

一类随机动态过程基于 q 阶树的多尺度建模方法

文成林*** 张延锋** 史军杰**

*(杭州电子科技大学自动化学院 杭州 310018)

** (河南大学计算机与信息工程学院 开封 475001)

摘 要: 利用多尺度随机模型能建立处理问题有效并行算法的这一优势, 提出一类随机动态过程基于一般 q 阶树的多尺度建模方法。首先, 利用 Markov 过程的条件独立性给出一类过程基于 q 阶树的多尺度表示方法; 其次, 基于 q 阶树多尺度表示和具体实例推导出多尺度模型中的状态转移矩阵、扰动阵、初始状态和相应的协方差矩阵等的具体形式, 为具有 Markov 统计特性的过程或信号建立起多尺度随机模型, 这将为有效地解决多源同类信息和多源异类信息的数据融合等实际问题提供了理论基础; 最后, 给出一类 Gauss-Markov 过程基于三阶树和五阶树多尺度表示的计算机仿真结果, 进一步验证建立模型的实用性和有效性。

关键词: 多尺度随机模型, q 阶树, Markov 过程, 多尺度表示

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)06-0908-06

A q^{th} -order Tree-based Method for Multiscale Modeling of Stochastic Dynamic Processes

Wen Cheng-lin*** Zhang Yan-feng** Shi Jun-jie**

*(College of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

** (College of Computer and Information Engineering, Henan University, Kaifeng 475001, China)

Abstract In this paper, by using the advantage of an extremely efficient and highly parallelizable algorithm deriving from the multiscale stochastic model to deal with a lot of practical problem, a general q^{th} -order tree-based method for multiscale modeling of stochastic dynamic processes is developed. Firstly, using the property of conditional independence of Markov processes, a q^{th} -order tree-based method for multiscale representation of a class of process is presented. Secondly, the representation forms of the parameters in the model, such as the state transition matrix, the disturbance matrix, the initial state and the corresponding covariance are deduced by example in detail based on q^{th} -order tree multiscale representation. Accordingly, the multiscale stochastic models are constructed for the signals or processes that have Markovian, which in turn provides the theory basis for effectual solution of the practical problems, such as multiple homogenous and heterogeneous information data fusion. Finally, the results of multiscale representation based on the third and the fifth order tree for a class of Gauss-Markov process are presented by computer simulation. Thus, the practicability and the validity of the modeling are further validated.

Key words Multiscale stochastic model, q^{th} -order tree, Markov process, Multiscale representation

1 引言

在自然界和工程实践中, 许多现象(或过程)都具有多尺度特征(或多尺度效应), 同时, 人们对现象(或过程)的观察(或测量)往往也是在不同尺度(分辨级)上进行的; 因此, 用多尺度系统理论来描述、分析这些现象(或过程)将是十分自然的,

它能够很好地表征这些现象(或过程)的本质特性, 所以, 近年来它受到许多学科领域内众多科学工作者的高度重视^[1-10]。与之相关的随机过程的多尺度表示方法和处理算法的研究也已成为众多领域中研究的热点问题之一, 这是因为利用这种方法可以在不同尺度上得到所研究现象(或过程)的多尺度统计特性, 进而获得处理该问题有效的并行多尺度迭代算

2004-04-20 收到, 2004-10-08 改回

国家自然科学基金(60374020), 国家自然科学基金重点项目, 河南省杰出青年科学基金(0312001900), 河南省高校杰出科研人才创新工程项目(2002KYCX007)和河南省国际合作项目基金(0446650006)资助课题

法。而实现上述目的关键是要建立起现象(或过程)的多尺度动态模型,它是获取具有多尺度特征的数据分析或信号处理问题的一种重要方式。目前,多尺度建模技术已在众多领域里得到广泛应用,成功地解决了这些领域内的许多问题,如图像去噪、边界检测、纹理分类、图像分割和网络交通建模等问题^[2,3,5]。

由于生物、化学、电子、机械和经济等许多现象(或过程)均具有马尔可夫(Markov)性,而用 Markov 模型分析或处理这些现象不仅简单,而且还能现象(或过程)的多尺度建模技术提供模型框架^[3],因此,经常用它来处理检测、参数辨识、状态估计、控制和排队系统等统计推理现象和系统设计问题。结合 Markov 性质建立起来的多尺度随机模型具有很多优势^[2-5]:不仅可以较容易地建立起多尺度表示模型,而且还可以借用时间动态系统估计理论中估计和滤波方法,建立起多尺度系统中相应的融合估计算法。文献[3]利用中点偏离的思想给出了 Brown 运动过程基于二阶树多尺度表示,它为有效地解决受噪声污染信号的重构、多源信息的多尺度数据融合、瞬时信号检测和定位等实际问题提供了有力的理论依据。但是,在实际应用中却不能灵活地调节并行层和个别处理器计算量之间的动态分配问题^[3];另外,在实际中由于观测器具有不同的性质和不同的采样率,如异步采样^[9,10],因此,需要建立随机过程基于一般情况下的多尺度模型以适应不同的问题需求。基于上述原因,本文将给出一类随机过程基于 q 阶树的一般多尺度建模方法,推算出多尺度表示模型中有关参数(矩阵)的具体形式,并给出相应的计算机仿真结果。

2 基于树(结构)上多尺度随机模型

多尺度模型与众多领域中所应用的具有 Markov 性质的许多模型和相应算法之间有着密切的联系,如马尔可夫随机场(Markov Random Fields, MRF's)、因子稀疏矩阵、时间序列的递归建模、多网格算法及逆问题的多尺度求解等^[2]。多尺度模型可分为线性的、线性高斯的及非线性的等3种形式,本节主要考虑线性多尺度高斯模型,原因在于:一方面它在实际中有着广泛地应用;另一方面,当涉及更多节点时,应用它将会得到简单有效的计算算法。

所谓的道路是指:有向图形中任意两节点之间的连线。如果在一个有向图形中,树上的任一节点都与 $(q+1)$ 条道路相连,那么这样的树就是 q 阶树。图1就是一个 q 阶树。用 $s = (m(s), n(s))$ 表示树上的一个节点,其中 $m(s) \in \{0, 1, \dots, N\}$

表示对应节点 s 所在的尺度, $n(s)$ 表示在尺度 $m(s)$ 上节点 s 所处的位置。在不混淆的情况下,用 m 表示节点 s 所在的尺度, n 表示尺度 m 上节点 s 所处的位置。定义 $\bar{r}$ 为树上节点 s 的向上平移算子, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ 为 q 个向下平移算子,这样 $s\bar{r}$ 就表示节点 s 的父节点,而 $s\alpha_1, s\alpha_2, \dots, s\alpha_q$ 表示节点 s 的 q 个子节点。树上根节点处的状态用 x_0 表示, $m=0$ 表示最粗尺度, $m=N$ 表示最细尺度。

对定义在给定 q 阶树上的 n 维随机过程 $x(t)$, 节点 s 处的状态 $x(s)$ 与它的子节点 $s\alpha_i$ ($i=1, 2, \dots, q$)处的状态 $x(s\alpha_i)$ 之间的(尺度递归)动态关系一般描述为^[2,3]

$$x(s\alpha_i) = \Phi(s\alpha_i)x(s) + \Gamma(s\alpha_i)w(s\alpha_i) \quad (1)$$

其中

$$w(s\alpha_i) \sim N[0, I], \quad x_0 \sim N[0, P_0], \quad E\{x_0 w^T(s\alpha_i)\} = 0 \quad (2)$$

在式(1)中, $\Phi(s\alpha_i)$ 是描述父节点 s 与子节点 $s\alpha_i$ 之间的动态关系的状态转移矩阵; $\Gamma(s\alpha_i)$ 是扰动矩阵; $w(s\alpha_i)$ 是系统建模误差;并且树上根节点处的初始状态 x_0 与建模误差 $w(s\alpha_i)$ 不相关。当 $w(s\alpha_i)$ 是高斯白噪声时,模型(1)就是线性高斯模型^[2]。

式(1)可进一步表示为父节点 s 与所有子节点 $s\alpha = (s\alpha_1, s\alpha_2, \dots, s\alpha_q)$ 间的动态关系:

$$x(s\alpha) = \Phi(s\alpha)x(s) + \Gamma(s\alpha)w(s\alpha) \quad (3)$$

其中

$$x(s\alpha) = [x^T(s\alpha_1) \quad x^T(s\alpha_2) \quad \dots \quad x^T(s\alpha_q)]^T \quad (4)$$

$$\Phi(s\alpha) = [\Phi^T(s\alpha_1) \quad \Phi^T(s\alpha_2) \quad \dots \quad \Phi^T(s\alpha_q)]^T \quad (5)$$

$$\Gamma(s\alpha) = [\Gamma^T(s\alpha_1) \quad \Gamma^T(s\alpha_2) \quad \dots \quad \Gamma^T(s\alpha_q)]^T \quad (6)$$

$$w(s\alpha) = [w^T(s\alpha_1) \quad w^T(s\alpha_2) \quad \dots \quad w^T(s\alpha_q)]^T \quad (7)$$

模型(3)反映了具有多尺度特性的随机过程在相邻尺度间的动态关系,应用它可以得到处理过程或信号的高度有效、并行、迭代多尺度估计算法^[2,3,5]。

在建立多尺度模型的过程中,关键的问题是确定模型中的各个参数。因此,下面的主要工作是:(1)给出 Markov 过程基于 q 阶树的多尺度表示方法;(2)如何确定式(3)中的状态转移矩阵 $\Phi(s\alpha)$ 和扰动阵 $\Gamma(s\alpha)$? (3)如何给出初始状态 x_0

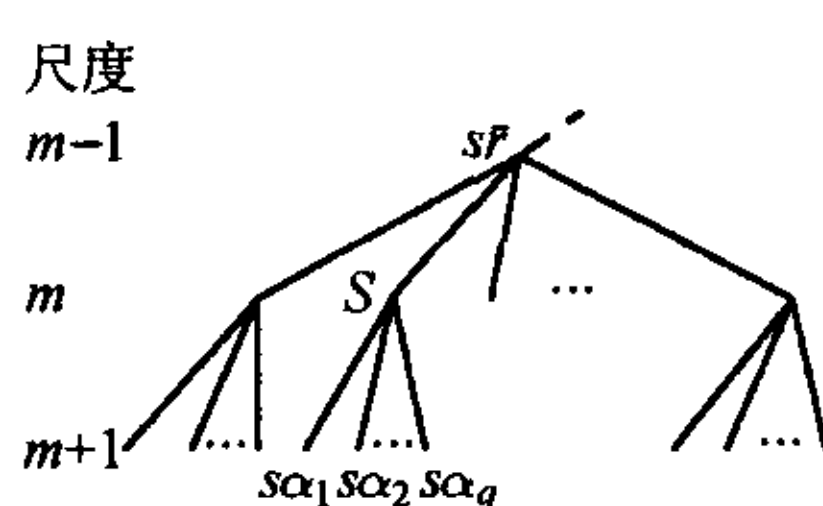


图1 q 阶树, 每个父节点都有 q 个子节点

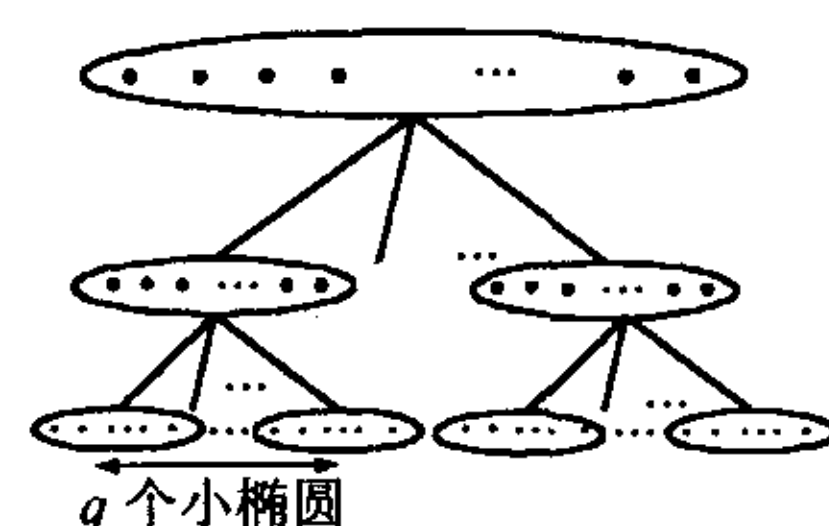


图2 q 阶树多尺度表示示意图, 每个椭圆内有 $(q+1)$ 点

和相应的协方差矩阵 P_0 ?

由于要建立的多尺度模型式(3)是以尺度(或分辨率)为变量、定义在树上的 Markov 过程, 因此需要简单介绍一下 Markov 过程的基本概念。

定义 Markov 过程^[3]

对于随机过程 $\{z(t), t \in T\}$, 当 $t_1 < t_2 < t_3$, $t_k \in T$, ($k=1,2,3$) 时, 若有

$$P_{z(t_3)|z(t_1), t_1 \leq t_2}(Z_{t_3} | Z_{t_1}, t_1 \leq t_2) = P_{z(t_3)|z(t_2)}(Z_{t_3} | Z_{t_2}) \quad (8)$$

则称 $\{z(t)\}$ 是 Markov 过程。

3 Markov 过程基于 q 阶树的多尺度表示方法

文献[3]利用中点偏离的思想给出了单位区间上基于二阶树产生 Brown 运动过程的多尺度表示方法, 本小节的主要工作是给出一般 Markov 随机过程 $z(t)$ 基于一般 q 阶树的多尺度表示方法, 其思想是: 在随机过程 $z(t)$ 所定义区间 $[T_1, T_2]$ 的 $(q-1)$ 个等分点处进行偏离; 也就是说, 首先将区间 $[T_1, T_2]$ 等分成为 q 个子区间, 即 $[T_1, T_2] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{q-1}, t_q]$ (其中 $t_0 = T_1$, $t_q = T_2$), 随后在点 t_j ($j=1,2,\dots, q-1$) 处进行偏离, 依次在各子区间内重复此过程, 从而得到 Markov 过程基于 q 阶树的多尺度表示, 如图 2 所示。

此种多尺度表示方法主要由两步组成:

(1) 利用联合概率分布确定树上最粗尺度上的状态, 并把它作为多尺度模型式(3)的初始值 x_0 ;

(2) 计算父子节点间的条件转移概率密度函数 $p(x(s) | x(s\bar{r}))$ 。

为了方便陈述, 这里仅讨论定义在单位区间 $[0,1]$ 上的 Markov 过程 $z(t)$ 基于 q 阶树的多尺度表示方法。

首先, 从联合概率分布中选取一个状态, 并把它作为多尺度模型式(3)的初始状态

$$x_0 = [z(0) \dots z(j/q) \dots z(1)]^T \quad (9)$$

其中, $z(t)$ 在节点 (j/q) 处的概率分布是由 $z(0)$ 和 $z(1)$ 的条件分布来确定

$$P_{z(j/q)|z(0), z(1)}(Z_{j/q} | Z_0, Z_1), \quad j=1,2,\dots,q-1 \quad (10)$$

为进一步简化概率分布的计算量, 可假设 $z(t)$ 是一个独立增量过程, 且 $z(0)=0$, 从而, 当 $t_1 < t_2$ 时, 它有统计特性:

$$z(t_2) - z(t_1) \sim N[0, I(t_2 - t_1)] \quad (11)$$

于是

$$z(j/q) = ((q-j)/q) \times z(0) + (j/q) \times z(1) + e(j) \quad (12)$$

其中, $e(j)$ 作为随机偏离项, 有统计特性:

$$e(j) \sim N[0, I(1/q)] \quad (13)$$

其次, 将单位区间等分为 q 个子区间, 即 $[0,1] = [0,1/q]$

$\cup [1/q, 2/q] \cup \dots \cup [(q-1)/q, 1]$, 对每个子区间 $[(i-1)/q, i/q]$ ($i=1,2,\dots,q$), 分别在其内等间距插入 $(q-1)$ 个点, 于是就得到 $z(t)$ 基于 q 阶树在尺度 1 上的表示:

$$x_1 = [x(1,1) \ x(1,2) \ x(1,3) \ \dots \ x(1,q)]^T \quad (14)$$

其中

$$x(1,i) = [z((i-1)/q) \ \dots \ z((i-1)/q + j/q^2) \ \dots \ z(i/q)]^T \quad (15)$$

而 $z(t)$ 在子区间 $[(i-1)/q, i/q]$ ($i=1,2,\dots,q$) 上每个节点 $((i-1)/q + j/q^2)$ ($j=1,2,\dots,q-1$) 处的概率分布是由过程 $z(t)$ 在本子区间上的边界 $(i-1)/q$ 与 i/q 处的值的条件分布确定:

$$P_{z((i-1)/q + j/q^2)|z((i-1)/q), z(i/q)}(Z_{((i-1)/q + j/q^2)} | Z_{(i-1)/q}, Z_{i/q}) \quad (16)$$

依次重复上述过程, 就可以得到 $z(t)$ 基于 q 阶树在尺度 m ($m=2,3,\dots,N$) 上的表示

$$x_m = [x(m,1) \ x(m,2) \ x(m,3) \ \dots \ x(m,q^m)]^T \quad (17)$$

其中

$$x(m,n) = [z((n-1)/q^m) \ \dots \ z((n-1)/q^m + j/q^{m+1}) \ \dots \ z(n/q^m)]^T \quad (18)$$

$z(t)$ 所对应的新插值点 $(n-1)/q^m + j/q^{m+1}$ ($n=1,2,\dots,q^m$, $j=1,2,\dots,q-1$) 处的概率分布是由过程 $z(t)$ 在子区间 $[(n-1)/q^m, n/q^m]$ 上的边界 $(n-1)/q^m$ 和 n/q^m 处的值的条件分布确定:

$$P_{z((n-1)/q^m + j/q^{m+1})|z((n-1)/q^m), z(n/q^m)}(Z_{((n-1)/q^m + j/q^{m+1})} | Z_{(n-1)/q^m}, Z_{n/q^m}) \quad (19)$$

由于所考虑的过程 $z(t)$ 是一个 Markov 过程, 因此, 在已知尺度 $(m-1)$ 上多尺度表示 x_{m-1} 的条件下, 尺度 m 上的多尺度表示 x_m 中状态 $x(m,n_1)$ 的 $(q-1)$ 个新点处的值与同一尺度上的另一状态 $x(m,n_2)$ 的 $(q-1)$ 个新点处的值是相互独立的, 即

$$\begin{aligned} E \left\{ z((n_1-1)/q^m + j_1/q^{m+1}), \left[z((n_2-1)/q^m + j_2/q^{m+1}) \right] x_{m-1} \right\} \\ = E \left\{ z((n_1-1)/q^m + j_1/q^{m+1}) \mid x_{m-1} \right\} \\ \times E \left\{ z((n_2-1)/q^m + j_2/q^{m+1}) \mid x_{m-1} \right\}, \\ j_1, j_2 = 1, 2, \dots, (q-1), \quad n_1, n_2 = 1, 2, \dots, q^m \quad \text{且} \quad n_1 \neq n_2 \quad (20) \end{aligned}$$

并且各状态变量在新插值点 $(n-1)/q^m + j/q^{m+1}$ 处的随机偏离项也是独立的, 即

$$\begin{aligned} E \left\{ e((n_1-1)/q^m + j_1/q^{m+1}) e((n_2-1)/q^m + j_2/q^{m+1}) \right\} \\ = E \left\{ e((n_1-1)/q^m + j_1/q^{m+1}) \right\} \\ \times E \left\{ e((n_2-1)/q^m + j_2/q^{m+1}) \right\}, \\ j_1, j_2 = 1, 2, \dots, q-1, \quad n_1, n_2 = 1, 2, \dots, q^m \quad \text{且} \quad j_1 \neq j_2 \quad (21) \end{aligned}$$

注意:式(17)中,状态 $x(m,n)$ 和 $x(m,n+1)$ ($n=1,2,\dots,q^m-1$)都包含了过程 $z(t)$ 在子区间边界处的值 $z(n/q^m)$,说明所产生的 q 阶树是有冗余的,即对于状态 x_m ,虽然它共包含 $(q+1)\times q^m$ 个点,但不重复的点仅有 $(q^{m+1}+1)$ 个。

4 一类 Gauss-Markov 过程基于 q 阶树多尺度表示方法

根据第3节中介绍的一般 Markov 过程基于 q 阶树的多尺度表示方法,本节通过例子来描述模型式(3)中的状态转移阵 $\Phi(s\alpha)$ 、扰动阵 $\Gamma(s\alpha)$ 、初始状态 x_0 和相应协方差矩阵 P_0 的确定方法和具体形式。为此,考虑如下给出的一类 Gauss-Markov 过程^[3]:

$$\dot{z}(t) = F_t z(t) + G_t v(t), \quad t \in [0,1] \quad (22)$$

且具有如下统计特性:

$$z(0) \sim N[0, P_z(0)], \quad E\{v(t)v^T(\tau)\} = I\delta(t-\tau), \quad E\{v(t)z^T(0)\} = 0 \quad (23)$$

状态协方差阵 $P_z(t) \triangleq E\{z(t)z^T(t)\}$ 满足:

$$\dot{P}_z(t) = F_t P_z(t) + P_z(t) F_t^T + G_t G_t^T \quad (24)$$

$$P_z(t) = C(t,0)P_z(0)C(t,0)^T + \int_0^t C(t,\tau)G_\tau G_\tau^T C(t,\tau)^T d\tau \quad (25)$$

其中 $C(t,\tau)$ 是满足:

$$\dot{C}(t,\tau) = F_t C(t,\tau), \quad C(t,t) = I \quad (26)$$

的任意两点 t,τ 间的状态转移阵。

4.1 确定多尺度递归的初始状态 x_0

在单位区间内等间距地插入 $(q-1)$ 个点, $t_j (1 \leq j \leq q-1)$, $t_0=0, t_q=1$, 在给定 $z(t_0)$ 和 $z(t_q)$ 的条件下, 确定过程 $z(t)$ 在 t_j 处的条件期望和相应的误差协方差矩阵分别为

$$\hat{z}_{t_j|t_0,t_q} = E\{z(t_j) | z(t_0), z(t_q)\} \quad (27)$$

$$P_{t_j|t_0,t_q} = E\left\{ [z(t_j) - \hat{z}_{t_j|t_0,t_q}][z(t_j) - \hat{z}_{t_j|t_0,t_q}]^T \right\} \quad (28)$$

由于

$$P_{z(t_j)|z(t_0),z(t_q)}(Z_{t_j} | Z_{t_0}, Z_{t_q}) = N[Z_{t_j}; \hat{z}_{t_j|t_0,t_q}, P_{t_j|t_0,t_q}] \quad (29)$$

所以有^[3]

$$\hat{z}_{t_j|t_0,t_q} = \begin{bmatrix} P_z(t_0)C^T(t_j,t_0) \\ C(t_q,t_j)P_z(t_j) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} P_z(t_0) & P_z(t_0)C^T(t_q,t_0) \\ C(t_q,t_0)P_z(t_0) & P_z(t_q) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(t_0) \\ z(t_q) \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$P_{t_j|t_0,t_q} = P_z(t_j) - \begin{bmatrix} P_z(t_0)C^T(t_j,t_0) \\ C(t_q,t_j)P_z(t_j) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} P_z(t_0) & P_z(t_0)C^T(t_q,t_0) \\ C(t_q,t_0)P_z(t_0) & P_z(t_q) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_z(t_0)C^T(t_j,t_0) \\ C(t_q,t_j)P_z(t_j) \end{bmatrix} \quad (31)$$

于是得到随机过程 $z(t)$ 基于 q 阶树在0尺度上的表示, 即多尺度模型递归的初始状态 x_0 :

$$x_0 = [z(0) \ z(1/q) \ z(2/q) \ \dots \ z(1)]^T \quad (32)$$

4.2 确定最粗尺度上多尺度递归初始状态 x_0 的协方差矩阵 P_0

P_0

由式(2)可知:

$$P_0 \equiv E\{[x_0 - E\{x_0\}][x_0 - E\{x_0\}]^T\} = E\{x_0 x_0^T\} = \begin{bmatrix} P_z(0) & P_z(0)C^T(1/q,0) & \dots \\ C(1/q,0)P_z(0) & P_z(1/q) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ C((q-1)/q,0)P_z(0) & C((q-1)/q,1/q)P_z(1/q) & \dots \\ C(1,0)P_z(0) & C(1,1/q)P_z(1/q) & \dots \\ P_z(0)C^T((q-1)/q,0) & P_z(0)C^T(1,0) & \\ P_z(1/q)C^T((q-1)/q,1/q) & P_z(1/q)C^T(1,1/q) & \\ \vdots & \vdots & \\ P_z((q-1)/q)P_z((q-1)/q) & C^T(1,(q-1)/q) & \\ C(1,(q-1)/q)P_z((q-1)/q) & P_z(1) & \end{bmatrix} \quad (33)$$

4.3 确定由父节点 s 处状态 $x(s)$ 到子节点 $s\alpha$ 处状态 $x(s\alpha)$ 的状态转移阵 $\Phi(s\alpha)$

假定我们已得到过程 $z(t)$ 基于 q 阶树在尺度 m ($m=1,2,\dots,N-1$)上的表示为

$$x_m = [x(m,1) \ x(m,2) \ x(m,3) \ \dots \ x(m,q^m)]^T \quad (34)$$

其中

$$x(m,n) = [z((n-1)/q^m) \ z((n-1)/q^m + 1/q^{m+1}) \ \dots \ z(n/q^m)]^T, \quad n=1,2,\dots,q^m \quad (35)$$

那么, $z(t)$ 基于 q 阶树在尺度 $(m+1)$ 上的表示为

$$x_{m+1} = [x(m+1,1) \ x(m+1,2) \ \dots \ x(m+1,q^{m+1})]^T \quad (36)$$

根据 q 阶树的多尺度表示方法, 对应尺度 $m+1$ 上的状态 $x((m+1),n')$, ($n'=(n-1)q+i$)为

$$x((m+1),n') = [z((n'-1)/q^{m+1}) \ z((n'-1)/q^{m+1} + 1/q^{m+2}) \ \dots \ z(n'/q^{m+1})]^T \quad (37)$$

若 $x(s) = x(m,n)$ 表示 q 阶树上节点 s 处的状态, 则它所对应的 q 个子节点 $\{s\alpha_i\}$ 状态为

$$x(s\alpha_i) \triangleq x(m+1, (n-1)q+i) = x(m+1, n') \quad (38)$$

即

$$x(s\alpha_i) = [z((n'-1)/q^{m+1}) \ z((n'q-q+1)/q^{m+2}) \ \dots \ z((n'q-1)/q^{m+2}) \ z(n'/q^{m+1})]^T \quad (39)$$

这样, 多尺度模型(3)的状态转移阵 $\Phi(s\alpha)$ 中的各个分量 $\Phi(s\alpha_i)$, ($i=1,2,\dots,q$)可通过式(30)得到。当 $(n'/q) \bmod q = (i-1)$ 时, 节点 $s\alpha_i = (m+1, n')$ 所对应状态转移阵 $\Phi(s\alpha_i)$ 为

$$\Phi(s\alpha_i) = \begin{bmatrix} e_i \\ K_1 e_i + K_2 e_{i+1} \\ K_3 e_i + K_4 e_{i+1} \\ \vdots \\ K_{2(q-1)-i} e_i + K_{2(q-1)} e_{i+1} \\ e_{i+1} \end{bmatrix}_{(q+1) \times (q+1)} \quad (40)$$

其中

$$e_i = \underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]}_{\substack{\text{第}i\text{个元素为}1 \\ 1 \times (q+1)}} \quad (41)$$

式(40)中 $\Phi(s\alpha_i)$ 的参数 K_{2j-1}, K_{2j} 可通过如下方程计算:

$$\begin{aligned} K_{2j-1} = & C(t_j, t_0) + C(t_j, t_0)P_z(t_0)C^T(t_q, t_0)(P_z(t_q) \\ & - C(t_q, t_0)P_z(t_0)C^T(t_q, t_0))^{-1}C(t_q, t_0) \\ & - P_z(t_j)C^T(t_q, t_j)(P_z(t_q) \\ & - C(t_q, t_0)P_z(t_0)C^T(t_q, t_0))^{-1}C(t_q, t_0) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} K_{2j} = & -C(t_j, t_0)P_z(t_0)C^T(t_q, t_0)(P_z(t_q) \\ & - C(t_q, t_0)P_z(t_0)C^T(t_q, t_0))^{-1} \\ & + P_z(t_j)C^T(t_q, t_j)(P_z(t_q) \\ & - C(t_q, t_0)P_z(t_0)C^T(t_q, t_0))^{-1} \end{aligned} \quad (43)$$

式(42)~(43)中, $t_0 = (n'-1)/q^{m+1}$, $t_j = (n'q - q + j)/q^{m+2}, \dots$,
 $t_q = n'/q^{m+1}$, $j=1, 2, \dots, q-1$.

5 确定扰动阵 $\Gamma(s\alpha)$

多尺度模型式(3)中的扰动阵 $\Gamma(s\alpha)$ 中的各个分量 $\Gamma(s\alpha_i)$ 可由式(31)确定

$$\Gamma(s\alpha_i) \equiv [0 \ J_1 \ J_2 \ \dots \ J_{q-1} \ 0]^T \quad (44)$$

其中 J_j 是满足

$$J_j J_j^T = P_{t_j|t_0, t_q}, \quad j=1, 2, \dots, q-1 \quad (45)$$

的任一矩阵。

5 例子与仿真

对式(22)所示的随机过程 $z(t)$, 当 $F_i = 0$, $C(t, \tau) = 1$ 时, 模型式(22)就退化为

$$\dot{z}(t) = G_t v(t), \quad t \in [0, 1] \quad (46)$$

且有 $P_z(t) = t$ 时, 相对由式(30), (31)给出的 $\hat{z}_{t_j|t_0, t_q}$ 和 $P_{t_j|t_0, t_q}$ 的具体形式分别为

$$\hat{z}_{t_j|t_0, t_q} = \frac{t_q - t_j}{t_q - t_0} z(t_0) + \frac{t_j - t_0}{t_q - t_0} z(t_q) \quad (47)$$

$$P_{t_j|t_0, t_q} = \frac{(t_j - t_0)(t_q - t_j)}{t_q - t_0}, \quad j=1, 2, \dots, q-1 \quad (48)$$

通过对式(48)的计算就得到式(40)中的状态转移矩阵 $\Phi(s\alpha_i)$ 的具体形式:

$$\Phi(s\alpha_i) = \begin{bmatrix} e_i \\ \frac{q-1}{q}e_i + \frac{1}{q}e_{i+1} \\ \frac{q-2}{q}e_i + \frac{2}{q}e_{i+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{q}e_i + \frac{q-1}{q}e_{i+1} \\ e_{i+1} \end{bmatrix}_{(q+1) \times (q+1)} \quad (49)$$

相应的扰动阵 $\Gamma(s\alpha_i)$

$$\Gamma(s\alpha_i) \equiv [0 \ 2^{-m(s)} \ 2^{-m(s)} \ \dots \ 2^{-m(s)} \ 0]^T \quad (50)$$

初始状态 x_0 和相应的协方差矩阵 P_0 分别为

$$x_0 = [z(0) \ z(1/q) \ z(2/q) \ \dots \ z(1)]^T \quad (51)$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 1/q & \dots & 1/q & 1/q \\ 0 & 1/q & 2/q & \dots & 2/q & 2/q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1/q & 2/q & \dots & (q-1)/q & (q-1)/q \\ 0 & 1/q & 2/q & \dots & (q-1)/q & 1 \end{bmatrix}_{(q+1) \times (q+1)} \quad (52)$$

根据过程式(46)基于 $q(=5)$ 阶树进行多尺度建模, 得到模型式(3)中的状态转移阵 $\Phi(s\alpha)$, 当 $n' \bmod 5 = (i-1)$ 时, 有

$$\Phi(s\alpha) \equiv \Phi(m+1, n') = \Phi(s\alpha_i), \quad i=1, 2, 3, 4, 5 \quad (53)$$

其中

$$\Phi(s\alpha_i) = \begin{bmatrix} e_i \\ \frac{4}{5}e_i + \frac{1}{5}e_{i+1} \\ \frac{3}{5}e_i + \frac{2}{5}e_{i+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{5}e_i + \frac{4}{5}e_{i+1} \\ e_{i+1} \end{bmatrix}_{(q+1) \times (q+1)} \quad (54)$$

扰动阵 $\Gamma(s\alpha)$ 中各个子节点对应的扰动阵 $\Gamma(s\alpha_i)$ 为

$$\begin{aligned} \Gamma(s\alpha_i) &= \Gamma(m+1, n') \\ &= [0 \ 2^{-(m+3)/2} \ 2^{-(m+3)/2} \ 2^{-(m+3)/2} \ 2^{-(m+3)/2} \ 0]^T \end{aligned} \quad (55)$$

基于 5 阶树多尺度递归的初始状态 x_0 和相应的协方差阵 P_0 分别为

$$x_0 = [z(0) \ z(1/5) \ z(2/5) \ z(3/5) \ z(4/5) \ z(1)]^T \quad (56)$$

$$P_0 = E\{x_0 x_0^T\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

这样在进行多尺度表示中, 所选取的状态初始值 $x(0)$ 可为

$$x(0) = [0 \ 1/5 \ 2/5 \ 3/5 \ 4/5 \ 1]^T \quad (58)$$

图3~8分别给出了随机过程式(46)基于3阶树和5阶树的多尺度表示仿真结果。

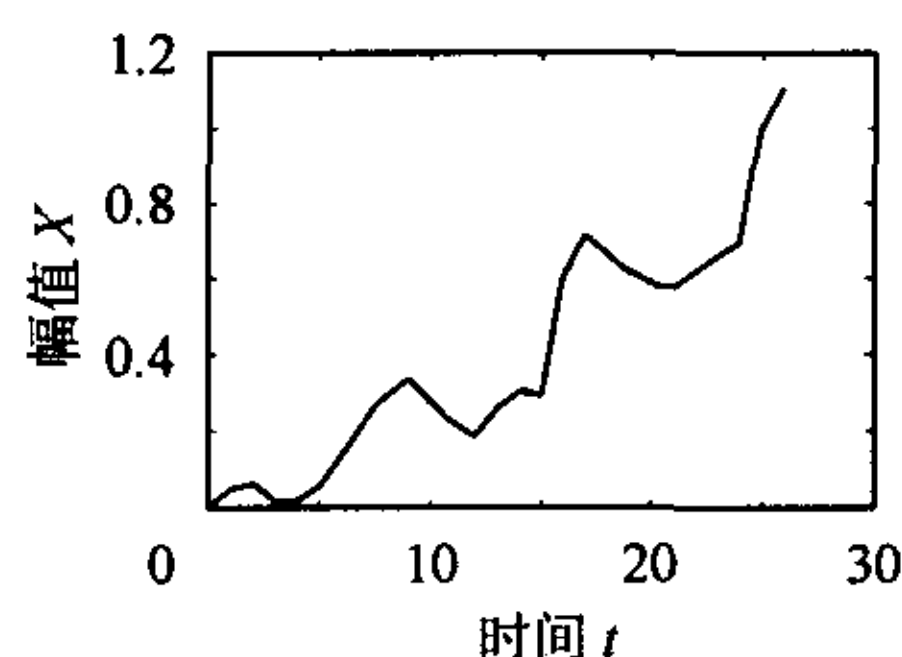


图3 随机过程式(46)基于三阶树在2尺度上的表示

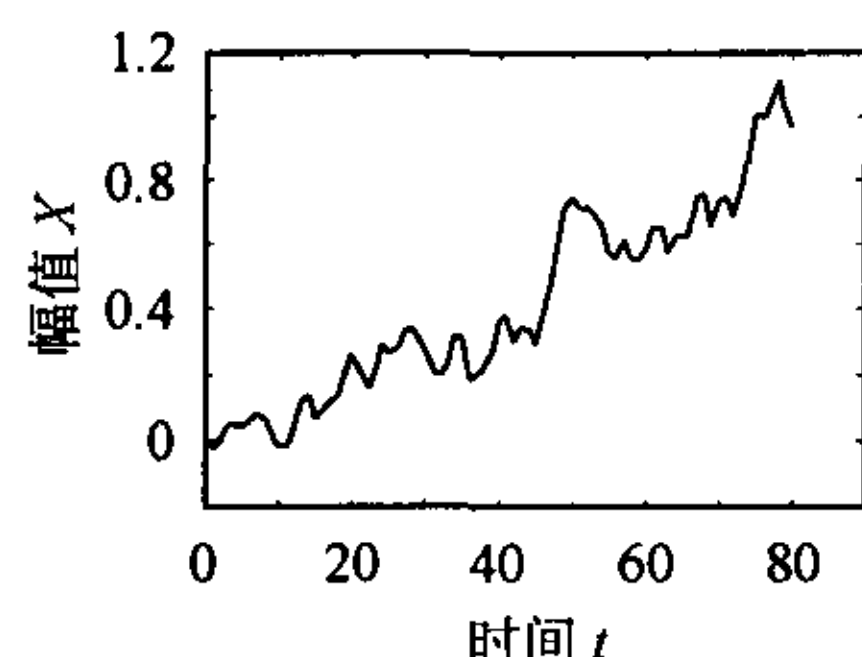


图4 随机过程式(46)基于三阶树在3尺度上的表示

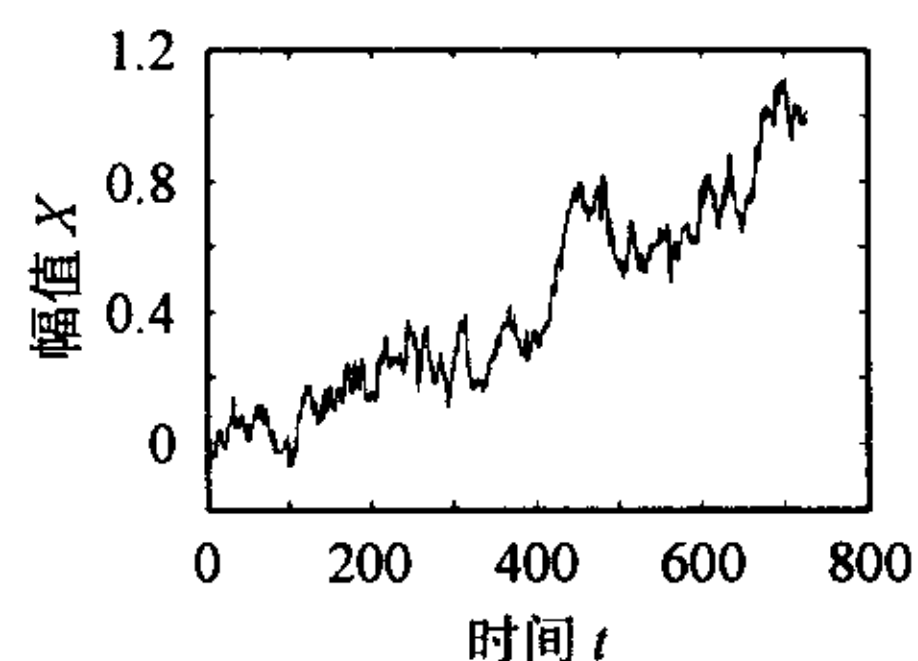


图5 随机过程式(46)基于三阶树在5尺度上的表示

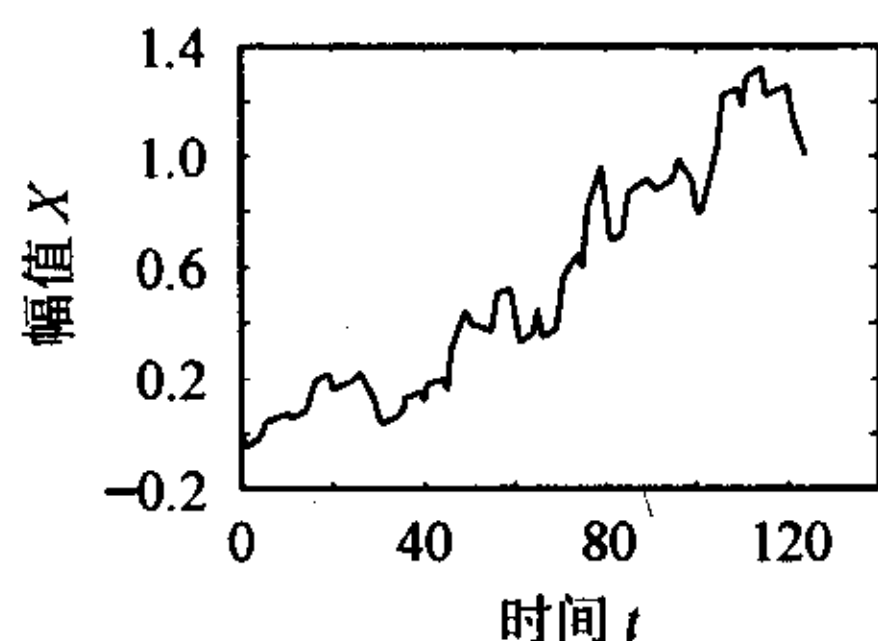


图6 随机过程式(46)基于五阶树在2尺度上的表示

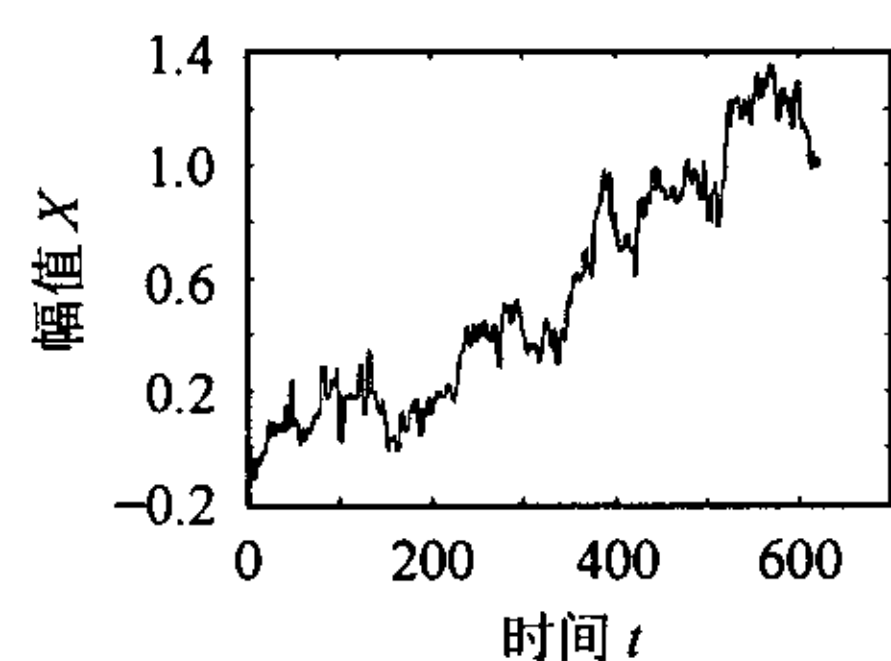


图7 随机过程式(46)基于五阶树在3尺度上的表示

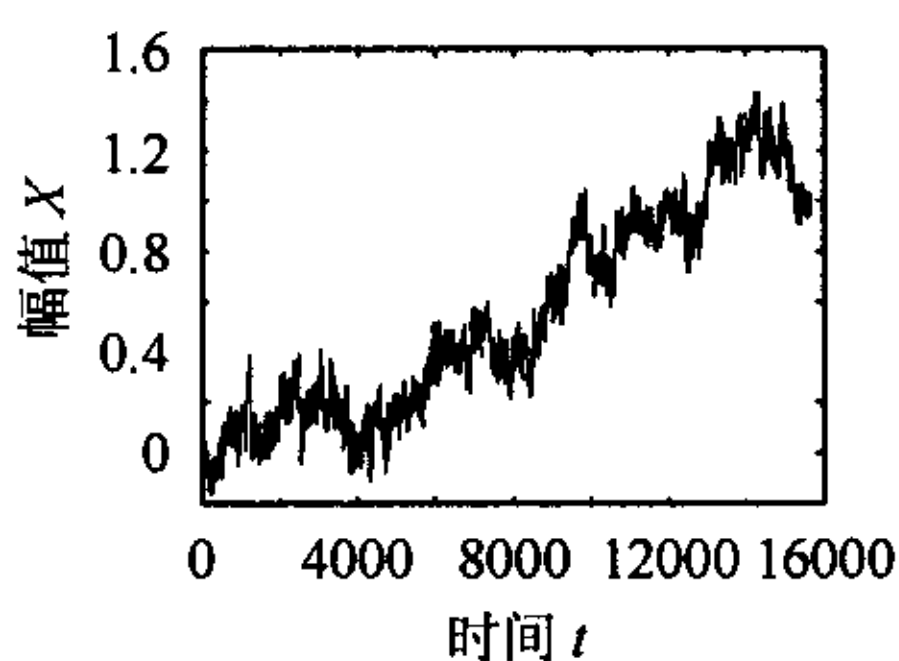


图8 随机过程式(46)基于五阶树在5尺度上的表示

6 小结与展望

本文在基于用中点偏离来构造单位区间上类似 Brown 运动信号或过程的二阶树多尺度表示的基础上,结合 Markov 过程的条件独立性,给出了一类过程基于 q 阶树的多尺度表示方法,基于 q 阶树多尺度的表示通过实例推导出多尺度模型中的状态转移矩阵、扰动阵、初始状态和相应协方差阵等参数的具体形式,最后给出了一类 Gauss-Markov 过程基于三阶树和五阶树多尺度表示计算机仿真结果。所建立的 Markov 过程基于 q 阶树的多尺度模型为有效地解决信号去噪、纹理识别等多传感器数据融合实际问题提供了理论基础;同时为灵活地调节并行层和不同处理器之间的计算量动态分配问题提供了理论依据;还为具有 Markov 性的一般随机过程提供了基于 q 阶树多尺度表示方法。针对所考虑的不同实际问题,需要建立基于树上不同阶数的信号或过程的多尺度表示,就要根据实际问题来适当地选取 q 。

在上面所描述的随机过程基于 q 阶树多尺度表示过程中,可进一步研究的工作如下:

(1) 已有的工作是在每个子区间(或子序列)内等间距地内插 $(q-1)$ 个新点,产生了 Markov 过程的多尺度表示中的新采样点,从而形成了过程基于 q 阶树更细尺度上的表示。但是,在多尺度表示过程中,对插值点的选取没有严格的要求,可以是等间距的,也可以是非等间距的,或其他形式。这些情况的建模,可为有效地解决异步数据融合等实际问题提供理论依据。

(2) 按照以上思想所产生的 q 阶树是有冗余的,为消除冗余性,可通过在每一层分割子区间(或子序列)中内插(或选取) $2(q-1)$ 个点来代替原来产生的 $(q-1)$ 个点。

(3) 在离散情况下,如果是定义在集合 $\{0,1,2,\dots,T\}$ 上的

随机序列 $z(k)$ 。若 $T \neq q^N$,则不能按照如上规则阶树进行多尺度建模。此种情况下可考虑自适应地构造 q 阶树,如在某些点处不产生偏离,或在某一尺度等分序列中选取多于 $(q-1)$ 个点等方式来进行多尺度表示。

(4) 对于高阶模型的多尺度表示可通过组合在某些点处的值来完成类似于一阶的多尺度表示。

多尺度建模是本领域研究工作的开始,建立此模型的主要目的是:在进行数据融合过程中能够很好地提供多尺度现象(或过程)在不同尺度上的动态关系或统计特性。同时,这个模型将用于数据同化和数据融合、语音学、水文学多传感器融合、过程控制、合成孔径雷达的图像分析和融合、医疗图像分析、地理系统等研究领域。另外,此多尺度表示方法也可适用于建立 2-D 随机场、无冗余的、高阶的多尺度表示等。这些问题都有待于进一步研究。

参考文献

- [1] 文成林,周东华.多尺度估计理论及其应用[M].北京:清华大学出版社,2002:184-203.
- [2] Willsky A S. Multiresolution Markov models for signal and image processing [J]. *Proc. IEEE*, 2002, 90(8): 1396-1458.
- [3] Luetgen M R. Image processing with multiscale stochastic models. [PhD], MIT, 1993.
- [4] Chou K C, Willsky A S, Benveniste A. Multiscale recursive estimation data fusion, and regularization. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1994, 39(3): 464-478.
- [5] Slatton K C. Adaptive multiscale estimation for fusing image data. [PhD], The University of Texas at Austin, 2001.
- [6] 张延锋.随机动态过程的多尺度表示方法研究.[硕士论文],开封:河南大学,2004,4.
- [7] 张延锋,葛泉波,文成林.随机动态过程基于 q 阶树的多尺度建模方法.2004 World Congress on Intelligent Control and Automation. WCICA2004: 231-235. (EI 收录)
- [8] 文成林,陈志国,闫莉萍,周东华.基于多速率传感器动态系统的多尺度递归融合估计.电子与信息学报,2003,25(3): 306-312.
- [9] 王洁,韩崇昭,李晓榕.异步传感器数据融合[J].控制与决策,2001,16(6): 877-881.
- [10] 郭徽东,章新华.多传感器异步数据融合模型分析[J].火力与指挥控制,2003,28(3): 9-11.

文成林: 男,1963年生,博士后,教授,博士生导师.主要研究方向为多尺度估计理论及其应用、信号处理与数据融合技术及应用、动态系统建模理论及其应用技术.已发表学术论文80余篇.

张延锋: 女,1977年生,硕士,研究方向为随机动态过程的多尺度建模和数据融合.