

## 精确快速计算时域积分方程中奇异性积分的新方法

赵延文 徐建华 聂在平 武胜波  
(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**摘要:**该文首先利用参数坐标和广义 Duffy 坐标变换将时域电场积分方程(TDEFIE)的奇异性积分转换成非奇异性积分,然后根据时间基函数的特点将该积分转换成可以快速精确计算的分区域积分。数值计算实例表明,该方法可以大幅度提高求解 TDEFIE 的后时稳定性和解的精度,而不必采用任何求平均的过程。该方法适用于任意类型的时间基函数并可方便地推广到高阶曲面拟合和高阶空间基函数情形。

**关键词:** 时域电磁散射, 时域积分方程, 时间步进算法, 奇异性积分

中图分类号: 0441

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)11-1821-04

## A New Scheme for Accurate and Efficient Evaluation of Singular Integral of Time-Domain Integral Equation

Zhao Yan-wen Xu Jian-hua Nie Zai-ping Wu Sheng-bo

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

**Abstract** In this article, the transformations of the parametric coordinates (i.e. area coordinates) and general Duffycoordinates are employed to transform the singular integrals of the Time-Domain Electric Field Integral Equation (TDEFIE) into non-singular integrals, which can be accurately and efficiently evaluated by dividing the transformed domain of integration into sub-domains. Simulation results demonstrate that this approach seems to drastically improve stability and accuracy of the numerical results without resort to any averaging processes. The proposed method is suitable to any causal temporal basis functions and can be extended to curvilinear patch and high-order spatial basis functions in a straightforward way.

**Key words** Electromagnetic transient scattering, Time-domain integral equation, Marching On in Time (MOT) method, Singular integral

### 1 引言

近年来,利用时域方法模拟电磁现象越来越受到人们的重视。在分析均匀无限大介质中的理想导体或均匀介质的表面时域散射问题时,采用时域积分方程(TDIE)方法比采用时域微分方程(TDDE)方法更具优势。这是因为 TDIE 法的未知量仅仅位于散射目标的表面; TDIE 法通过格林函数自动满足辐射条件,而不必像 TDDE 法那样需要强加吸收边界条件; TDIE 法网格色散误差小。然而,基于(MOT)算法求解 TDIE 所出现的后时不稳定性严重地阻碍了其广泛应用和发展。许多学者对改善求解 TDIE 的 MOT 算法的后时稳定性作了广泛深入的研究。针对高频成份所导致的后时不稳定性,采用空间平均或/和时间平均等滤波方法来消除高频成份

的影响<sup>[1,2]</sup>;然而,该方法可能会降低求解精度,而且当散射体的尺寸较大或几何结构复杂时失效。引入适当的损耗可以克服低频成份对后时稳定性所带来的不利影响<sup>[3]</sup>。适当选取时间基函数和采用隐式(implicit)时间步算法<sup>[4,5]</sup>以及设计适当的空间积分运算方法<sup>[6,7]</sup>也可以提高MOT算法的后时稳定性。与频域积分方程类似,采用时域混合场积分方程(TDCFIE)法可以克服内谐振所导致的不稳定性<sup>[8]</sup>。

利用MOT算法求解TDCFIE和时域磁场积分方程(TDMFIE)比求解时域电场积分方程(TDEFIE)更为稳定<sup>[8]</sup>,主要原因在于TDMFIE的奇异性积分更容易精确地计算。针对时域电场积分方程的MOT算法求解的后时不稳定性,本文利用参数坐标变换和广义Duffy坐标变换将TDEFIE的奇异

性积分变成非奇异性积分,然后利用时间基函数定义域的分域性将其转换成可以精确快速计算的形式。计算实例表明,在精确计算 TDEFIE 的奇异性积分条件下,利用 MOT 算法求解 TDEFIE 可以得到非常稳定的解。这也表明,引起 MOT 算法后时不稳定性的一个主要原因是由于在离散时域积分方程时采用了不精确的数值计算方法或不恰当的解析近似。

## 2 时域电场积分方程及其数值求解

假设  $S$  为位于均匀介质中的理想导体的表面,则瞬态入射电场  $\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r},t)$  将在理想导体表面  $S$  上产生感应电流  $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ 。利用理想导体表面上切向电场为零的边界条件,可以得到时域电场积分方程为

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}^{\text{inc}}(\mathbf{r},t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla \Phi(\mathbf{r},t) \right]_{\text{tan}}, \quad \mathbf{r} \in S \quad (1)$$

其中下标“tan”表示切向分量,  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$  和  $\Phi(\mathbf{r},t)$  分别为矢量位和标量位,并可表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-R/c)}{R} dS' \quad (2)$$

$$\Phi(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \int_{-\infty}^{t-R/c} \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}',t')}{R} dt' dS' \quad (3)$$

式中  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  表示场点  $\mathbf{r}$  和源点  $\mathbf{r}'$  之间的距离;  $\epsilon$  和  $\mu$  分别为散射体周围介质的介电常数和磁导率,而  $c$  为电磁波在其中传播的速度。

按照标准的矩量法求解过程,散射体表面采用平面三角形单元模拟,且散射体表面的感应电流密度分布  $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$  由空间基函数  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$  ( $n=1, 2, \dots, N_e$ ) 和时间基函数  $T_l(t)$  ( $l=1, 2, \dots, N_t$ ) 表示为

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{N_e} \sum_{l=1}^{N_t} I_n^l T_l(t) \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (4)$$

其中  $I_n^l$  为与时空基函数  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})T_l(t)$  相关的待求加权系数。在本文中,时间基函数  $T_l(t) = T(t-l\Delta t)$  ( $\Delta t$  为时间步长)设为三角型函数<sup>[9]</sup>,而空间基函数  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$  选为常用的矢量RWG基函数<sup>[9,10]</sup>。将式(4)代入方程(1),并且在空间上采用伽略金方法、在时间上采用点匹配方法(时间匹配点为  $k\Delta t$ ) 可将式(1)离散成矩阵方程:

$$\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{I}_k = \mathbf{V}_k^{\text{inc}} - \sum_{l'=1}^{k-1} \mathbf{M}_{l'} \cdot \mathbf{I}_{k-l'} \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{I}_k(m) = I_m^k, \quad \mathbf{V}_k^{\text{inc}}(m) = \int_{S_m} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r},t_k) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{l'}(m,n) = & \frac{\mu}{4\pi} \int_{S_m} \int_{S_n} \frac{\partial T(t)}{\partial t} \Big|_{t=l'\Delta t-R/c} \frac{\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')}{R} dS' dS \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_m} \int_{S_n} \left( \int_{-\Delta t}^{l'\Delta t-R/c} T(t') dt' \right) \frac{\nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')}{R} dS' dS \quad (7) \end{aligned}$$

式(5)就是经典时间步进算法(MOT)的基础。假设第  $(k-1)$  个时间步以前的电流已知,根据式(5)就可以计算出第  $k$  个时间步上的电流,因此可以采用递推方法求解出所需要的所有时间步上的电流。式(5)的求解可以采用迭代法或高斯消元法。

## 3 时域电场积分方程中奇异积分的精确快速计算

式(7)中的非奇异性积分可采用标准的高斯积分法来计算。当场点和源点位于同一个三角形单元上时,式(7)对源三角形单元的积分为奇异性积分。频域积分方程矩量法的奇异性积分常常采用奇异值提取法<sup>[10]</sup>, Duffy坐标变换法<sup>[11]</sup>等。由于时间基函数的存在使得奇异值提取法在时域积分方程矩量法中难以应用,并且时间基函数导数的不连续性使得高斯积分法计算剩余非奇异性部分的精度下降。下面给出了一种精确快速计算该奇异性积分的方法。奇异性积分式(7)可以写成

$$I_s = \int_T \frac{\mathcal{T}(l^*,R)}{R} F(\mathbf{r}') dS' = \sum_{e=1}^3 \int_{T_e} \frac{\mathcal{T}(l^*,R)}{R} F(\mathbf{r}') dS' \quad (8)$$

其中  $T$  表示源点  $\mathbf{r}'$  所在的平面三角形单元;  $F$  表示非奇异的任意标量或矢量函数;  $R = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|$  为场点  $\mathbf{r}_0$  ( $\mathbf{r}_0 \in T$ ) 和源点  $\mathbf{r}'$  之间的距离;而  $\mathcal{T}(l^*,R)$  表示时间基函数的时间导数或积分。在式(8)中,将三角形单元  $T$  上的积分  $I_s$  表示成了由场点  $\mathbf{r}_0$  和单元  $T$  的3个顶点  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  所确定的3个子三角形  $T_e$  ( $e=1, 2, 3$ ) 上的面积分之和(如图 1(a))。若对子三角形单元  $T_e$  ( $e=1, 2, 3$ ) 引入参数坐标  $(u_e, v_e)$  变换(如图 1(b))。

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1^e + u_e (\mathbf{r}_2^e - \mathbf{r}_1^e) + v_e (\mathbf{r}_3^e - \mathbf{r}_1^e), \quad \mathbf{r}' \in T_e \quad (9)$$

( $(\mathbf{r}_1^e, \mathbf{r}_2^e, \mathbf{r}_3^e)$  为子三角形  $T_e$  的3个顶点坐标)并对  $(u_e, v_e)$  作 Duffy 坐标变换(如图 1(c))得

$$u_e = \omega_e, \quad v_e = \omega_e x_e \quad (10)$$

( $A_e$  为子三角形  $T_e$  的面积)则积分式(8)可以写成

$$I_s = \sum_{e=1}^3 2A_e \int_0^1 \int_0^{1-\omega_e} \frac{\mathcal{T}(l^*,R)}{R_D(x_e)} F(l^*, \omega_e, x_e) d\omega_e dx_e \quad (11)$$

其中场点与源点之间的距离  $R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}'| = \omega R_D(x_e)$ , 且

$$R_D(x_e) = \left| (\mathbf{r}_2^e - \mathbf{r}_1^e) + x_e (\mathbf{r}_3^e - \mathbf{r}_2^e) \right| \quad (12)$$

由于  $R_D(x_e)$  始终不为零,积分式(11)为非奇异性积分。积分式(11)中对  $x_e$  的外层积分可采用一维辛普生积分法或高斯积

分法来精确计算。然而，由于  $\mathcal{T}(l^*, R)$  的不连续性以及由时间基函数的分域特性所造成的  $\mathcal{T}(l^*, R)$  在子三角形  $T_e$  的某些区域内为零，若直接采用高斯积分法来计算对  $\omega_e$  的内层积分将出现较大误差，而直接采用辛普生积分法又非常费时。若假设时间基函数  $T(t)$  定义在区间  $(-\Delta t, p_l \Delta t)$  上，考虑时间延迟有： $-\Delta t \leq l^* \Delta t - R/c \leq p_l \Delta t$ ，应用  $R = \omega R_D(x_e)$  可得

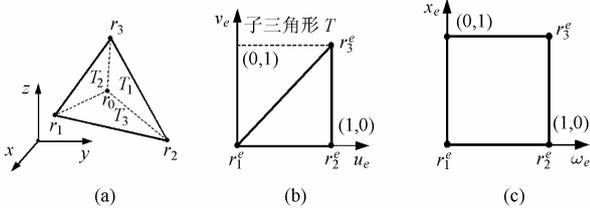


图 1

- (a) 三角形单元  $T$  被分成 3 个子三角形  $T_1, T_2$  和  $T_3$ ；
- (b) 子三角形  $T_e$  在空间  $(u_e, v_e)$  中的参数坐标表示；
- (c) 在参数坐标下的广义 Duffy 变换坐标。

$$(l^* - p_l) c \Delta t / R_D(x_e) \leq \omega_e \leq (l^* + 1) c \Delta t / R_D(x_e) \quad (13)$$

利用式(13)可将积分式(11)写成分区域的积分形式：

$$I_s = \sum_{e=1}^3 2A_e \int_0^1 \sum_{p=l^*-p_l}^{l^*} \int_{d(p, x_e)}^{d(p+1, x_e)} \frac{\mathcal{T}(l^*, R)}{R_D(x_e)} F(\omega_e, x_e) d\omega_e dx_e \quad (14)$$

若令  $d_0(p, x_e) = p c \Delta t / R_D(x_e)$ ，并考虑到  $0 \leq \omega_e \leq 1$ ，式(14)中的  $d(p, x_e)$  可以表示为

$$d(p, x_e) = \begin{cases} 0, & d_0(p, x_e) < 0 \\ d_0(p, x_e), & 0 \leq d_0(p, x_e) \leq 1 \\ 1, & d_0(p, x_e) > 1 \end{cases} \quad (15)$$

这样，关于  $\omega_e$  积分的每一个分区内，积分式(14)的被积函数总是连续变化，可以采用高斯积分法或辛普生积分法精确快速地计算出来；同时，式(14)消除了被积函数为零的积分区域，进一步减少了计算量。从上面的分析可以看出，该方法对时间基函数没有任何限制，并可方便地推广到高阶曲面拟合和高阶空间基函数情形。

#### 4 数值计算结果

在本节中，利用上节给出的方法计算 TDEFIE 的奇异性积分，而非奇异性积分的计算采用高斯积分法(如 7 点高斯积分)。下面通过计算实例来证明，精确计算时域阻抗矩阵元素(特别是自阻抗元素)是 MOT 算法稳定精确求解 TDEFIE 的关键。假定入射电场为高斯平面波：

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \frac{4}{\sqrt{\pi} T} \exp(-\gamma^2) \quad (16)$$

其中  $\gamma = 4(ct - ct_0 - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}) / T$ 。设  $\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{x}}$ ,  $ct_0 = 6 \text{ m}$ ,  $T = 4 \text{ m/c}$  而入射波的入射方向为  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ$ 。

(1) 第 1 个例子计算半径为 0.5m，中心位于原点的理想导体球的时域散射。球的表面在  $\theta$  方向上分成 8 等份，在  $\varphi$  方向分成 12 等份，球面就被分成 168 个平面三角形单元，对应于 252 个未知电流。图 2 给出了观察点(0.5m,  $90^\circ, 15^\circ$ )处感应电流密度的  $\theta$  分量和观察点(0.5m,  $78.75^\circ, 90^\circ$ )处的  $\varphi$  分量。同时，在图 2 中也给出了用频域解和逆傅里叶变换(IDFT)得到的计算结果以及基于隐式(implicit)MOT算法和时间平均技术的计算结果<sup>[1]</sup>。从图 2 可以看到，采用时间平均技术在一定程度上延迟后时不稳定性，但是时间平均等滤波方法给计算结果带来了一定的误差并且对于复杂结构目标的效果较差。本文结果与 IDFT 的结果相比却非常精确，而且时间后期也非常稳定，即使时间为  $t = 1000 \text{ ns}$  时也没有出现发散现象。

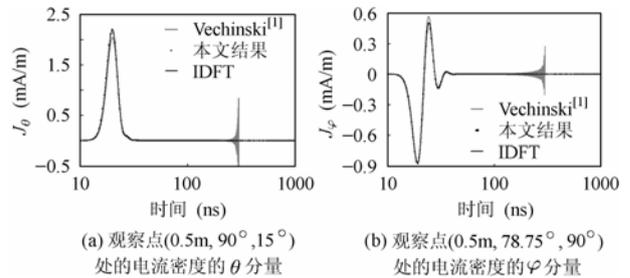


图 2 半径为 0.5m 球心位于原点的理想导体球  
电流密度随时间的变化关系

在以后的几个例子中，着重讨论本文方法的稳定性，并且时间步长分别取  $\Delta t = 0.5 \text{ ns}, 1.0 \text{ ns}, 1.5 \text{ ns}$ 。

(2) 第 2 个例子的散射体设为边长为 1.0m、中心位于坐标原点的理想导电立方体。立方体的 6 个面总共被分成 224 个平面直角三角形单元和 336 个未知电流。图 3 给出了观察点为上顶面中心 (0.0, 0.0, 0.5) m 处感应电流密度幅度的对数随时间的变化关系。从图 3 可以看到，本文方法在 3 种不同的时间步长情况下的计算结果均非常稳定，且在一定时间之后的曲线均变为几乎水平的直线、没有发散现象产生。不同时间步长到达水平段的时间以及水平段的幅值稍有不同(水平段的值与最大值之比至少小于  $10^{-5}$ )。若自阻抗矩阵元素的计算精度设为  $10^{-6}$ ，直接采用辛普生积分法计算自阻抗矩阵元素(即计算积分式(11))与采用本文方法计算自阻抗矩阵元素(即计算积分式(14))相比，前者的阻抗矩阵填充时间是后者的约 18 倍，而后面的其它例子也是在 15~20 倍之间；并且计算精度要求越高，本文方法相比越快。

(3) 第 3 个计算实例为半径为 0.96m、球心位于坐标原点的理想导电的封闭半球体。采用自动剖分软件将封闭半球体表面剖分成 320 个平面三角形单元和 480 个未知数。图 4 给出了观察点为 (-0.093867, 0.079, 0.94267)m 处感应电流密度幅度的对数值随时间的变化关系。从图 4 可看出，本文结

果在时间后期仍然非常稳定且没有发散的迹象。

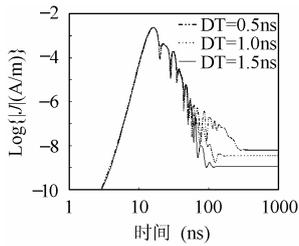


图3 边长为1.0m中心位于坐标原点的理想导电立方体电流密度随时间的变化关系:观察点为上顶面中心(0.0, 0.0, 0.5m)处电流密度的幅度

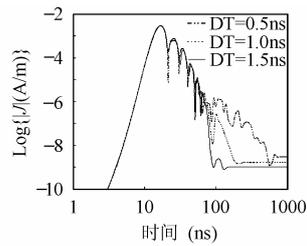


图4 半径为0.96m球心位于原点的理想导电封闭半球电流密度随时间的变化关系:观察点为(-0.093867, 0.079, 0.94267m)处电流密度的幅度值

(4) 在最后一个例子中, 假设散射目标为锥体与半球的联合体: 半球体的平面与锥体的底面重合、锥体的轴线与  $z$  轴重合且球心位于坐标原点; 球的半径为1.0 m、锥体的高为2.0 m. 该散射体表面被剖分成418个平面三角形单元和627个未知数. 图5给出了观察点为(-0.030123, 0.018-012, 1.9224m)处感应电流密度幅度的对数随时间的变化关系. 从图5可看出, 本文结果在时间后期仍然非常稳定; 而文献<sup>[12]</sup>的方法难以得到稳定的计算结果。

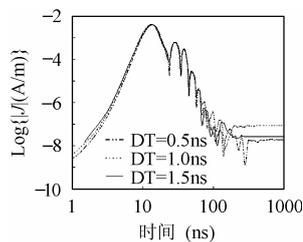


图5 高度为2m的锥体与半径为1.0m半球体的联合体(球心位于原点)的电流密度随时间的变化关系 观察点(-0.030123, 0.018012, 1.9224m)处电流密度的幅度值

## 5 结束语

本文利用参数坐标变换和广义Duffy坐标变换将时域电场积分方程的奇异性积分转换成为可以分区域精确快速计算的非奇异性积分. 数值结果证明了该方法求解时域电场积分方程的精确性和时间后期的超稳定性, 可用于分析电大目标的时域电磁散射; 同时也表明了, 时间步进算法求解时域积分方程所出现的不稳定性主要是由于没有精确计算时域阻抗矩阵元素(特别是自阻抗元素)的结果。

## 参考文献

[1] Vechinski D, Rao S M. A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape. *IEEE Trans. on AP*, 1992, AP-40(6): 661 – 665.

- [2] Davies P J, Duncan D B. Averaging techniques for time-marching schemes for retarded potential integral equations. *Appl. Numer. Math.*, 1997, 23: 291 – 310.
- [3] Weile D S, Pisharody G, Chen N W, Shanker B, Michielssen E. A novel schemes for the solution of the time domain integral equations of electromagnetics. *IEEE Trans. on AP*, 2004, 52(1): 283 – 295.
- [4] Manara G, Monorchio A, Reggiannini R. A space-time discretization criterion for a stable time-marching solution of the electric field integral equation. *IEEE Trans. on AP*, 1997, AP-45(3): 527 – 532.
- [5] Hu J L, Chan C H. A new temporal basis function for the time-domain integral equation method. *IEEE Wireless Components Letters*, 2001, 11(11): 465 – 466.
- [6] Bluck M J, Walker S P. Time-domain BIE analysis of large three-dimensional electromagnetic scattering problems. *IEEE Trans. on AP*, 1997, 45(5): 894 – 901.
- [7] Lu M, Michielssen E. Closed form evaluation of time domain fields due to Rao-Wilton-Glisson sources for use in matching-on-in-time based EFIE solvers. *IEEE APS Int. Symp. Dig.*, San Antonio, 2002: 74 – 77.
- [8] Shanker B, Ergin A A, Aygun K, Michielssen E. Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field integral equation. *IEEE Trans. on AP*, 2000, AP-48(7): 1064 – 1074.
- [9] Rao S M, Wilton D R. Transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape. *IEEE Trans. on AP*, 1991, AP-39(1): 56 – 61.
- [10] Graglia R D. On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on a plane triangle. *IEEE Trans. on AP*, 1993, AP-41(10): 1448 – 1455.
- [11] Duffy M G. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1982, 19(6): 1260 – 1262.
- [12] Vechinski D A, Rao S M, Sarkar T K. Transient scattering from three-dimensional arbitrary shaped dielectric bodies. *J. Opt. Soc. Amer. A, Opt. Image Sci.*, 1994, 11(4): 1458 – 1470.

赵延文: 男, 1965年生, 副教授, 研究兴趣为计算电磁学、非均匀介质中的场与波、电磁散射与逆散射等。

徐建华: 男, 1962年生, 教授, 博士生导师, 研究兴趣为微波技术、电磁场理论、计算电磁学等。

聂在平: 男, 1946年生, 教授, 博士生导师, 副校长, IEEE高级会员, 研究兴趣为计算电磁学、电磁散射与逆散射、非均匀介质中的场与波、移动通信中的智能天线技术等。

武胜波: 男, 1980年生, 硕士生, 研究兴趣为计算电磁学、电磁散射等。