

超混沌电路的广义同步¹

高远 翁甲强 罗晓曙 方锦清*

(广西师范大学物理与电子科学系 桂林 541004)

*(中国原子能科学研究院 北京 102413)

摘 要 该文研究了超混沌电路的广义同步。理论分析表明:只要构造出恰当的矩阵和一个与之相对易的矩阵,就可以实现驱动系统与响应系统的广义超混沌同步。文章并以一个四维超混沌振荡电路为例,给出了广义同步的数值模拟结果。

关键词 广义同步, 超混沌

中图分类号 TN711.4

1 引言

九十年代以来,混沌同步已成为非线性科学领域中的一个热门研究课题。通常同步是指两个初值不同的混沌系统的轨道距离 $\|x - y\|$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时趋于零的情形。现在,人们研究混沌同步的范围已涉及电子线路^[1,2], 保密通信^[3] 等各个领域。与此同时,人们也在不断探索超混沌的同步方法^[4,5]。由于在实际中难以产生出两个完全相同的混沌系统,因此混沌系统之间常存在着参数不匹配,传输信道失真或其他失真的非同步现象。为了解决这一问题,近年来 L.Kocarev 等人又提出了针对参数不匹配,信道失真等情况的混沌广义同步 (Generalized Synchronization 简称 GS) 的概念和方法^[6-8]。所谓广义同步是指响应系统的状态变量与驱动系统状态变量的函数同步。目前国内外对低维混沌系统的广义同步已有报道,但对高维超混沌系统的广义同步尚属少见。本文把广义同步方法应用于超混沌系统,在不改变驱动系统的内部参数条件下构造出响应系统,通过调节外部参数 β 而使响应系统与驱动系统达到最佳广义同步状态。并在理论分析基础上,通过数值模拟实现了四维超混沌振荡电路的广义同步。所得结果,可望为实际电路实现广义同步提供参考。

2 广义同步的定义与原理

考虑两个动力学系统^[6-8]

$$\dot{x} = f(x), \quad \dot{y} = g(y, h(x)) \quad (1)$$

这里 $x \in R^n$, $y \in R^m$, 如果 x, y 之间存在着一个变换关系 $H: R^n \mapsto R^m$, 一个函数流形 $M = \{(x, y) | H(x, y)\}$, 及一个子集 $B = B_x \times B_y \subset R^n \times R^m$, 且满足 $M \subset B$, 当且仅当所有初始条件 $(x_0, y_0) \in B$ 的响应系统轨道都随时间趋于无穷而趋于 M 。即当 $t \rightarrow \infty$ 时, 响应系统的轨道满足 $y = H(x)$, 则称为广义同步。

当 $n = m$ 时, 则广义同步又回到一般意义下的同步, 即 $y = H(x) = x$ 。

如果驱动系统能分成两个部分: $\dot{x} = Ax + \Phi(x)$ 。其中 A 是 $n \times n$ 系数矩阵, Ax 是 $f(x)$ 的线性部分, $\Phi(x): R^n \rightarrow R^n$, 则可将函数 $\Phi(x)$ 作为驱动信号去作用于响应系统。考虑单向传输同步的情况, 不妨构造两个系统:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Phi(x) && \text{驱动系统} \\ \dot{y} &= Ay + \Omega\Phi(x) && \text{响应系统} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹ 2000-09-01 收到, 2000-12-21 定稿

国家自然科学基金 (批准号 19875080) 和广西教育厅科学基金 (批准号 9816940) 资助的课题

如果 Ω 是 A 的对易矩阵, 即满足关系: $A\Omega = \Omega A$, 那么 $t \rightarrow \infty$ 时, 响应系统的轨道满足广义同步:

$$y = H(x) = \Omega x \quad (3)$$

证明: 令误差 $\Delta = y - \Omega x$, 则

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= \dot{y} - \Omega \dot{x} = Ay + \Omega \Phi(x) - \Omega[Ax + \Phi(x)] \\ &= Ay - \Omega Ax = A\Delta \end{aligned} \quad (4)$$

可见只要矩阵 A 的所有特征根的实部全为负数, 则 $\Delta \rightarrow 0$ 渐近稳定. 因此只要我们构造出满足上述条件的矩阵 A 和 Ω , 则可把驱动系统与响应系统化为 (2) 式的形式, 从而满足 $t \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow \Omega x = H(x)$, 即达到广义同步.

3 四维超混沌振荡电路的同步

3.1 电路系统的状态方程 四维超混沌振荡电路^[9]如图 1 所示, 取电容 C_1, C_2 两端的电压 U_{C1}, U_{C2} 和流过电感 L_1, L_2 的电流 I_{L1}, I_{L2} 作为超混沌系统的状态变量, 由基尔霍夫电流定律得电路的状态方程为

$$\left. \begin{aligned} C_1 dU_{C1}/dt &= U_{C1}/R_1 - I_{L1} - I_{L2}, & L_1 dI_{L1}/dt &= U_{C1} \\ L_2 dI_{L2}/dt &= U_{C1} - U_{C2}, & C_2 dU_{C2}/dt &= I_{L2} - P(U_{C2} - U_0) \cdot (U_{C2} - U_0)/R_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 U_0 为二极管的正向门限电压, P 是亥维塞函数, 且满足 $P(u < 0) = 0$, 及 $P(u \geq 0) = 1$. 引入如下记号:

$$\begin{aligned} U_{C1}/U_0 &= x, & \rho I_{L1}/U_0 &= y, & \rho I_{L2}/U_0 &= z, & U_{C2}/U_0 &= v, & t/\tau &= \theta, & \rho &= \sqrt{L_1/C_1}, \\ a &= \rho/R_1, & b &= \rho/R_2, & c &= L_1/L_2, & e &= C_1/C_2, & \tau &= \sqrt{L_1 C_1} \end{aligned}$$

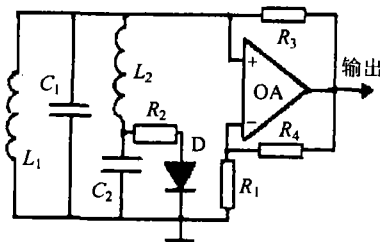


图 1 四维超混沌振荡电路

那么状态方程可表为

$$\dot{x} = ax - y - z, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = c(x - v), \quad \dot{v} = e[z - b(v - 1)P(v - 1)] \quad (6)$$

当系统参数取 $a=0.7, b=10, c=e=3$ 时, 系统的李雅普洛夫指数分别为 $\lambda_1 = 0.123$, $\lambda_2 = 0.067$, $\lambda_3 = 0.00$, $\lambda_4 = -9.75$. 由于系统有两个正的李雅普洛夫指数, 所以系统处于超混沌

状态^[10]. 图 2(a) 是超混沌系统的一个吸引子. (6) 式可以写成部分求和形式: $\dot{x} = Ax + \Phi(x)$, 这里 $x = (x, y, z, v)^T$ 是系统的状态向量,

$$A = \begin{bmatrix} \beta & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & e & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi(x) = \begin{bmatrix} ax - \beta x \\ 0 \\ 0 \\ -be(v-1)P(v-1) \end{bmatrix} \quad (7)$$

按照广义同步原理把 $\Phi(x)$ 作为驱动信号作用于响应系统 $\dot{y}(t) = Ay + \Omega\Phi(x)$, 并调节参数 β 使 A 的特征值实部全部成为负数, 及选择 Ω 使满足对易关系 $A\Omega = \Omega A$, 则可达到广义同步.

3.2 广义同步的数值模拟 选择系统参数 $a=0.7, b=10, c=e=3$; 取可调参数 $\beta=-1$, 这时矩阵 A 的特征值分别是

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -0.1351 + 3.4696i, & \omega_2 &= -0.1351 - 3.4696i \\ \omega_3 &= -0.3649 + 0.7832i, & \omega_4 &= -0.3649 - 0.7832i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

实现了特征值实部全成为负数, 满足广义同步的一个条件. 当矩阵 Ω 取为

$$\Omega = A = \begin{bmatrix} \beta & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & e & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

则关系式 $\Omega A = A\Omega = A^2$ 成立, 满足广义同步的对易条件. 于是可按照式 $\dot{y} = Ay + \Omega\Phi(x)$ 构造响应系统

$$\left. \begin{aligned} x' &= \beta x' - y' - z' + \beta(a - \beta)x, & y' &= x' + (a - \beta)x \\ z' &= c(x' - v') + c(a - \beta)x + bce(v - 1)P(v - 1), & v' &= ez' \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

使响应系统的状态向量 $y = (x', y', z', v')^T$ 按照下列关系式与驱动系统变量的函数达到广义同步: $y = H(x) = \Omega x$, 即:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \beta x - y - z = g_1(x, y, z), & y' &= x = g_2(x) \\ z' &= c(x - v) = g_3(x, v), & v' &= ez = g_4(z) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

取初值 $x_0 = (1.0, 0.0, 1.4, 1.0)^T$, $y_0 = (1.4, 6.2, 5.0, 4.5)^T$, 则数值模拟结果如图 2-4 所示.

比较图 2(a), 2(b) 可知响应系统的吸引子与驱动系统相应的吸引子明显不一致. 图 3(a), 3(b) 是响应系统与驱动系统对应状态变量的图形, 它们表明了两系统对应变量之间不同步. 图 4(a), 4(b) 是响应系统状态变量与驱动系统状态变量函数 g_i 之间在系统演化 10000 个积分步后的模拟数值关系图, 比较表明超混沌的状态变量与驱动系统状态变量的函数已达到了同步. 综上所述, 只要从驱动系统的状态方程出发, 构造出一个特征值实部全是负数的矩阵 A 和一个与之相对易的矩阵 Ω , 就可以构造出响应系统. 通过调节参数 β 就能使 A 的特征值的实部全部为适当负数从而使驱动系统与响应系统达到最佳同步状态.

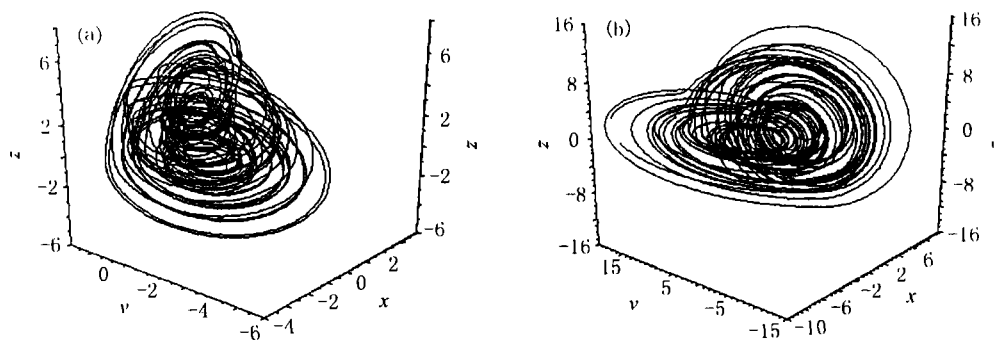


图 2 两个对应吸引子不一致。(a) 驱动系统吸引子; (b) 响应系统吸引子

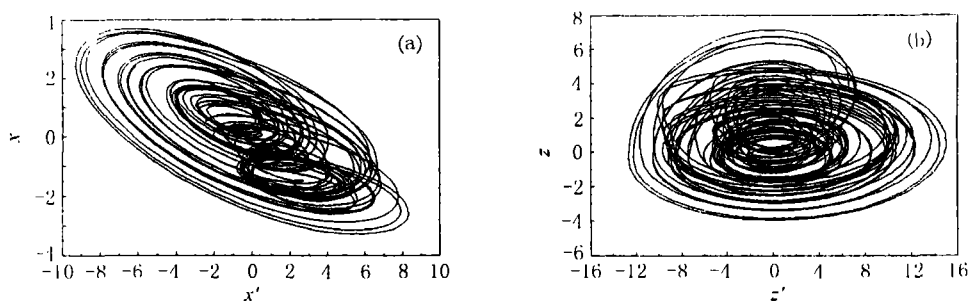


图 3 响应系统与驱动系统对应状态变量之间不同步

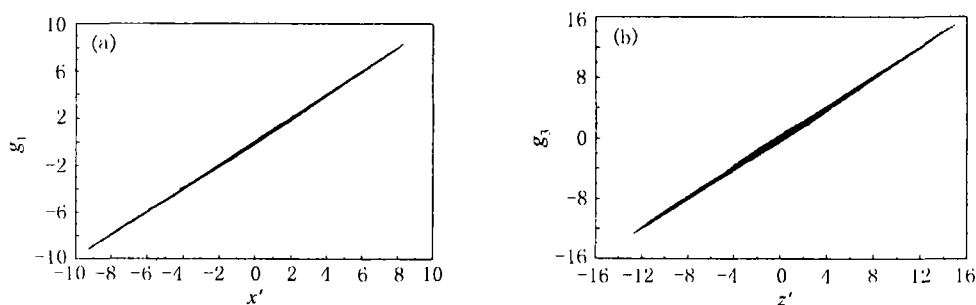


图 4 响应系统状态变量与驱动系统的变量函数同步

附带说明: 关于广义同步问题是响应系统的状态变量与驱动系统状态变量函数的同步, 响应系统与驱动系统对应状态变量之间允许不同步, 甚至表现出混沌状态 (如图 3 所示). 可以证明当 Ω 取单位矩阵时, 广义同步退化到一般意义下的同步, 即: $x \rightarrow y$, 所以一般意义下的同步只是广义同步的特殊情形.

4 结 论

本文把广义同步方法用于实现四维超混沌振荡电路的广义同步. 说明广义同步方法不仅可以用于低维的混沌系统, 而且能够同步高维的、非线性极强的超混沌系统.

利用广义同步方法去实现超混沌系统同步的关键在于构造 $n \times n$ 矩阵 A , 要求其特征值实部全部为负, 并能找到一个与 A 对易的矩阵. 文中矩阵 A 的参数 β 的引入可以调节 A 的特征

值, 使 A 的特征值实部全为负数。可调参数 β 的引入并不改变驱动系统的状态方程和动力学行为, 通过对参数 β 的调节可以实现响应系统与驱动系统的最佳同步。

超混沌的广义同步可以应用于保密通讯, 由于一般意义下的混沌同步发射的加密信号是变量信号, 接收者可以通过延迟变量等方法近似重构出驱动系统的动力学模型, 而超混沌的广义同步发射的加密信号是函数信号, 接收机收到的信号是发射机一个或几个混沌变量的函数信号, 破译者这就难以根据接收到的加密信号重构出驱动系统的模型、初始条件及可调参数, 因此超混沌广义同步保密通信要比一般意义下的混沌同步保密通信具有更强的抗破译能力。

参 考 文 献

- [1] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, Circuit implementation of synchronized chaos with application to communications, *Phys. Rev. Lett.* 1993, 71(1), 65-68.
- [2] 尹元昭, 用连续控制法实现变型蔡氏电路的同步, *电子科学学报*, 1997, 19(16), 825-827.
- [3] L. Kolarev, U. Parlitz, General approach for chaotic synchronization with applications to communication, *Phys. Rev. Lett.* 1995, 74(25), 5028-5031.
- [4] M. K. Ali, Jin-Qing Fang, Synchronization of chaos and hyperchaos using linear and nonlinear feedback function, *Phys. Rev. E*, 1997, 55(5), 5285-5290.
- [5] Giuseppe Grassi, Saverio Mascolo, Synchronization hyperchaotic systems by observer design, *IEEE Trans. on Circuits Syst. II*, 1999, 40(4), 478-483.
- [6] L. Kocarev, U. Parlitz, Generalized synchronization, predictability, and R equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems, *Phys. Rev. Lett.* 1996, 76(11), 1816-1819.
- [7] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, Henry D. I, Abarbanel, Generalized synchronization of directionally coupled chaotic systems, *Phys. Rev. E*, 1995, 51(2), 980-994.
- [8] Tao Yang, Lin-Bao Yang, Chun-Mei Yang, Breaking chaotic switching using generalized synchronization: Examples, *IEEE Trans. on Circuits. Syst I*, 1998, 45(10), 1062-1067.
- [9] Tamasevicius, A. Namajunas, A. Cenys, Simple 4D chaotic oscillator, *Electron. Lett.* 1996, 32(11), 957-958.
- [10] 方锦清, 非线性系统中混沌控制方法、同步原理及其应用前景 (二), *物理学进展*, 1996, 16(2), 174-176.

GENERALIZED SYNCHRONIZATION OF HYPERCHAOTIC CIRCUIT

Gao Yuan Weng Jiajiang Luo Xiaoshu Fang Jinqing*

(*Dept. of Physics and Electronic Science, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China*)

*(*China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China*)

Abstract This paper studies the generalized synchronization of hyperchaotic circuit. Theoretical analysis demonstrates that if a matrix and its commutative matrix can be built, generalized synchronization of driving system and driven system can be realized. A 4-D hyperchaotic oscillator is taken as typical example. The results of numerical simulation are presented.

Key words Generalized synchronization, Hyperchaos

高 远: 男, 1975 年生, 硕士生, 现从事非线性科学中混沌控制与同步的学习研究工作。

翁甲强: 男, 1944 年生, 教授, 硕士生导师。现从事非线性物理学的研究。

罗晓曙: 男, 1961 年生, 副教授, 硕士生导师。现从事非线性科学中混沌的控制与同步研究。

方锦清: 男, 1939 年生, 研究员, 现从事非线性物理学、混沌控制与同步研究。