一种完全重构双正交小波基的构造方法

朱铁稳* 　陈少强* 　李 琦* 　苗前军**

*(北京大学遥感与 GIS 研究所 北京 100871)

**(黑龙江省测绘局 哈尔滨 150086)

摘 要：在有关小波的各种应用中，合适小波基的选取是一个极为重要和棘手的问题。该文利用传递函数（或滤波器）的方法建立了一种完全重构双正交小波基的构造通用方法，利用该文提供的结论，只需要适当选择系数 $a_{ij}(\omega)$，就可以构造出满足特定需要性质的重构小波基。因此，该文的结论对于促进小波的应用具有十分重要的理论意义和实际意义。

关键词：多分辨分析，正交小波基，传递函数，完全重构

中图分类号：TN911.6　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2005)06-0900-05

A Construction Method of Biorthogonal Bases of Perfect Reconstruction Wavelet

Zhu Tie-wen* 　Chen Shao-qiang* 　Li Qi* 　Miao Qian-jun**

*(*Institute of Remote Sensing & GIS, Peking University, Beijing* 100871, *China*)

**(*Heilongjiang Bureau of Surveying and Mapping, Harbin* 150086, *China*)

Abstract In the applications of wavelet, it is the most difficult and cumbrous to select the suitable wavelet bases. In this paper, a general construction method of biorthogonal bases of perfect reconstruction wavelet is proposed by using the transmission functions or filters. According to the conclusion, something only to do is to choice the suitable coefficients $a_{ij}(\omega)$ for constructing the wavelet bases of perfect reconstruction which has special properties. So, this conclusion is important to the applications of wavelet.

Key words Multiresolution analysis, Orthogonal wavelet bases, Transmission function, Perfect reconstruction

1 引言

小波是近 20 年发展起来的新兴学科，是一个极度活跃和高速发展的领域，并在许多领域得到了非常好的应用。典型的应用包括信号处理[1, 2]、数据压缩[3, 4]、滤波[5]和消噪[6, 7]、目标信号检测[8]等。与 Fourier 分析相比，它的明显优势在于小波变换在时域和频域上同时具备良好的局部化性质，而且对高频成分采用逐渐精细的时域或空域采样步长，从而可以聚焦到对象的任意细节。

小波理论与应用的研究在过去的十多年里取得了非常大有成果，小波基的构造是小波理论与应用的一个重要内容，采用的方法是寻找满足一定条件的函数施以平移和伸缩处理来得到 $L^2(R)$的一组标准正交基，然后将信号在这组基上分解，以便于对信号进行分析和处理，并能根据这些分解系数重构原来的信号。但寻找这样满足要求的函数并不是一件容易的事情，产生的小波基有时也不能满足实际问题提出的应用需求。因此，Sweldens 等人提出了一种上升型方案[9, 10](Lifting schema)来构造小波，它的基本思想就是在已知小波的基础上来构造满足进一步条件的小波。

本文利用传递函数（或滤波器）的方法，研究了满足完全重构条件的小波基的构造。论文首先从介绍多分辨分析入手分析了重构小波基应该满足的条件，在此基础上，本文在第 3 节研究了重构小波基的构造方法，并给出了相应的结论。

2 多分辨分析

多分辨分析(MultiResolution Analysis, MRA)是快速小波变换的理论基础，它在构造 $L^2(R)$的标准正交小波基方面起着十分重要的作用。

2004-01-06收到，2004-05-25改回

国家863计划(2002AA134030)和中国博士后科学基金(2003034071)资助课题

我们知道，$L^2(R)$的多分辨分析完全由尺度函数 $\varphi(x)$ 决定。假设 $L^2(R)$的一个多分辨分析是 $\{V_j\}_{j\in z}$，对于尺度函数 $\varphi(x)$，如果 $\varphi(x)\in V_0$，$\{\varphi_{1,k},k\in z\}$ 是 V_1 的标准正交基，由于 $V_0\subseteq V_1$，从而存在序列 $\{h_k\}$，满足 $\varphi(x)=\sum_{k\in z}h_k\varphi_{1,k}$，从而

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{k\in z}h_k\varphi(2x-k) \tag{1}$$

式(1)称为尺度函数所满足的双尺度方程(Double scaling equation)。对式(1)的两端取 Fourier 变换，并一般地把 $f(x)$ 的 Fourier 变换记为 $\hat{f}(x)$，则有

$$\hat{\varphi}(\omega)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in z}h_k e^{-ik\frac{\omega}{2}}\hat{\varphi}(\tfrac{\omega}{2})$$

令 $H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in z}h_k e^{-ik\omega}$，则有

$$\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \tag{2}$$

我们把序列 $\{h_k\}$ 叫做频率响应，$H(\omega)$ 叫做频率响应 $\{h_k\}$ 的 Fourier 变换或传递函数，频率响应 $\{h_k\}$ 和传递函数 $H(\omega)$ 是能够相互决定的。

频率响应 $\{h_k\}$ 和传递函数 $H(\omega)$ 能够完全地确定一个多分辨分析，对于它们我们有下面的结论[11]。

定理 1　设 $\{h_k\}$ 和 $H(\omega)$ 是一个给定的多分辨分析导出的频率响应和传递函数，则有

(1) $|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1$；

(2) 若 $\{h_k\}_{k\in z}\in l^1$，且 $\hat{\varphi}(\omega)$ 连续，$\hat{\varphi}(0)\neq 0$，则 $|H(0)|=1$。

对于 $L^2(R)$的多分辨分析 $\{V_j\}_{j\in z}$，定义 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间 W_j，即 $W_j\perp V_j$，$V_{j+1}=V_j\oplus W_j$，我们有[11, 12]：

定理 2　设 $\{V_j\}_{j\in z}$ 为 $L^2(R)$的 MRA，其尺度函数为 $\varphi(x)$，对应的频率响应和传递函数为 $\{h_k\}$ 和 $H(\omega)$，记 $G(\omega)=e^{-\omega}\bar{H}(\omega+\pi)$，则由 $\hat{\psi}(\omega)=G(\omega/2)\hat{\varphi}(\omega/2)$ 所决定的函数 $\psi(x)$ 即为我们寻求的小波函数。又记 $\psi_{j,k}=2^{j/2}\psi(2^jx-k)$，$j,k\in z$，则 $\{\psi_{j,k}\}_{k\in z}$ 构成 W_j 的标准正交基，$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in z}$ 构成 $L^2(R)$的小波标准正交基。

若记 $G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in z}g_k e^{-ik\omega}$，则由 $G(\omega)=e^{-\omega}\bar{H}(\omega+\pi)$ 易知 $g_n=(-1)^{n-1}h_{1-n}$，对应的 $\psi(x)$ 满足

$$\hat{\psi}(2\omega)=G(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \tag{3}$$

$$\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{k\in z}g_k\varphi(2x-k) \tag{4}$$

下面我们就根据这些内容来构造完全重构双正交小波基。

3　完全重构正交小波基的构造

在信号处理应用中，有许多应用要求信号的精确重建，典型的应用如医学影像处理。因此，本节的目的是寻求能够用于完全重构的小波基的选取方法，为此目的，我们先介绍重构小波基所需要满足的条件。

3.1　完全重构小波基条件分析

我们首先假定输入信号为 $f(x)\in L^2(R)$，$\{V_j\}_{j\in z}$ 是 $L^2(R)$ 的多分辨分析。引入记号

$$\gamma_{j,k}=\langle f(x),\psi_{j,k}\rangle=2^{\frac{j}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\psi(2^jx-k)\mathrm{d}x$$

$$\lambda_{j,k}=\langle f(x),\varphi_{j,k}\rangle=2^{\frac{j}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(2^jx-k)\mathrm{d}x$$

利用多分辨分析所满足的条件，并考虑到式(1)和式(4)，我们有

$$\lambda_{j,k}=\sum_{n\in z}h_{n-2k}\lambda_{j+1,n} \tag{5}$$

$$\gamma_{j,k}=\sum_{n\in z}g_{n-2k}\lambda_{j+1,n} \tag{6}$$

定义滤波器 $\tilde{H}=\{\tilde{h}_n\}_{n\in z}$，$\tilde{G}=\{\tilde{g}_n\}_{n\in z}$，其中 $\tilde{h}_n=h_{-n}$，$\tilde{g}_n=g_{-n}$，则式(5)和式(6)变为

$$\lambda_{j,k}=\sum_{n\in z}\tilde{h}_{2k-n}\lambda_{j+1,n} \tag{7}$$

$$\gamma_{j,k}=\sum_{n\in z}\tilde{g}_{2k-n}\lambda_{j+1,n} \tag{8}$$

又由于 $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$，对于 $\forall k\in z,\varphi_{j+1,k}\in V_{j+1}$，所以有

$$\varphi_{j+1,k}=\sum_{n\in z}\langle\varphi_{j+1,k},\varphi_{j,n}\rangle\varphi_{j,n}+\sum_{n\in z}\langle\varphi_{j+1,k},\psi_{j,n}\rangle\psi_{j,n}$$

从而有

$$\lambda_{j+1,k}=\sum_{n\in z}\langle\varphi_{j+1,k},\varphi_{j,n}\rangle\lambda_{j,n}+\sum_{n\in z}\langle\varphi_{j+1,k},\psi_{j,n}\rangle\gamma_{j,n} \tag{9}$$

对于 $\langle\varphi_{j+1,k},\varphi_{j,n}\rangle$，利用式(1)，得到 $\langle\varphi_{j+1,k},\varphi_{j,n}\rangle=h_{k-2n}$。同样利用式(4)，有 $\langle\varphi_{j+1,k},\psi_{j,n}\rangle=g_{k-2n}$。从而式(9)可以写成

$$\lambda_{j+1,k}=\sum_{n\in z}h_{k-2n}\lambda_{j,n}+\sum_{n\in z}g_{k-2n}\gamma_{j,n} \tag{10}$$

我们把 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 决定的滤波器叫做 H 和 G，根据信号处理中的术语，注意到 $g_n=(-1)^{n-1}h_{1-n}$，则 G 为 H 的镜像滤波器，且 G 为高通滤波器。根据式(7), (8), (10)，可得到如图 1 的信号完全重构的分解和合成框图。

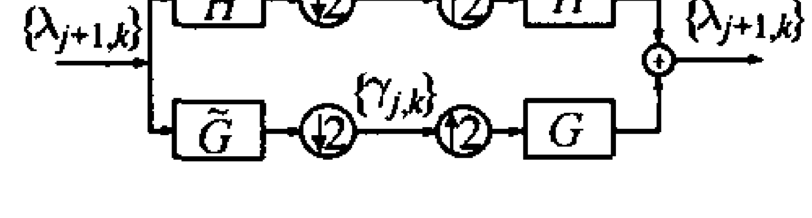

图 1　完全重构的信号分解和合成框图

从图1可知，信号能够完全重构，整个框图的传递函数应该为1。一般地，对于信号$\{x_n\}_{n\in z}$，系统能够完全重构的充分必要条件是设计滤波器$\widetilde{H}$，$\widetilde{G}$，H和G，使得图2框图的传递函数为1，或者最多产生一个延迟。

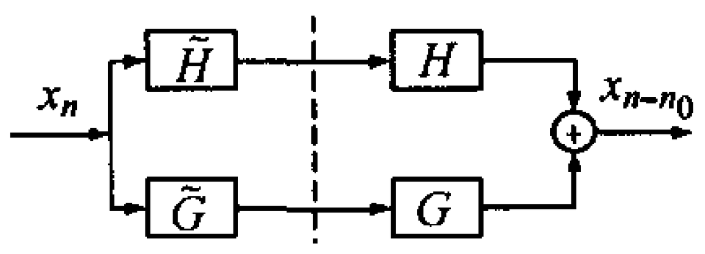

图2 一般信号重构框图

设滤波器$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in z}h_k e^{-ik\omega}$，$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in z}g_k e^{-ik\omega}$，$h_k$与$g_k$为式(1)，式(4)所决定，设$\varphi(x)$和$\psi(x)$的对偶尺度函数和小波函数分别为$\tilde{\varphi}(x)$，$\widetilde{\psi}(x)$。相似地定义滤波器：

$$\widetilde{H}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in z}\tilde{h}_k e^{-ik\omega}, \quad \widetilde{G}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in z}\tilde{g}_k e^{-ik\omega}$$

则重构条件为整个系统的传递函数为1，或者最多只有一个延迟[13]。我们分别把$\widetilde{H}(\omega)$和$\widetilde{G}(\omega)$叫做$H(\omega)$和$G(\omega)$的对偶滤波器，由于紧支集双正交小波具有良好的性质[14]，我们只考虑尺度函数与小波是紧支撑情况下的信号完全重构，即寻求紧支集双正交小波基。在此情况下，信号重构要求滤波器$H(\omega)$和$G(\omega)$满足[11]：

$$\left.\begin{aligned}H(\omega)H^*(\omega)+H(\omega+\pi)H^*(\omega+\pi)=1\\ G(\omega)G^*(\omega)+G(\omega+\pi)G^*(\omega+\pi)=1\\ H(\omega)G^*(\omega)+H(\omega+\pi)G^*(\omega+\pi)=0\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

对于$\widetilde{H}(\omega)$和$\widetilde{G}(\omega)$，也有类似的结论。

对于任意的$\forall\omega\in R$，$H(\omega)$，$G(\omega)$，$\widetilde{H}(\omega)$和$\widetilde{G}(\omega)$，必须满足[10, 15]：

$$\left.\begin{aligned}\tilde{H}(\omega)H^*(\omega)+\tilde{H}(\omega+\pi)H^*(\omega+\pi)=1\\ \tilde{H}(\omega)G^*(\omega)+\tilde{H}(\omega+\pi)G^*(\omega+\pi)=0\\ \tilde{G}(\omega)H^*(\omega)+\tilde{G}(\omega+\pi)H^*(\omega+\pi)=0\\ \tilde{G}(\omega)G^*(\omega)+\tilde{G}(\omega+\pi)G^*(\omega+\pi)=1\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

若记$\boldsymbol{M}(\omega)=\begin{bmatrix}H(\omega) & H(\omega+\pi)\\ G(\omega) & G(\omega+\pi)\end{bmatrix}$，$\tilde{\boldsymbol{M}}(\omega)=\begin{bmatrix}\tilde{H}(\omega) & \tilde{H}(\omega+\pi)\\ \tilde{G}(\omega) & \tilde{G}(\omega+\pi)\end{bmatrix}$，

那么式(11)，式(12)可以写成

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{M}(\omega)\boldsymbol{M}^{\mathrm{H}}(\omega)=\boldsymbol{I}\\ \tilde{\boldsymbol{M}}(\omega)\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{H}}(\omega)=\boldsymbol{I}\\ \tilde{\boldsymbol{M}}(\omega)\boldsymbol{M}^{\mathrm{H}}(\omega)=\boldsymbol{I}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中$\boldsymbol{I}$表示单位矩阵，*表示共轭，H表示共轭转置。

在小波理论中，我们把满足式(11)，式(12)的滤波器组$\{\tilde{H}(\omega),\tilde{G}(\omega),H(\omega),G(\omega)\}$叫做双正交滤波器组。因此，要寻找完全重构的正交小波基，关键的问题就是要找出满足条件式(11)，(12)的滤波器$\tilde{H}(\omega)$，$\tilde{G}(\omega)$，$H(\omega)$，$G(\omega)$。

3.2 完全重构小波基的构造方法

根据3.1节的分析，我们要找出能够完全重构的小波基，只要能够决定滤波器组$\{\tilde{H}(\omega), \tilde{G}(\omega), H(\omega), G(\omega)\}$，使得它们满足式(11)，(12)即可。因此，重构小波基的构造关键在于选择满足条件的$\tilde{H}(\omega)$，$\tilde{G}(\omega)$，$H(\omega)$，$G(\omega)$。例如，当我们取定$\boldsymbol{M}(\omega)$对应的行列式$\det\boldsymbol{M}(\omega)=-e^{-i\omega}$时，在已知$H(\omega)$和$\tilde{H}(\omega)$的情况下，满足条件式(12)的$G(\omega)$和$\tilde{G}(\omega)$分别为$G(\omega)=e^{-i\omega}\tilde{H}^*(\omega+\pi)$，$\tilde{G}(\omega)=e^{-i\omega}H^*(\omega+\pi)$。

因而，关于紧支集双正交小波基的构造，我们有下面的结论：

定理3 设$\{\tilde{H}(\omega), \tilde{G}(\omega), H(\omega), G(\omega)\}$是一组已知的可重构的双正交滤波器组，令

$$\left.\begin{aligned}\tilde{H}'(\omega)=a_{11}(\omega)\tilde{H}(\omega)+a_{12}(\omega)\tilde{G}(\omega)+a_{13}(\omega)H(\omega)+a_{14}(\omega)G(\omega)\\ \tilde{G}'(\omega)=a_{21}(\omega)\tilde{H}(\omega)+a_{22}(\omega)\tilde{G}(\omega)+a_{23}(\omega)H(\omega)+a_{24}(\omega)G(\omega)\\ H'(\omega)=a_{31}(\omega)\tilde{H}(\omega)+a_{32}(\omega)\tilde{G}(\omega)+a_{33}(\omega)H(\omega)+a_{34}(\omega)G(\omega)\\ G'(\omega)=a_{41}(\omega)\tilde{H}(\omega)+a_{42}(\omega)\tilde{G}(\omega)+a_{43}(\omega)H(\omega)+a_{44}(\omega)G(\omega)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

则当系数$a_{ij}(\omega)$满足

$$a_{ij}(\omega)=a_{ij}(\omega+\pi), \quad 1\le i,j\le 4 \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}+a_{13} & a_{12}+a_{14}\\ a_{21}+a_{23} & a_{22}+a_{24}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{31}+a_{33} & a_{32}+a_{34}\\ a_{41}+a_{43} & a_{42}+a_{44}\end{bmatrix} \tag{16}$$

且矩阵：
$$\begin{bmatrix}a_{11}+a_{13} & a_{12}+a_{14}\\ a_{21}+a_{23} & a_{22}+a_{24}\end{bmatrix}$$

是酉正交矩阵时，滤波器组$\{\tilde{H}'(\omega), \tilde{G}'(\omega), H'(\omega), G'(\omega)\}$也是可重构的双正交滤波器组。

证明 根据式(14)，我们把它写成另外一种形式：

$$\begin{bmatrix}\tilde{H}'(\omega)\\ \tilde{G}'(\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}(\omega) & a_{12}(\omega) & a_{13}(\omega) & a_{14}(\omega)\\ a_{21}(\omega) & a_{22}(\omega) & a_{23}(\omega) & a_{24}(\omega)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{H}(\omega)\\ \tilde{G}(\omega)\\ H(\omega)\\ G(\omega)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}H'(\omega)\\ G'(\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{31}(\omega) & a_{32}(\omega) & a_{33}(\omega) & a_{34}(\omega)\\ a_{41}(\omega) & a_{42}(\omega) & a_{43}(\omega) & a_{44}(\omega)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{H}(\omega)\\ \tilde{G}(\omega)\\ H(\omega)\\ G(\omega)\end{bmatrix}$$

由式(15)，有

$$\begin{bmatrix}\tilde{H}'(\omega) & \tilde{H}'(\omega+\pi)\\ \tilde{G}'(\omega) & \tilde{G}'(\omega+\pi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}(\omega) & a_{12}(\omega) & a_{13}(\omega) & a_{14}(\omega)\\ a_{21}(\omega) & a_{22}(\omega) & a_{23}(\omega) & a_{24}(\omega)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\tilde{H}(\omega) & \tilde{H}(\omega+\pi)\\ \tilde{G}(\omega) & \tilde{G}(\omega+\pi)\\ H(\omega) & H(\omega+\pi)\\ G(\omega) & G(\omega+\pi)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H'(\omega) & H'(\omega+\pi) \\ G'(\omega) & G'(\omega+\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31}(\omega) & a_{32}(\omega) & a_{33}(\omega) & a_{34}(\omega) \\ a_{41}(\omega) & a_{42}(\omega) & a_{43}(\omega) & a_{44}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) & \tilde{H}(\omega+\pi) \\ \tilde{G}(\omega) & \tilde{G}(\omega+\pi) \\ H(\omega) & H(\omega+\pi) \\ G(\omega) & G(\omega+\pi) \end{bmatrix}$$

引入记号：

$$\tilde{\boldsymbol{M}}'(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{H}'(\omega) & \tilde{H}'(\omega+\pi) \\ \tilde{G}'(\omega) & \tilde{G}'(\omega+\pi) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}'(\omega) = \begin{bmatrix} H'(\omega) & H'(\omega+\pi) \\ G'(\omega) & G'(\omega+\pi) \end{bmatrix}$$

利用定理的假定，可知$\{\tilde{H}(\omega), \tilde{G}(\omega), H(\omega), G(\omega)\}$满足式(13)，从而

$$\tilde{\boldsymbol{M}}'(\omega)\boldsymbol{M}'^{\mathrm{H}}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{H}'(\omega) & \tilde{H}'(\omega+\pi) \\ \tilde{G}'(\omega) & \tilde{G}'(\omega+\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}'(\omega) & \bar{G}'(\omega) \\ \bar{H}'(\omega+\pi) & \bar{G}'(\omega+\pi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(\omega) & a_{12}(\omega) & a_{13}(\omega) & a_{14}(\omega) \\ a_{21}(\omega) & a_{22}(\omega) & a_{23}(\omega) & a_{24}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{31}(\omega) & \bar{a}_{41}(\omega) \\ \bar{a}_{32}(\omega) & \bar{a}_{42}(\omega) \\ \bar{a}_{33}(\omega) & \bar{a}_{43}(\omega) \\ \bar{a}_{34}(\omega) & \bar{a}_{44}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(\omega)+a_{13}(\omega) & a_{12}(\omega)+a_{14}(\omega) & \cdots \\ a_{21}(\omega)+a_{23}(\omega) & a_{22}(\omega)+a_{24}(\omega) & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11}(\omega)+a_{13}(\omega) & a_{12}(\omega)+a_{14}(\omega) \\ a_{21}(\omega)+a_{23}(\omega) & a_{22}(\omega)+a_{24}(\omega) \end{matrix}\Bigg] \begin{bmatrix} \bar{a}_{31}(\omega) & \bar{a}_{41}(\omega) \\ \bar{a}_{32}(\omega) & \bar{a}_{42}(\omega) \\ \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{33}(\omega) & \bar{a}_{43}(\omega) \\ \bar{a}_{34}(\omega) & \bar{a}_{44}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(\omega)+a_{13}(\omega) & a_{12}(\omega)+a_{14}(\omega) \\ a_{21}(\omega)+a_{23}(\omega) & a_{22}(\omega)+a_{24}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a}_{31}(\omega)+\bar{a}_{33}(\omega) & \bar{a}_{41}(\omega)+\bar{a}_{43}(\omega) \\ \bar{a}_{32}(\omega)+\bar{a}_{34}(\omega) & \bar{a}_{42}(\omega)+\bar{a}_{44}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(\omega)+a_{13}(\omega) & a_{12}(\omega)+a_{14}(\omega) \\ a_{21}(\omega)+a_{23}(\omega) & a_{22}(\omega)+a_{24}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{31}(\omega)+a_{33}(\omega) & a_{32}(\omega)+a_{34}(\omega) \\ a_{41}(\omega)+a_{43}(\omega) & a_{42}(\omega)+a_{44}(\omega) \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{I}$$

同样，我们可以验证$\boldsymbol{M}'(\omega)\boldsymbol{M}'^{\mathrm{H}}(\omega) = \boldsymbol{I}$，$\tilde{\boldsymbol{M}}'(\omega)\tilde{\boldsymbol{M}}'^{\mathrm{H}}(\omega) = \boldsymbol{I}$。因此$\{\tilde{H}'(\omega)$，$\tilde{G}'(\omega)$，$H'(\omega)$，$G'(\omega)\}$满足式(13)，从而$\{\tilde{H}'(\omega)$，$\tilde{G}'(\omega)$，$H'(\omega)$，$G'(\omega)\}$构成新的可重构的双正交滤波器组。

定理 3 告诉我们，如果我们需要构造能够完全重构的、满足特殊条件的正交小波基，我们可以从一个已知的较为简单的小波基入手，通过适当地选择系数$a_{ij}(\omega)$来达到我们的要求。选取的方法是附加满足特殊条件的正交小波基所需要满足的条件，例如，当我们要产生 2 个消失矩(Vanishing moment)的双正交小波基时，只要附加条件$G'(\omega)|_{\omega=0}=0$和$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}G'(\omega)|_{\omega=0}=0$即可。

我们结论的主要优点是对于小波基的构造提供了一般的通用方法，能够灵活地构造出满足特殊应用要求的小波基，这为小波基的构造提供了极大的灵活性，虽然它的不足之处是新的小波基的构造依赖于一个已知的小波基，但由于利用传统办法构造满足特定性质的小波基是一件非常困难的事情，利用定理 3 的结论，就可以从简单的已知小波基开始，使得构造复杂和满足特定性质的小波基的工作变得较为容易，因此，定理 3 的结论不失为一种非常好的方法。

4　结束语

小波基是小波应用的基础，研究小波理论和应用的难点之一就是小波基的构造。本文利用传递函数或滤波器的理论研究了能够用于信号完全重构小波基的构造方法。使得满足特定性质小波基的构造只需要适当地选取式(14)中的系数$a_{ij}(\omega)$，这就使得小波基的构造变得较为容易，结论对于促进小波应用的进展具有十分重要的理论意义和实际意义。

参 考 文 献

[1] Zhang Z, Toda H, Kawabata H. A new complex wavelet: ri-spline wavelet and its application to signal processing. Proc. of the 41st SICE Annual Conference, Osaka, Japan, 5-7 Aug. 2002. Vol.4: 2496 − 2501.

[2] Rioul O, Vetterli M. Wavelets and signal processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1991, 8(4): 14 − 18.

[3] Thakor N V, Sun Y, Rix H, Caminal P. Multiwave: A wavelet-based ECG data compression. *IEICE Trans. Info. Syst.*, 1993, E76-D(12): 1462 − 1469.

[4] Lewis A, Knowles G. Image compression using 2-D wavelet transform. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1992, 1(2): 244 − 250.

[5] Vitterli M, Herley C. Wavelets and filter banks: theory and design. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992, 40(9): 2207 − 2232.

[6] Lang M, Guo H, Odegard J E, Burrus C S, Wells R O. Noise reduction using an undecimated discrete wavelet transform. *IEEE Signal Processing Letters*, 1996, 3(1): 10 − 12.

[7] Dragotti P L, Vetterli M. Shift-invariant gibbs free denoising algorithm based on wavelet tranform footprints. Proc. of SPIE, 2000, Wavelet Application in Signal and Image Processing, San Diego, USA, Aug. 2000.

[8] Boccignone G, Chianese A, Picariello A. Using Renyi's information and wavelets for target detection: An application to mammograms. *Pattern Analysis & Applications*, 2000, 3(4): 303 – 313.

[9] Sweldens W. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. Technical Report 1995:6, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina, 1995.

[10] Sweldens W. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Journal of Appl. and Comput. Harmonic Analysis*, 1996, 3(2): 186 – 200.

[11] 耿则勋. 小波变换理论及在遥感影像压缩中的应用. 北京：测绘出版社，2002: 15 – 20.

[12] Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposotion: the wavelet representation. *IEEE. Trans. on PAMI*, 1989, 11(7): 674 – 693.

[13] 李素芝, 万建伟. 时域离散信号处理. 长沙：国防科技大学出版社，1994，第3章.

[14] Cohen A, Daubechies I, Feauveau J. Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. On Pure Appl. Math.*,1992, 45(5): 485 – 560.

[15] 刘春生，张晓春. 实用小波分析. 北京：中国矿业大学出版社，2002: 71 – 76.

朱铁稳： 男，1962 年生，博士，教授，主要研究领域为遥感影像处理、地理信息系统与数据库技术、空间信息科学等.

陈少强： 男，1963 年生，博士后，高级工程师，主要研究领域为影像处理、三维可视化技术等.

李 琦： 女，1955 年生，教授，博士生导师，主要研究领域为空间信息科学、数字地球、数字城市理论等.

苗前军： 男，1963 年生，博士，高级工程师，主要研究领域为测绘、地理信息工程等.