

单载波频域均衡与多载波 OFDM 误码性能的理论比较

刘谦雷 杨绿溪

(东南大学无线电工程系 南京 210096)

摘要: 单载波频域均衡(SC-FDE)和多载波正交频分复用(OFDM)是数字通信中用于克服多径衰落的两种技术。本文通过理论推导对这两种技术在高斯白噪声通信信道中的误码性能进行了比较。利用高斯分布尾部概率的数值变化特性,本文推导出如下结论:在低信噪比条件下,OFDM 的误码性能略优于 SC-FDE,而在高信噪比条件下,SC-FDE 则能取得显著优于 OFDM 的误码性能。这一结论对于通信系统的设计具有重要的参考价值。

关键词: 单载波频域均衡, OFDM, 误码性能

中图分类号: TN911.2

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)03-0411-04

Theoretical Comparison of BER Performance between Single-Carrier Frequency-Domain Equalization and Multi-carrier OFDM

Liu Qian-lei Yang Lü-xi

(Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract Single-Carrier Frequency-Domain Equalization (SC-FDE) and multi-carrier Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) are two techniques to combat multipath fading in digital communications. This paper compares the BER performances of them for white Gaussian noise channel theoretically. By the value-changing property of Gaussian distribution's tail probability, the following conclusion is drawn: OFDM is a little better than SC-FDE in BER performance for low Signal-to-Noise Ratio (SNR), while SC-FDE greatly outperforms OFDM for high SNR. This conclusion is significant to the design of the communication system for its important reference value.

Key words SC-FDE, OFDM, BER performance

1 引言

在无线数字通信系统中,为了克服信号的多径衰落,人们提出了正交频分复用(OFDM)^[1]和单载波频域均衡(SC-FDE)^[2,3]技术。从基带信号处理的角度来看,这两种技术的共同之处是:它们均通过对数据帧加入循环前缀来进行数据传输,并且都使用 FFT 和 IFFT 变换来进行基带信号处理;而它们的不同之处则在于:OFDM 系统分别在发射端和接收端进行 IFFT 和 FFT 变换和相应的处理,而 SC-FDE 则只在接收端进行这些变换和处理;这两种技术在基带信号处理上具有相同的实现复杂度。但在射频传输上,两者却在原理和实现成本上存在很大的差异:OFDM 系统采用多个子载波来进行信号传输,存在着发射功率峰均比大和由于子载波的频偏而带来的载波间干扰等问题,而采用 SC-FDE 则将意味着射频系统成本的大幅降低。

对于具有相同基带信号处理实现复杂度和不同射频系

统实现成本的 SC-FDE 和 OFDM 系统,它们在误码性能上的差异是通信系统的设计者关注的一个重要问题,对此,人们已经作出了一些研究。参考文献[4,5]均通过仿真实验比较了这两个系统的误码性能,并考察了信道编码等因素对两者误码性能的影响。文献[4,5]的仿真结果表明,两者在误码性能上是相近的。

本文的目的是通过理论推导来对 SC-FDE 与 OFDM 系统的性能作出比较。利用高斯分布尾部概率的数值变化特性,本文对高斯白噪声通信信道推导和比较了这两种技术的误码性能,并得出了如下结论:在低信噪比条件下,OFDM 的误码性能略优于 SC-FDE,而在高信噪比条件下,SC-FDE 则取得了显著优于 OFDM 的误码性能。这一结论对于数字通信系统的设计具有重要的参考价值。本文还给出了一个 SC-FDE 和 OFDM 系统误码性能比较的仿真实验。

本文第 2 节推导了 SC-FDE 和 OFDM 系统在信号判决处的信噪比,第 3 节基于高斯分布尾部概率的特性,由 SC-FDE

和 OFDM 在信号判决处不同的信噪比特性推导出了它们误码性能的差异,第4节给出了一个 SC-FDE 和 OFDM 误码性能比较的仿真实验,第5节作出了本文的结论。

2 SC-FDE 和 OFDM 系统在信号判决处的信噪比

SC-FDE 和 OFDM 基带系统框图如图1所示。设多径信道的径数为 L , 其各径系数分别为: $h_0, h_1, \dots, h_{L-1}$, 信道噪声为零均值高斯白噪声, 其每一项的实部和虚部方差均为 $N_0/2$, 通信系统采用长为 $(N+L)$, 其中循环前缀长度为 L 的数据帧来传送数据。下面计算 OFDM 系统和 SC-FDE 系统在信号判决处的信噪比。

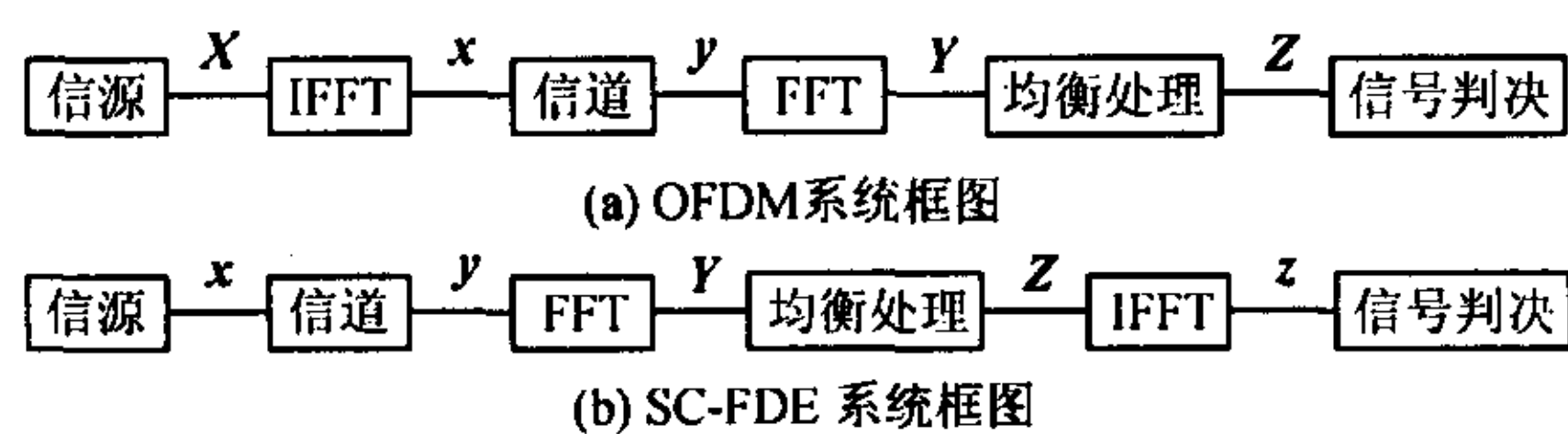


图1 OFDM 和 SC-FDE 基带系统框图

对于图1所示的 OFDM 和 SC-FDE 系统, 我们可以得到丢弃循环前缀后的发射数据帧 x 和接收数据帧 y 之间存在如下关系:

$$y = Hx + n \quad (1)$$

其中, n 为 $N \times 1$ 高斯随机噪声, H 为 $N \times N$ 循环矩阵, 其可进一步分解为

$$H = F^{-1} \Omega F \quad (2)$$

式中, $F = \frac{1}{\sqrt{N}} (f_k)_{N \times N} = \frac{1}{\sqrt{N}} (e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-1)(l-1)})_{N \times N}$, $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$, 而序列 $\{\omega_k\}_{k=1,2,\dots,N}$ 是长为 N 的序列 $\{h_0, h_1, \dots, h_{L-1}, 0, \dots, 0\}$ 的 DFT 变换。将式(2)代入式(1)两边同乘以 F , 可以得到:

$$Y = \Omega X + N \quad (3)$$

式中, Y, X 分别为 y, x 的 DFT 变换, 而 $N = Fn$ 。

对于 OFDM 系统, 由于 Y 中的每一项均已与源序列 X 中的对应项成简单的线性关系, 因此, 可对其先作如下处理, 然后作出判决:

$$Z = \Omega^{-1} Y = X + \Lambda N = X + M \quad (4)$$

式中, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \text{diag}(\omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}, \dots, \omega_N^{-1})$, 而 $M = (M_k)_{N \times 1}$ 为 OFDM 系统在信号判断处的噪声, 其可进一步表示为

$$M = \Lambda N = \Lambda F n \quad (5)$$

将式(5)的右边展开, 并利用 n 为零均值高斯白噪声, 且其每一项的实部和虚部方差均为 $N_0/2$, 可计算得到:

$M_k (k=1, 2, \dots, N)$ 仍为零均值复高斯变量, 其方差为

$$\text{Var}\{M_k\} = |\lambda_k|^2 N_0 \quad (6)$$

且其实部和虚部的方差仍相等:

$$\text{Var}\{M_k^R\} = \text{Var}\{M_k^I\} = \frac{N_0}{2} |\lambda_k|^2 \quad (7)$$

式中上标 R, I 分别表示随机变量的实部和虚部。

设 OFDM 系统每一子信道的信号均采用相同的调制方式, 其实部和虚部的平均能量均为 $\varepsilon/2$, 则可得到在该系统的信号判决处, 其第 k 路子信道的信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{OFDM}}(k) = \frac{\varepsilon}{N_0 |\lambda_k|^2} \quad (8)$$

对于 SC-FDE 系统, 为了使最后通过 IFFT 在时域得到的信号 z 与发送信号 x 构成简单的线性关系, 而不包含信号间的干扰, 可对式(3)得到的 Y 作迫零均衡:

$$Z = \Omega^{-1} Y = X + \Omega^{-1} N = X + \Lambda N \quad (9)$$

进而得到 SC-FDE 系统在信号判决处的输入信号为

$$z = F^{-1} Z = x + F^{-1} \Lambda F n = x + m \quad (10)$$

式中 $m = (m_k)_{N \times 1}$ 为 SC-FDE 系统在信号判决处的噪声。利用与 OFDM 系统中相同的计算过程, 可以计算得到: $m_k (k=1, 2, \dots, N)$ 仍为零均值、实虚部等方差的复高斯变量, 其方差为

$$\text{Var}\{m_k\} = N_0 \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\lambda_k|^2 \quad (11)$$

和

$$\text{Var}\{m_k^R\} = \text{Var}\{m_k^I\} = \frac{N_0}{2N} \sum_{k=1}^N |\lambda_k|^2 \quad (12)$$

由于该噪声方差与传输数据在数据帧中的位置无关, 因此可得 SC-FDE 系统每一个传输数据在信号判决处的信噪比均为

$$\text{SNR}_{\text{SC-FDE}} = \frac{\varepsilon}{\frac{N_0}{N} \sum_{k=1}^N |\lambda_k|^2} \quad (13)$$

从式(6)、(7)和式(11)、(12)可以看出, 对于一个数据帧的数据而言, SC-FDE 系统和 OFDM 系统在信号判决处判决噪声的总能量是相同的, 不同的是, 在 OFDM 系统中, 这种噪声随传输数据在数据帧中位置的不同而不同, 而在 SC-FDE 系统中, 该噪声则对数据帧中的每一个传输数据都是相同的。式(8)和式(13)则表明了由此而产生的两者在判决信噪比上的差异。正是由于这种差异, 导致了 SC-FDE 与 OFDM 系统不同的误码性能。

3 SC-FDE 与 OFDM 误码性能比较

在信道噪声为高斯噪声的通信系统中, 若发射信号采用各种常用的调制方式^[6], 则其误码率的计算^[6]均可归结为对一个标准正态分布尾部概率的计算:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (14)$$

其中积分下限 x 是一个与信号判决处信号噪声幅度比相关

的量。误码率的计算公式因系统采用二进制调制和多进制调制而有所不同。对于二进制调制信号,信号判决产生的误码率可一般性地表示为

$$P_e = Q(A\sqrt{\text{SNR}}) \quad (15)$$

式中, $\sqrt{\text{SNR}}$ 为系统在信号判决处的信号噪声幅度比, A 为与二进制调制信号在信号空间中的距离特性有关的参数。而当系统采用多进制调制时,系统的误码率则可以一般性地表示为其所对应二进制调制的误码率 $Q(A\sqrt{\text{SNR}})$ 的函数的形式:

$$P_e = W(Q(A\sqrt{\text{SNR}})) \quad (16)$$

其中, $W(x)$ 为增函数,并且有 $W(Q(A\sqrt{\text{SNR}}))$ 与 $Q(A\sqrt{\text{SNR}})$ 在数值上属同一数量级。 $W(x)$ 可能没有显式的解析表达式。

下面我们来考察当两个 $A\sqrt{\text{SNR}}$ 值存在显著的大小差异时它们的尾部概率之间会有什么样的关系。为了表述上的清晰,在下面关于尾部概率 $Q(A\sqrt{\text{SNR}})$ 的比较中,我们引入符号 $\gg$ 和 $\ll$ 分别表示前一个值数量级地大于或小于后一个值,而符号 $>$ 和 $<$ 则表示两个具有相同数量级的数值之间的大小关系。

高斯分布尾部概率 $Q(A\sqrt{\text{SNR}})$ 在区间 $[0, 5]$ 的特性曲线如图 2 所示,从该曲线可以看出:当信噪比较低,而使得尾部概率 $Q(A\sqrt{\text{SNR}})$ 较大 ($\geq 10^{-1}$) 时,若存在某个 $A\sqrt{\text{SNR}}_2$ 显著大于 $A\sqrt{\text{SNR}}$, 则有 $Q(A\sqrt{\text{SNR}}_2) \ll Q(A\sqrt{\text{SNR}})$; 而若存在某个 $A\sqrt{\text{SNR}}_1$ 显著小于 $A\sqrt{\text{SNR}}$, 则只有 $Q(A\sqrt{\text{SNR}}_1) > Q(A\sqrt{\text{SNR}})$; 当信噪比较高,而使得 $Q(A\sqrt{\text{SNR}})$ 较小 ($\leq 10^{-2}$) 时,若存在某个 $A\sqrt{\text{SNR}}_1$ 显著小于 $A\sqrt{\text{SNR}}$, 即有 $Q(A\sqrt{\text{SNR}}_1) \gg Q(A\sqrt{\text{SNR}})$ 。正是高斯分布尾部概率的这一特性,导致了 SC-FDE 和 OFDM 在帧平均误码率上的差异。

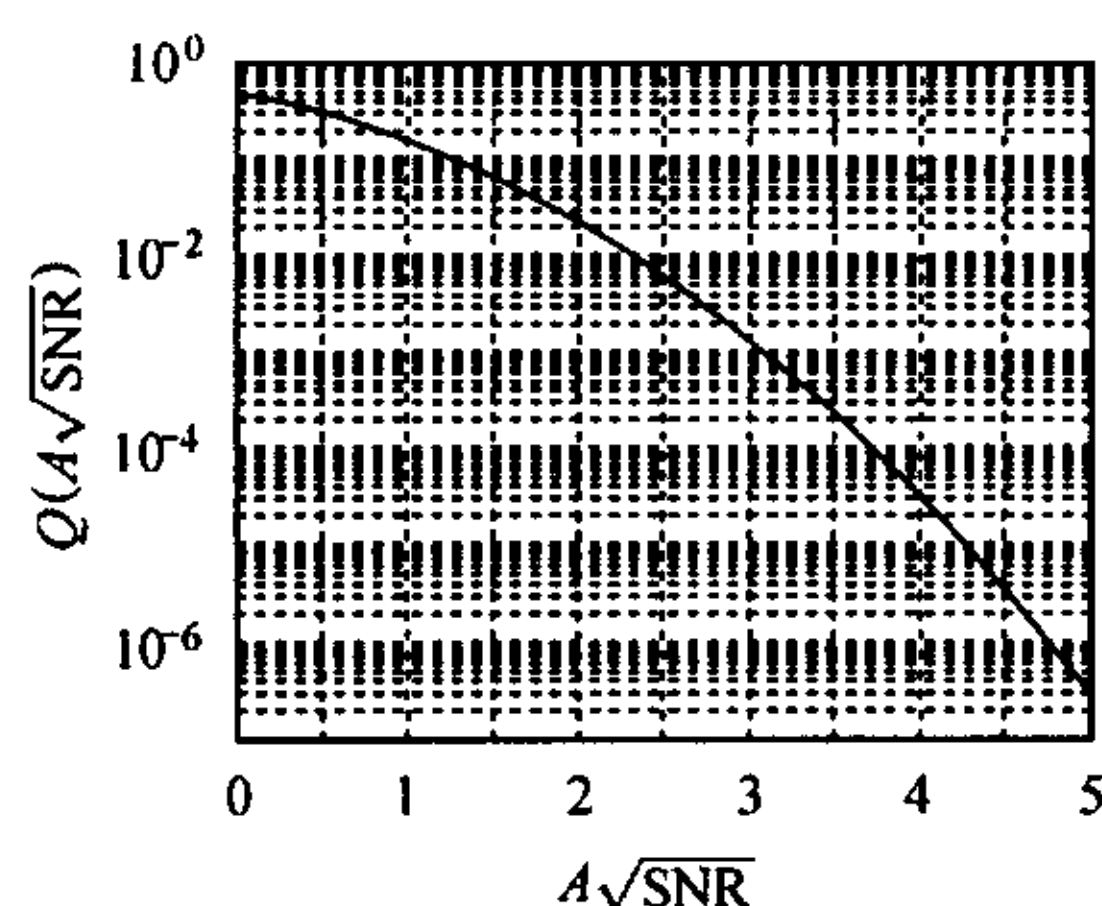


图2 高斯分布尾部概率的特性曲线图

首先对采用二进制调制的系统来进行 SC-FDE 和 OFDM 帧平均误码率的比较。

OFDM 用于均衡处理的参数 $\{\lambda_k\}_{k=1,2,\dots,N}$ 根据其 $\overline{|\lambda|^2} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\lambda_k|^2$ 的大小关系可分为 3 类: (1) λ_{k_1} , $|\lambda_{k_1}|^2$ 显著大于 $\overline{|\lambda|^2}$, 对应子信道的误码性能差于 SC-FDE 的平均误码

性能; (2) λ_{k_2} , $|\lambda_{k_2}|^2$ 显著小于 $\overline{|\lambda|^2}$, 对应子信道的误码性能优于 SC-FDE 的平均误码性能; (3) λ_{k_3} , $|\lambda_{k_3}|^2$ 等于或非常接近于 $\overline{|\lambda|^2}$, 它们对 OFDM 与 SC-FDE 误码性能的比较不产生影响或影响很小。

先考虑判决信噪比较小,而使得 $Q(A\sqrt{\text{SNR}_{\text{SC-FDE}}})$ 较大 ($\geq 10^{-1}$) 的情形。在 OFDM 检测中,对于满足 $|\lambda_{k_1}|^2$ 显著大于 $\overline{|\lambda|^2}$ 的 λ_{k_1} , 存在 $\sqrt{\text{SNR}_{\text{OFDM}}(k_1)}$ 显著小于 $\sqrt{\text{SNR}_{\text{SC-FDE}}}$, 因而有

$$Q(A\sqrt{\text{SNR}_{\text{OFDM}}(k_1)}) > Q(A\sqrt{\text{SNR}_{\text{SC-FDE}}}) \quad (17)$$

而对于满足 $|\lambda_{k_2}|^2$ 显著小于 $\overline{|\lambda|^2}$ 的 λ_{k_2} , 则有 $\sqrt{\text{SNR}_{\text{OFDM}}(k_2)}$ 显著大于 $\sqrt{\text{SNR}_{\text{SC-FDE}}}$ 和

$$Q(A\sqrt{\text{SNR}_{\text{OFDM}}(k_2)}) \ll Q(A\sqrt{\text{SNR}_{\text{SC-FDE}}}) \quad (18)$$

注意到 $Q(A\sqrt{\text{SNR}_{\text{SC-FDE}}})$ 即为 SC-FDE 系统的帧平均误码率,而对 OFDM 的一个数据帧而言,其平均误码率的数量级将由式(17)所对应的那些误码率的数量级所决定,而与式(18)所对应的那些误码率则将减小 OFDM 帧平均误码率数量级前的系数。于是,由式(17)、(18)可得:在低信噪比条件下,采用二进制调制的 OFDM 系统的帧平均误码率与相应的 SC-FDE 系统的帧平均误码率具有相同的数量级,但在数值上略小于后者。

再考虑判决信噪比较大,而使得 $Q(A\sqrt{\text{SNR}_{\text{SC-FDE}}})$ 较小 ($\leq 10^{-2}$) 的情形。在 OFDM 的检测中,对于满足 $|\lambda_{k_1}|^2$ 显著地大于 $\overline{|\lambda|^2}$ 的 λ_{k_1} , 存在 $\sqrt{\text{SNR}_{\text{OFDM}}(k_1)}$ 显著小于 $\sqrt{\text{SNR}_{\text{SC-FDE}}}$ 和

$$Q(A\sqrt{\text{SNR}_{\text{OFDM}}(k_1)}) \gg Q(A\sqrt{\text{SNR}_{\text{SC-FDE}}}) \quad (19)$$

由于 OFDM 系统的帧平均误码率的数量级由式(19)所对应的误码率的数量级所决定,于是可以得到,在高信噪比条件下,采用二进制调制的 OFDM 系统的帧平均误码率将在数量级上大于相应的 SC-FDE 系统的帧平均误码率。

由以上对于二进制调制系统的结论和式(16)所示的二进制调制与多进制调制误码率之间的关系,可进一步得到:对于采用多进制调制的 SC-FDE 和 OFDM 系统,两者的误码性能也存在上述类似的大小关系。

由此,我们得到,对于一般的 SC-FDE 和 OFDM 系统,均有以下结论成立:在低信噪比条件下,OFDM 系统的误码性能略优于 SC-FDE 系统,而在高信噪比条件下,SC-FDE 则能取得显著地优于 OFDM 的误码性能。

4 仿真比较

下面给出一个对 16 径信道的 SC-FDE 与 OFDM 误码性能比较的仿真实验。信道各径系数的选择满足表 1 所示的平

均功率条件, SC-FDE 和 OFDM 源序列采用 16QAM 信号, 其数据帧长度为 256, 并通过加入长为 16 的循环前缀进行传输。在仿真中, 我们由 Matlab 产生出一组个数为 16 的复高斯随机数, 将其乘以与表 1 相对应的幅度衰减后作为信道的抽头系数来进行实验。图 3 示出了仿真实验的结果。

从仿真实验的结果可以看出: 在信噪比较低, 通信系统误码率较大($\geq 10^{-1}$)条件下, OFDM 的误码率略好于 SC-FDE 的误码率; 而在信噪比较高, 通信系统误码率较小($\leq 10^{-2}$)条件下, SC-FDE 则取得了显著优于 OFDM 的误码性能。这一实验结果验证了本文推导出的结论。

表 1 多径信号在各径的平均功率

路径下标	0	1	2	3	4	5	6	7
平均功率 (dB)	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-14
路径下标	8	9	10	11	12	13	14	15
平均功率 (dB)	-16	-18	-20	-22	-24	-26	-28	-30

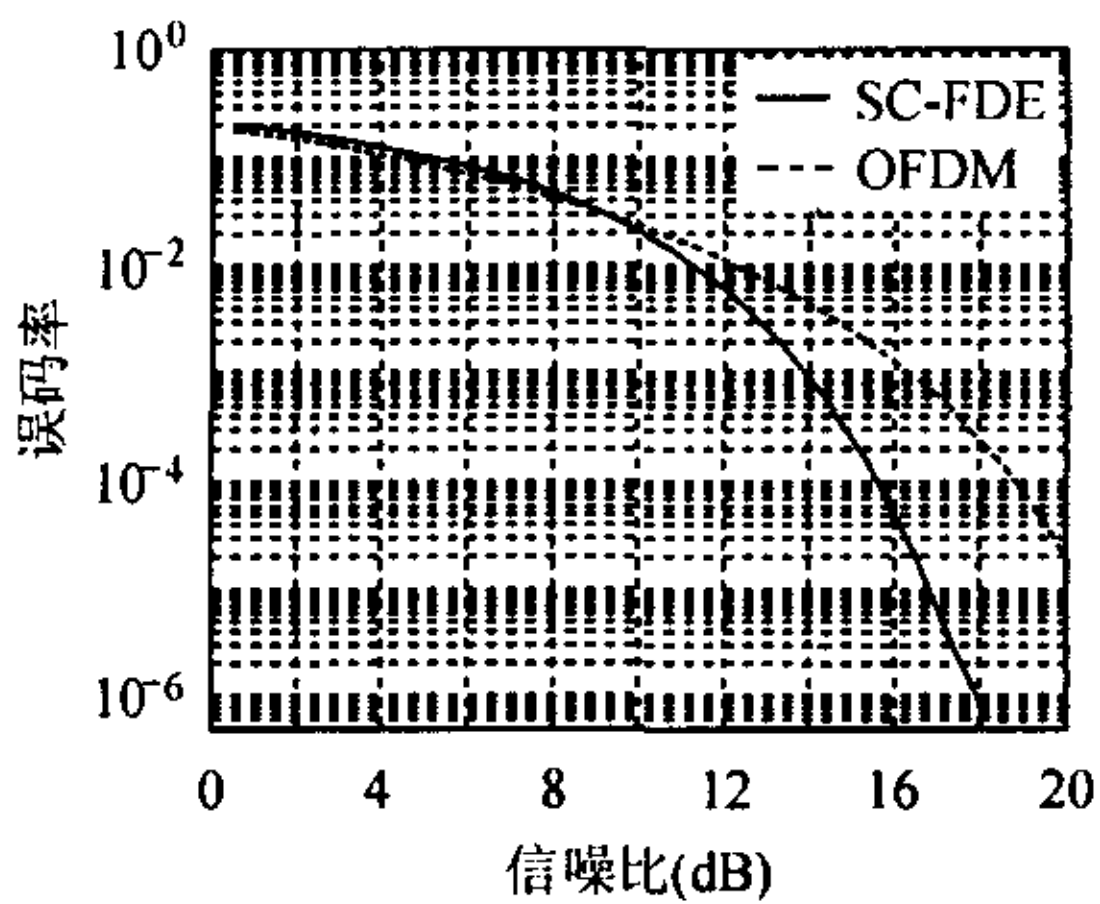


图 3 SC-FDE 与 OFDM 误码性能比较的仿真实验结果

5 结论

本文对信道噪声为高斯白噪声的多径信道, 推导和比较了 SC-FDE 和 OFDM 这两种技术的误码性能, 并得出了如下结论: 在信噪比较低, 通信系统误码率较大($\geq 10^{-1}$)条件下, OFDM 的误码性能略好于 SC-FDE; 而在信噪比较高, 通信系统的误码率较小($\leq 10^{-2}$)条件下, SC-FDE 则取得了显著优于 OFDM 的误码性能。这一结论对于 SC-FDE 和 OFDM 技术的应用和实际通信系统的设计具有重要的参考价值。

参 考 文 献

[1] Cimini L J. Analysis and simulation of a digital mobile channel using orthogonal frequency division multiplexing. *IEEE Trans. on Communications*, 1985, 33(7): 665–675.

[2] Falconer D, Ariyavisitakul S L, et al.. Frequency domain equalization for single-carrier broadband wireless systems. *IEEE Communications Magazine*, 2002, 40(4): 58–66.

[3] Al-Dhahir N. Single-carrier frequency-domain equalization for space-time block-coded transmissions over frequency-selective fading channels. *IEEE Communications Letters*, 2001, 5(7): 304–306.

[4] Dinis G R, et al.. Comparison of two modulation choices for broadband wireless communications. *IEEE VTC 2000-Spring, Tokyo*, 2000: 1300–1305.

[5] Carron G , Deneire L, et al.. Comparison of two modulation techniques using frequency domain processing in interference limited home networks. *IEEE International Conference on Consumer Electronics, Los Angeles*, 2000: 296–297.

[6] Proakis J G . *Digital Communications*(3rd edition). New York: McGraw-Hill, 1995: 257–284.

刘谦雷: 男, 1967 年生, 工程师, 博士生, 主要研究方向: 通信信号处理、空时信号处理、视频信号处理。

杨绿溪: 男, 1964 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向: 数字信号/图像处理、盲信号处理、神经智能信息处理以及移动通信中的空时信号处理。