

# 非线性振荡器频率占据现象的 Volterra 级数分析

刘华平 孔俊室

(南京邮电学院, 南京210003)

**摘要** 本文应用 Volterra 级数和谐波平衡技术分析了一个互感耦合非线性振荡电路在外电动势作用下的频率占据现象, 导出了占据带宽表达式。这种方法在建立好系统模型后只需进行代数运算, 从而避开了求解非线性微分方程的复杂过程。

**关键词** 非线性振荡电路; Volterra 级数; 谐波平衡; 频率占据

## 1. 引言

(1) Volterra 级数和传递函数 设图 1 所示的非线性系统  $H$  是一时不变系统, 则系统输出  $y(t)$  和输入  $x(t)$  的关系可用 Volterra 级数表示为<sup>[1]</sup>

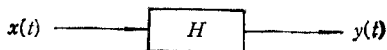


图1 非线性时不变系统

$$y(t) = H[x(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)$$

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n) \prod_{j=1}^n x(t - \tau_j) d\tau_j$$

$h_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$  是系统  $H$  的  $n$  阶 Volterra 核。对  $h_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$  取  $n$  维 Laplace 变换:

$$\begin{aligned} H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n) &= L[h_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n) \exp[-(s_1\tau_1 + s_2\tau_2 + \cdots \\ &\quad + s_n\tau_n)] d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \end{aligned}$$

$H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)$  是非线性系统  $H$  的  $n$  阶传递函数。

(2) 频率占据 非线性自治电路在外加激励时会产生复杂的振荡现象<sup>[2]</sup>。当外加电动势频率  $f_p$  与电路固有振荡频率  $f_0$  相差不大的某个范围内,  $f_0$  将被强迫等于  $f_p$ , 这时微调振荡器回路时, 振荡频率不变, 这就是频率占据现象<sup>[3,4]</sup>。本文以一个互感耦合振荡器在外加电动势与振荡回路串联时为例, 用 Volterra 级数法分析频率占据现象, 导出占据带宽表达式。

## 2. 占据带宽的推导

以图 2 所示的互感耦合场效应管振荡器为例, 设外加电动势串联在栅极谐振回路中。本文的分析是在以下条件下进行的:

(a) 栅源极间, 由于  $P^+N$  结反偏,  $i_g \ll i^{[9]}$ , 故分析中忽略  $i_g$ 。

(b) 由于图 2 所示正弦振荡器非线性器件的偶次幂项对基波解不起作用 (这一点的证明可参阅文献[3]), 故可假设场效应管的转移特性可用非线性函数  $i_D = a_1 u + a_3 u^3$  来描述<sup>[3]</sup>。

耦合电感的伏安关系为

$$u_{LD} = L_D di_D/dt - M di/dt \quad (1)$$

$$u_L = M di_D/dt - L di/dt \quad (2)$$

$$u_{GP} = u_L - Ri = M di_D/dt - LCd^2u/dt^2 - RCdu/dt \quad (3)$$

以  $u$  为输入变量,  $u_{GP}$  为输出变量来建立系统模型。由(3)式结合图 2 不难得到图 3 所示的系统。

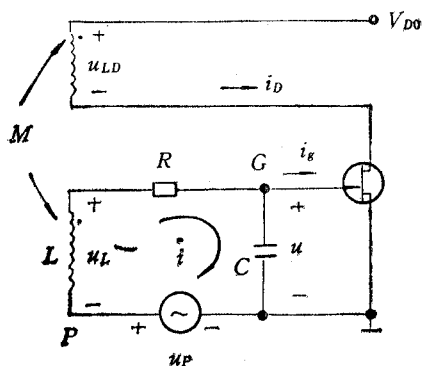


图 2 互感耦合场效应管振荡器

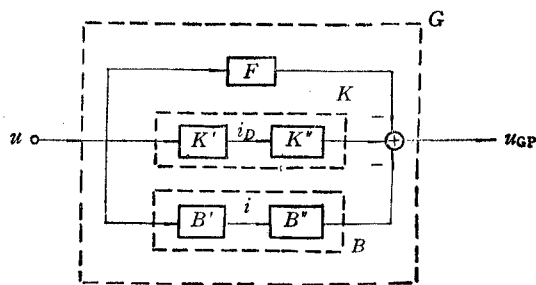


图 3

由级联系统和系统传递函数的性质<sup>[6]</sup>, 可求出各系统的传递函数如下:

$$\left. \begin{aligned} K'_1(s_1) &= a_1 \\ K'_2(s_1, s_2) &= 0 \\ K'_3(s_1, s_2, s_3) &= a_3 \\ K'_n(s_1, s_2, \dots, s_n) &= 0, \quad (n > 3) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} K''_1(s_1) &= Ms_1 \\ K''_n(s_1, s_2, \dots, s_n) &= 0, \quad (n > 1) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} K_1(s_1) &= a_1 Ms_1 \\ K_2(s_1, s_2) &= 0 \\ K_3(s_1, s_2, s_3) &= a_3 M(s_1 + s_2 + s_3) \\ K_n(s_1, s_2, \dots, s_n) &= 0, \quad (n > 3) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} B'_1(s_1) &= Cs_1 \\ B'_n(s_1, s_2, \dots, s_n) &= 0, \quad (n > 1) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B_1''(s_1) &= Ls_1 \\ B_n''(s_1, s_2, \dots, s_n) &= 0, \quad (n > 1) \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} B_1(s_1) &= LCs_1^2 \\ B_n(s_1, s_2, \dots, s_n) &= 0, \quad (n > 1) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1(s_1) &= RCs_1 \\ F_n(s_1, s_2, \dots, s_n) &= 0 \quad (n > 1) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} G_1(s_1) &= a_1 Ms_1 - LCs_1^2 - RCs_1 \\ G_2(s_1, s_2) &= 0 \\ G_3(s_1, s_2, s_3) &= a_3 M(s_1 + s_2 + s_3) \\ G_n(s_1, s_2, \dots, s_n) &= 0, \quad (n > 3) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在图 2 中, 若外加电动势频率  $\omega_p$  与振荡器的固有频率  $\omega_0$  相差不太大以至发生频率占据现象时, 以  $u_{GP}$  的初相为参考初始相位, 则可设

$$\left. \begin{aligned} u_{GP} &= A_{GP} \cos \omega_p t = (1/2) A_{GP} [\exp(j\omega_p t) + \exp(-j\omega_p t)] \\ u_P &= A_P \cos(\omega_p t + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由图 2 不难得到

$$u = u_{GP} + u_P = A \cos(\omega_p t + \varphi) = (1/2) A [\exp(j\omega_p t + j\varphi) + \exp(-j\omega_p t - j\varphi)]$$

其中

$$A = \sqrt{A_P^2 + 2A_P A_{GP} \cos \theta + A_{GP}^2} \quad (9)$$

$$\varphi = \arctg [A_P \sin \theta / (A_P \cos \theta + A_{GP})] \quad (10)$$

$$\cos \varphi = (A_{GP} + A_P \cos \theta) / A \quad (11a)$$

$$\sin \varphi = A_P \sin \theta / A \quad (11b)$$

在  $u$  的作用下, 一阶传递函数产生的基波输出:

$$(1/2) A G_1(j\omega_p) \exp(j\omega_p t + j\varphi) + (1/2) A G_1(-j\omega_p) \exp(-j\omega_p t - j\varphi) \quad (12a)$$

三阶传递函数产生的基波输出<sup>[1,6]</sup>:

$$\begin{aligned} & (3/8) A^3 G_3(j\omega_p, j\omega_p, -j\omega_p) \exp(j\omega_p t + j\varphi) \\ & + (3/8) A^3 G_3(j\omega_p, -j\omega_p, -j\omega_p) \exp(-j\omega_p t - j\varphi) \end{aligned} \quad (12b)$$

根据谐波平衡原理, 图 3 所示系统的输入和输出基波分量相等, 故可得

$$\begin{aligned} & (1/2) A [G_1(j\omega_p) \exp(j\omega_p t + j\varphi) + G_1(-j\omega_p) \exp(-j\omega_p t - j\varphi)] \\ & + (3/8) A^3 [G_3(j\omega_p, j\omega_p, -j\omega_p) \exp(j\omega_p t + j\varphi) \\ & + G_3(j\omega_p, -j\omega_p, -j\omega_p) \exp(-j\omega_p t - j\varphi)] \\ & = (1/2) A_{GP} [\exp(j\omega_p t) + \exp(-j\omega_p t)] \end{aligned} \quad (13)$$

运用复数运算理论, 不难得到

$$\begin{aligned} & (1/2) A G_1(j\omega_p) \exp(j\omega_p t + j\varphi) + (3/8) A^3 G_3(j\omega_p, j\omega_p, -j\omega_p) \exp(j\omega_p t + j\varphi) \\ & = (1/2) A_{GP} \exp(j\omega_p t) \end{aligned} \quad (14)$$

(14) 式即

$$\begin{aligned} & A G_1(j\omega_p) + (3/4) A^3 G_3(j\omega_p, j\omega_p, -j\omega_p) \\ & = A_{GP} \exp(-j\varphi) \end{aligned} \quad (15)$$

将(7)式代入(15)式得

$$A\omega_p^2 LC = A_{GP} \cos \varphi \quad (16a)$$

$$\omega_p [Aa_1 M - ARC + (3/4)A^3 a_3 M] = -A_{GP} \sin \varphi \quad (16b)$$

对(16a)和(16b)两式的讨论如下:

(a) 若  $u_p = 0$ , 则(16a)和(16b)式的解为自治振荡解。这时,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $A_{GP} = A$ 。将他们代入(16a)和(16b)式可得

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (17)$$

$$A_0 = \sqrt{-4(a_1 M - RC)/(3a_3 M)} \quad (18)$$

(17)和(18)式所表示的结果同文献[4]中导出的自治振荡输出结果吻合。

(b) 若  $u_p \neq 0$  时, 由(16a)和(17)式得

$$\omega_p^2/\omega_0^2 = A_{GP} \cos \varphi / A$$

将(9)式和(11a)式代入上式得

$$\omega_p^2/\omega_0^2 = A_{GP}(A_{GP} + A_P \cos \theta)/(A_P^2 + 2A_P A_{GP} \cos \theta + A_{GP}^2) \quad (19)$$

在图2所示电路中,  $A_P$  较小,  $A_P < A_{GP}$  [3]。令

$$f(\cos \theta) = (A_{GP} + A_P \cos \theta)/(A_P^2 + 2A_P A_{GP} \cos \theta + A_{GP}^2)$$

可求得

$$[\partial f(\cos \theta)/\partial(\cos \theta)] < 0$$

故  $f(\cos \theta)$  为  $\cos \theta$  的减函数。当  $\cos \theta = -1$  时, 由(11b)式可得到  $\sin \varphi = 0$ , 将  $\sin \varphi = 0$  代入(16b)式得

$$A = \sqrt{-4(a_1 M - RC)/(3a_3 M)} = A_0 = A_{GP} - A_P$$

因此得到

$$\omega_{p\max}^2/\omega_0^2 = 1 + A_P/A_0 \quad (20)$$

同理可求得在  $\cos \theta = 1$  时

$$\omega_{p\min}^2/\omega_0^2 = 1 - A_P/A_0 \quad (21)$$

令  $\omega_{p\max} = \omega_0 + \Delta\omega_{\max}$ ,  $\omega_{p\min} = \omega_0 - \Delta\omega_{\min}$ , 代入(20)和(21)式得

$$(\omega_0 + \Delta\omega_{\max})^2/\omega_0^2 = 1 + A_P/A_0, (\omega_0 - \Delta\omega_{\min})^2/\omega_0^2 = 1 - A_P/A_0$$

在  $A_P$  较小时,  $\Delta\omega_{\max} \ll \omega_0$ ,  $\Delta\omega_{\min} \ll \omega_0$ , 整理以上两式并忽略  $(\Delta\omega_{\max})^2/\omega_0^2$  和  $(\Delta\omega_{\min})^2/\omega_0^2$  后得

$$\Delta\omega_{\max} \approx (A_P/2A_0)\omega_0 = \Delta\omega_{\min} \quad (22)$$

(22)式所表示的占据带宽表达式同文献[3]中用推广的慢变振幅法求解非线性微分方程所得出的结果完全吻合。

### 3. 结论

本文以一个互感耦合振荡器为例, 应用 Volterra 级数和谐波平衡技术分析了它在外加激励时的频率占据现象。分析的一般过程是: 首先建立系统的频域模型, 然后用 Volterra 级数导出系统的各阶传递函数, 最后应用谐波平衡技术列写出关于基波的方程。从分析的结果可看出, 在外加激励为零时, 所求出的解是系统的自治振荡输出, 它同文献[4]中导出的结果完全吻合。在外加激励的频率  $\omega_p$  与系统的固有频率  $\omega_0$  相差不太大, 以

至发生频率占据现象时,本文导出的占据频带表达式同文献[3]中用推广的慢变振幅法导出的结果相同。但本文的分析不仅物理概念很清楚,而且只需进行代数运算,避免了求解非线性微分方程的复杂过程。

### 参 考 文 献

- [1] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear System*, New York: Wiley, (1980), Chap. 2.
- [2] T. Parker, L. O. Chua, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-30**(1983) 8, 519—533.
- [3] 张肃文,非线性振荡引论,高等教育出版社,北京,1983年,第三、四章.
- [4] 管致中等,无线电技术基础(下册),高等教育出版社,北京,1973年,第七章.
- [5] 谢嘉奎等,电子线路(上册),高等教育出版社,北京,1985年,第94页.
- [6] L. O. Chua, C. Y. Ng, *IEE. J. Electronic Circuit Syst.*, **3**(1979) 2, 257—269.

## ANALYSIS OF FREQUENCY PULLING USING VOLTERRA SERIES METHOD

Liu Huaping    Kong Junbao

(Nanjing Institute of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003)

**Abstract**    The analysis of frequency pulling phenomena occurred in mutual inductive coupling oscillator under a sinewave signal injection by using Volterra series method is presented. The frequency pulling width is finally obtained. When the model of a system has been established, one needs only to perform algebraic operations, thereby, the complicated process of solving nonlinear differential equations is avoided.

**Key words**    Nonlinear oscillating circuit; Volterra series; Harmonic balance; Frequency pulling