的一个平衡点。若存在常数 $p_i > 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$) 使得 $\bar{H} = (\bar{h}_{ij})_{n \times n}$ 负定, 则平衡点 u^* 局部指数稳定。其中 $\bar{h}_{ij} = -\frac{p_i \delta_{ij}}{R_i g'_i(u_i^*)} + \frac{1}{2} |p_i T_{ij} + p_j T_{ji}| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |p_i (T_{ijk} + T_{ikj}) + p_j (T_{jik} + T_{jki})| M_k$ 。

推论 2 设 $g'_i(s)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) 在 R 中连续, u^* 为系统 (1) 式的一个平衡点。若 $H = (h_{ij})_{n \times n}$ 负定, 则平衡点 u^* 局部指数稳定。其中

$$h_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{R_i g'_i(u_i^*)} + \frac{1}{2} |T_{ij} + T_{ji}| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |T_{ijk} + T_{ikj} + T_{jik} + T_{jki}| M_k$$

4 结 论

通过对高阶连续 Hopfield 型神经网络平衡点的局部指数稳定性的分析, 得到了网络平衡点的吸引域及其中每一点趋向于平衡点的指数收敛速度的估计结果。这些结果可用于设计更为有效的高阶 Hopfield 型神经网络。

参 考 文 献

- [1] A. Dembo, O. Farotimi, T. Kailath, High-order absolutely stable neural networks, IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1991, CAS-38(1), 57-65.
- [2] E. B. Kosmatopoulos, M. A. Christodoulou, Structural properties of gradient recurrent high-order neural networks, IEEE Trans. on Circuits and Systems II, 1995, CAS-II-42(9), 592-603.
- [3] E. B. Kosmatopoulos, M. M. Polycarpou, M. A. Christodoulou, P. A. Ioannou, High-order neural network structures for identification of dynamical systems, IEEE Trans. on Neural Networks, 1995, NN-6(2), 422-431.
- [4] T. Zhang, S. S. Ge, C. C. Hang, Neural-based direct adaptive control for a class of general nonlinear systems, International Journal of Systems Science, 1997, 28(10), 1011-1020.
- [5] J. Su, A. Q. Hu, Z. Y. He, Stability analysis of analogue neural networks, Electronics Letters, 1997, 33(6), 506-507.
- [6] J. Su, A. Hu, Z. He, Solving a kind of nonlinear programming problems via analog neural networks, Neurocomputing, 1998, 18(1), 1-9.
- [7] 关治洪, 孙德宝, 沈建京, 高阶 Hopfield 型神经网络的定性分析, 电子学报, 2000, 28(3), 77-80.
- [8] 廖晓昕, 动力系统稳定性理论和应用, 北京, 国防工业出版社, 2000, 45-48.

- [9] 梁学斌, 吴立德, Hopfield 连续联想记忆的吸引域和指数收敛速度的估计及其应用, 电子学报, 1996, 24(1), 40-43.

ESTIMATION OF ATTRACTION DOMAIN AND EXPONENTIAL CONVERGENCE RATE FOR HIGH ORDER HOPFIELD TYPE NEURAL NETWORKS

Xu Bingji* Zhou Lun* Liao Xiaoxin* Liu Xinzhi* **

**(Dept. of Control Sci. & Eng., Huazhong Univ. of Sci. and Tech., Wuhan 430074, China)*

*** (Dept. of Applied Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, Canada)*

Abstract In this paper, the locally exponential stability of equilibrium point for a class of high order Hopfield type neural networks is studied by means of Lyapunov function. Some results about estimation of the attraction domain and exponential convergence rate of the network trajectories to equilibrium point of such networks are obtained.

Key words High order neural networks, Attraction domain, Exponential convergence rate

徐炳吉: 男, 1962 年生, 副教授, 博士生, 主要研究方向为神经网络及非线性控制.

周 伦: 女, 教授, 访问学者, 主要研究方向为代数及稳定性.

廖晓昕: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为神经网络及非线性控制.

刘新芝: 男, 教授, 博士生导师, “长江学者奖励计划”特聘教授, 主要研究方向为大型动力系统及混合动力系统的理论与应用.