

Ridgelet 域中基于非参数自适应密度估计理论的图像去噪方法

李立^① 彭玉华^① 杨明强^① 薛佩军^②

^①(山东大学信息科学与工程学院 济南 250100)

^②(山东大学数学学院 济南 250100)

摘要 Ridgelet 是一种新的信号分析方法,它适合于具有直线或超平面奇异性的二维信号的描述,目前,针对特定大小的离散图像,又提出了正交有限 Ridgelet 变换(FRIT)。该文在有限 Ridgelet 域中,结合 Birge-Massart 等提出的非参数自适应估计理论,提出一种新的二维图像去噪方法。实验证明,这种基于 Ridgelet 与 Birge-Massart 理论的图像去噪方法,与传统的 Wavelet 域去噪以及 Donoho 阈值去噪方法相比,去噪效果更为明显。

关键词 图像去噪, Ridgelet 变换, 非参数, 自适应估计

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)12-2273-04

Image De-noising Method Based on Nonparametric Adaptive Density Estimation in Ridgelet Domain

Li Li^① Peng Yu-hua^① Yang Ming-qiang^① Xue Pei-jun^②

^①(School of Information Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250100, China)

^②(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract Ridgelet is a new signal analysis method; it is especially suitable for describing the 2-D signals which have linear or super-plane singularities. Recently, an orthonormal version of Ridgelet for discrete and finite-size images is presented, named Finite Ridgelet Transform (FRIT). In this paper, a new image de-noising method is proposed by using the threshold method based on nonparametric adaptive estimation which is presented by Birge-Massart in Ridgelet domain. Experiments show that this de-noising method represents better characteristic than traditional de-noising method in wavelet domain and the de-noising method based on Donoho strategy.

Key words Image de-noising, Ridgelet transform, Nonparametric, Adaptive estimation

1 引言

小波理论是近年来迅速发展起来的一种时频信号分析理论,它在时频域同时具有良好的局部性,并且具有可变的时频域分辨率的性质,这些特性使小波理论成为信号分析处理一种强有力的新工具,这种方法比较适合处理0维以及具有点奇异性的图像,在处理二维分段光滑信号或一维线奇异性图像时则略有不足。

为了克服小波变换在处理高维信号时的不足, Candes 和 Donoho 研究了一种新的多尺度分析方法——Ridgelet 变换^[1,2],它能有效地处理二维空间中具有线奇异性的信号,在此基础上, Do 和 Vetterli 提出了一种可逆的、正交化的有限 Ridgelet 变换(FRIT)^[3,4]。

本文使用的阈值方法基于 Birge-Massart 提出的非参数自适应密度估计理论^[5],非参数方法是为了减少参数方法可能引起的偏差而提出的,在参数方法中,一个错误的参数模型会导致很大的偏差以及错误的结论,非参数方法是通过提

供大量估计模型以达到减少偏差的目的,在非参数情况下,数据可以自适应地寻找合适的模型从而更好地描述数据,估计的结果会更加准确,从而得到更好的去噪效果。

本文在有限 Ridgelet 变换域中,基于非参数自适应密度估计理论,提出了一种新的图像去噪方法,实验表明,该方法与传统的小波域去噪以及基于 Donoho 阈值理论的去噪相比,更适合描述具有直线特征的图像,具有更为理想的去噪效果。

2 Ridgelet 变换

定义 1 $f(x)$ 在 R^2 中的连续 Ridgelet 变换(CRT)表示为

$$CRT_f(a, b, \theta) = \int_{R^2} \psi_{a,b,\theta}(x) f(x) dx \quad (1)$$

其中 $\psi_{a,b,\theta}(x) = a^{-1/2} \psi((x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - b)/a)$ 。

定义 2 设 $f(x) \in L^2(R^2)$, 则 $f(x)$ 在 R^2 中的连续 Radon 变换为

$$R_f(\theta, t) = \int_{R^2} f(x) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx \quad (2)$$

由以上定义可知, Ridgelet 变换也就是对 Radon 变换的投影进行一维小波变换^[3], 即

$$CRT_f(a, b, \theta) = \int_R \psi_{a,b}(t) R_f(\theta, t) dt \quad (3)$$

2005-05-16 收到, 2005-12-22 改回

教育部留学启动基金(2004.176.4)和山东省自然科学基金重点项目(Z2004G01)资助课题

由此可见, Ridgelet 变换的主要思想是通过 Radon 变换将线奇异性映射为点奇异性, 然后用小波变换来分析, 也就是在 Radon 变换域上的一维小波变换。

由于 Ridgelet 的射线性质, 直接对连续 Ridgelet 变换进行离散化需要涉及到极坐标中的插值或者旋转算子的问题, 而这种变换的结果将会导致冗余或者是不能完全重构, 因此, 在连续 Ridgelet 变换的基础上, 针对特定大小的离散图像, 引入了有限 Ridgelet 变换的概念。有限 Ridgelet 变换是在有限 Radon 变换域上的一维小波变换, 具体算法参考文献[3]。

3 非参数自适应估计

3.1 非参数估计

本文的去噪算法中所使用的阈值方法是基于 Birge-Massart 提出的非参数自适应密度估计理论的, 此时, 未知的概率密度函数不必属于任何一个给定的模型, 其中最佳的模型应该能够大致达到模型中估计冒险和模型与未知概率密度的距离之间的最佳平衡。当模型具有好的估计特性时(这种模型称为 Sieve), 选择合适的惩罚函数, 可以得到自适应的估计量, 这种自适应估计量能够在概率密度平滑性未知的情况下, 得到与平滑度已知时同样程度的估计。

本文中用到的估计模型的定义如下: 待估计的概率密度 s 在希尔伯特空间 $L^2(\mu)$ 中, 首先考虑 $L^2(\mu)$ 的 N_n 维的线性子空间 \bar{S}_n , 然后选择 \bar{S}_n 的子空间的集合 $\{\bar{S}_m | m \in M_n\}$, 其中每个 \bar{S}_m 都是 $L^2(\mu)$ 中 D_m 维的线性子空间, 对每个 $m \in M_n$, 有凸子集 $S_m \subset \bar{S}_m$, 一般情况下, $S_m = \bar{S}_m$, S_n 为 S_m 的并集。

本文把在其中进行非参数估计的模型定义为一系列线性 sieve S_m 的集合, 然后引入惩罚函数 $\text{pen}(m)$, 形式为 $L(m)D_m/n$, 在合理条件下, 得到的冒险可以达到 $\|s - s'_m\|^2$ 与 $L(m)D_m/n$ 之间的最佳平衡与一个常数相乘的值, 其中 s'_m 为 S_m 中对 s 的最佳估计。这是典型的偏差的平方与方差的分解形式, 其中 D_m/n 对应于 S_m 的极小极大冒险^[6], 惩罚函数通过因子 $L(m)$ 来过估计 D_m/n 是由于考虑到在大量的模型中同时进行估计可能产生的附加噪声而引入的。

3.2 自适应估计量及阈值确定方法

本文使用的自适应估计量为惩罚投影估计量, 它的定义如下^[5]:

$$\gamma_n(\tilde{s}) + \text{pen}(\tilde{m}) = \inf_{m \in M_n} \left(\inf_{t \in S_m} \gamma_n(t) + \text{pen}(m) \right), \quad \tilde{s} \in \bar{S}_m \subset S_n \quad (4)$$

可以看出, 惩罚投影估计量就是通过模型选择得到合适的估计模型 S_m , 然后在 S_m 中对 s 进行估计, 得到估计量 \tilde{s} 。这里的 $\gamma_n(t)$ 为对比函数的经验形式, 对 n 个在可测空间 \mathcal{X} 中的独立同分布的变量 X_1, \dots, X_n 进行观察, 由于使用的是投影估计量, 此时在 $\mathcal{X} \times S_n$ 空间上的对比函数定义为 $\gamma(x, t) = -2t(x) + \|t\|^2$, 它的经验形式为 $\gamma_n(t) = (1/n)$

$\cdot \sum_{i=1}^n \gamma(X_i, t)$, 此时, 在 \bar{S}_m 上求 $\gamma_n(t)$ 的极小值就相当于求 s 在 \bar{S}_m 上的投影 \hat{s}_m ^[7]。如果 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in A_m}$ 为 \bar{S}_m 中的正交基, 则有

$$\hat{s}_m = \sum_{\lambda \in A_m} \hat{\beta}_\lambda \varphi_\lambda, \quad \hat{\beta}_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_\lambda(X_i) \quad \text{且} \quad \gamma_n(\hat{s}_m) = - \sum_{\lambda \in A_m} \hat{\beta}_\lambda^2 \quad (5)$$

此处选择正交的小波基, 其中 $\varphi_{0,k}$ 为尺度函数, $j \geq 1$ 时 $\varphi_{j,k}$ 为小波函数^[5], 对于紧支集为 $(-A, A)$ 的任意函数 $t \in L^2(R, dx)$, 有:

$$t = \sum_{j \geq 0} \sum_{k=1}^{2^j M} \beta_{j,k} \varphi_{j,k} \quad (6)$$

可以看出, 式(6)为对函数 t 进行小波分解, 这里 j 的取值是随着小波分解层数的增多而逐渐减小的, 最后分解到第 0 层。其中的 $M \geq 1$ 为一个与 A 以及小波支集长度有关的有限整数, 对于任意 $j \in N$, 定义 $A(j) = \{(j, k) | 1 \leq k \leq 2^j M\}$ 。

使用惩罚投影估计量确定阈值的方法为^[5]: 惩罚函数的形式为 $\tilde{K}L|m|/n$, 此时 $m \in M'_j$, 定义 M'_j 为 A 的子集 m 的集合, 且

$$M'_j = \begin{cases} m(j) = A(j), & 0 \leq j \leq j' \\ |m(j)| = [|A(j)| h(j-j')], & j' < j \leq J \end{cases} \quad (7)$$

其中 h 为一个正的递减的辅助函数, 它定义在 $[1, +\infty)$ 上, 且 $h(1) < 1$ 。由式(4), 式(5), 式(7)可知, 此时的惩罚投影估计量即求 $\sum_{j' < j \leq J} \left[\frac{\tilde{K}L}{n} |m(j)| - \sum_{\lambda \in m(j)} \hat{\beta}_\lambda^2 \right]$ 的极小值, 当 j 确定时,

$|m(j)|$ 也是确定的, 相当于对任意 $j > j'$, 选择对应最大的 $[|A(j)| h(j-j')]$ 个系数 $|\hat{\beta}_\lambda|$ 的集合 $\hat{m}'(j)$ 。这种阈值策略并不是选取大于某个确定阈值的系数, 而是首先确定要保留的系数的个数为 $|m(j)|$, 然后取值最大的那些系数。

3.3 最佳平衡条件对阈值确定中函数的要求

为了将这种阈值方法用于小波域中, 引入如下命题^[5]: s 属于 B_0 空间, 在 $C \left[\sum_{\infty} (s) - \sum_{\infty} (\bar{S}_n) \right] \leq K'$ 的条件下, 如果函数 h 能使得 $2^{-j'} \log |M'_j|$ 有常数界, 那么对于任何 $q \geq 1$, 有

$$E[\|\tilde{s} - s\|^q] \leq C \inf_{m \in M_n} \left[\|s_m - s\|^2 + \frac{D_m}{n} \right]^{q/2} \quad (8)$$

在小波分析中可以认为 s 就是对其进行小波分析的信号, \tilde{s} 为小波分解后的重构信号。命题中 B_0 为满足 $\sum_{\infty} (t) = \sum_{j \geq 0} 2^{j/2} \sup_{\lambda \in A(j)} |\beta_\lambda| < +\infty$ 的函数 t 的空间, C 仅与选择的小波基有关, s_m, \bar{s}_n 分别为 s 在估计模型 S_m, \bar{S}_n 中的投影, 满足式(8), 即此时的估计冒险能够满足最佳平衡与一常数乘积的条件, 这时, 即使是仅仅保留每层最大的 $|m(j)|$ 个系数, 也可以得到准确的估计效果。

3.4 小波域中的阈值方法的推导

基于 Birge-Massart 方法的阈值策略正是以此为基础提出的, 仅需选取合适的 h 函数以及调整 j 的取法规则。此处取 $h(x) = 2^{-x} x^{-\alpha}$, $\alpha > 1$, 此时 h 函数可以满足使 $2^{-j'} \log |M'_j|$

有常数界的条件, 由式(6), 式(7)可知, 此时 $j'=0$, 即第 0 层的系数全部保留, 那么由式(7)可以得到每层保留的系数个数,

$$|m(j)| = \left[2^j M(j-j')^{-\alpha} 2^{j'-j} \right] = \left[2^j M(j-j')^{-\alpha} \right] = \left[Mj^{-\alpha} \right] \quad (9)$$

该式中分解层数 j 的取法与式(6)中的取法是一致的, 调整一下 j 的取法规则, 得到小波域去噪时的阈值定义如下: 对混有噪声的信号进行 J 层小波分解, 则第 j 层 ($1 \leq j \leq J$) 保留 $M/(J-j+2)^\alpha$ 个最大的小波系数, 再对阈值处理后的小波系数进行逆变换, 就可得到噪声被平滑后的信号。这里 M 为第 J 层的概貌分量的长度, 在去噪时一般取 $\alpha=3$ 。 $J+1$ 层以及更大的层数上的系数将全部保留。

4 本文去噪算法

本文所提出的算法步骤如下:

(1) 预处理 由于有限 Ridgelet 变换是针对特定大小的离散图像提出的, 因此首先要将图像扩展为该方法中所要求的素数大小, 扩展方法参阅文献[8], 然后构造 0-均值图像, 以便得到最好的能量集中;

(2) 对噪声图像进行有限 Ridgelet 变换, 得到 Ridgelet 系数矩阵^[3];

(3) 使用 Birge-Massart 阈值方法对各尺度下的 Ridgelet 系数子矩阵进行处理;

(4) 对处理后的系数矩阵进行有限 Ridgelet 反变换重构图像;

(5) 对去噪后的图像采用自适应的 Wiener 滤波以减少有限 Ridgelet 变换中模运算引起的“环绕”效应;

对噪声图像进行有限 Ridgelet 变换后得到的 Ridgelet 系数可分为两类, 第 1 类仅仅由噪声变换后得到, 这类系数幅值小, 数目较多; 另一类主要由信号, 特别是图像的直线奇异性特征变换而来, 并包含噪声的变换, 这类系数幅值大, 数目较小。由于 Birge-Massart 的阈值方法仅仅保留每层最大的 n_j 个系数, 因此可以很好的去除第 1 类的系数, 并对第 2 类系数有选择的保留, 又因为此处的阈值方法是在满足非参数估计最佳平衡的条件下得到的, 保证了估计结果的准确性, 因此可以得到较好的去噪效果。

5 实验结果

使用本文算法对 Lena 图像以及汉字图像做实验, 此处将图像的大小扩展为 257×257 , 在实验中, 将 Birge-Massart 阈值方法与 Donoho 阈值方法相比较, 并分别在 Ridgelet 域

与 Wavelet 域进行去噪, 得到的去噪效果图如图 1 所示, 不同噪声标准偏差下, 各种去噪方法得到的 PSNR 值见表 1。

对于 Lena 图像, 可以看出, Wavelet 域中使用 Donoho 方法得到的图像效果较差, 边缘也比较模糊, 见图 1(e), 与此相比, Wavelet 域中使用 Birge-Massart 方法得到的图像更

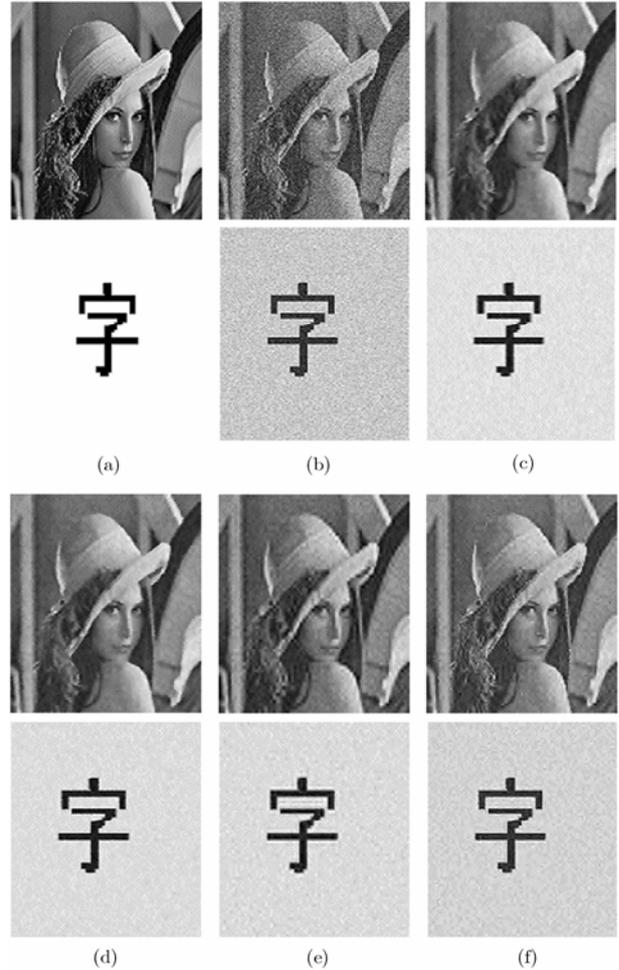


图 1 $\sigma = 22$ 时, 各种去噪方法对 Lena 以及汉字图像的去噪效果比较

(a) 原始图像 (b) 噪声图像 (c) Ridgelet + Donoho
(d) Ridgelet + Birge-Massart (e) Wavelet + Donoho
(f) Wavelet + Birge-Massart

Fig.1 Comparison of de-noising on the "Lena" and "Zi" image when $\sigma = \sigma$ (a) Original image (b) Noisy image (c) Ridgelet + Donoho (d) Ridgelet+Birge-Massart (e) Wavelet+Donoho (f) Wavelet+Birge- Massar

表 1 不同噪声标准偏差下, 各种去噪方法的 PSNR 比较

Tab.1 Comparison of PSNR at various σ

σ	Ridgelet+Donoho		Ridgelet+Birge-Massart		Wavelet+Donoho		Wavelet+Birge-Massart	
	Lena	Zi	Lena	Zi	Lena	Zi	Lena	Zi
18	26.0145	28.8232	26.5713	29.7875	25.7420	27.7206	27.2582	28.1020
20	25.7488	28.4680	26.3680	29.4862	25.5214	27.0076	26.9119	27.7518
22	25.5119	28.1511	26.1596	29.1657	25.3148	26.3838	26.5483	27.4093
28	24.9333	27.3295	25.5053	28.1307	24.7568	24.8786	25.3487	26.2853
37	24.1069	26.1183	24.5146	26.6222	24.0001	23.4136	23.7067	24.6654

为清晰, PSNR 值也比较高, 不足的是图像中出现一些小白点, 或者说存在一些点噪声, 见图 1(f)。而 Ridgelet 域使用两种阈值方法去噪后图像边缘均比较清晰, 见图 1(c), 1(d), 由图像的视觉效果和 PSNR 值可以看出, Ridgelet 域的 Birge-Massart 方法稍优于 Donoho 方法。由此可见, 在对 Lena 图像的处理中, 本文方法可以得到最为理想的去噪效果。由于 Ridgelet 变换特别适用于检测直线特征, 因此本文选取直线特征非常明显的汉字作为另一测试图像, 由图 1, 表 1 可以看出, 经过 Wavelet 域去噪后, 汉字的横线边缘比较模糊, 背景中也存在一些噪声, 见图 1(e), 1(f), 但此时 Birge-Massart 方法得到的 PSNR 值要高于 Donoho 方法。而 Ridgelet 域去噪后, 效果比较理想, 汉字边缘及背景均比较清晰, 将图 1(c)与图 1(d)进行比较, 可以看出, Birge-Massart 方法得到的去噪图像更为清晰, PSNR 值也较高。另外, 由表 1 可以看出, 由于该图像具有明显的直线特征, 在使用相同阈值方法的情况下, Ridgelet 域相对于 Wavelet 域 PSNR 值的提高比较明显。

本文使用各种去噪方法对不同图像分别进行去噪, 得到的 PSNR 值如表 2 所示, 其中前 3 幅实验图像均为直线特征比较明显的图像, 可以看出, Ridgelet 域去噪的 PSNR 值明显高于 Wavelet 域, 表现出 Ridgelet 变换在检测线奇异性方面的优势, 而且相同域中, Birge-Massart 方法得到的 PSNR 值要高于 Donoho 方法, 证明了这是一种非常有效的去噪方法。而在后两幅图像中, 不具有明显的直线特征, 此时比较两个域中的 Donoho 方法, 可以看出 Ridgelet 域的 PSNR 值稍高于 Wavelet 域, 而使用 Birge-Massart 方法时, Ridgelet 域的 PSNR 值要低于 Wavelet 域, 此时 Wavelet 域图像存在一点不足, 就是图 1(f)中所示的存在小白点的情况, 但与 Donoho 方法相比, 仍可以看出 Birge-Massart 方法是一种有效的去噪方法。总之, 无论在 Wavelet 域还是 Ridgelet 域中, Birge-Massart 方法均表现出优于 Donoho 方法的去噪效果, 而 Ridgelet 域的去噪可以更好的检测图像的直线特征, 由此可见, 本文提出的方法是一种非常有效的图像去噪方法。

6 结束语

本文介绍了 Ridgelet 变换的概念, 并将有限 Ridgelet 变换与基于 Birge-Massart 非参数自适应估计的阈值方法相结合, 提出了一种新的图像去噪方法, 实验证明, 该方法具有较强的去噪能力, 并且可以很好的保存图像的直线特征, 与传统的小波域去噪以及基于 Donoho 阈值方法的去噪相比

较, 表现出更为理想的去噪效果。

表 2 不同去噪方法对不同图像去噪的 PSNR 值比较($\sigma = 20$)

Tab.2 Comparison of PSNR by various methods ($\sigma = 20$)

图像	Ridgelet +Donoho	Ridgelet +Birge-Massart	Wavelet +Donoho	Wavelet +Birge-Massart
“字”	28.4680	29.4862	27.0076	27.7518
“中”	28.1666	28.5131	26.5638	26.9462
house	29.2806	29.4203	28.5686	28.7079
Lena	25.7488	26.3680	25.5214	26.9119
facets	23.1612	23.5148	22.4999	23.9225

参考文献

- [1] Candes E J. Ridgelet: Theory and applications. Ph. D. Thesis, Department of Statistics, Stanford University, 1998.
- [2] Candes E J, Donoho D L. Ridgelets: A key to higher-dimensional intermittency. *Philosophical Trans. of the Royal Society of London Series A*, 1999, 357(1760): 2495–2509.
- [3] Do M N, Vetterli M. The finite ridgelet transform for image representation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2003, 12(1): 16–28.
- [4] Do M N, Vetterli M. Image denoising using orthonormal finite ridgelet transform. Proc. of SPIE Conf. on Wavelet Applications in Signal and Image Processing, San Diego, 2000, 4119: 831–842.
- [5] Birge L, Massart P. From model selection to adaptive estimation. In *Festschrift for Lucien Le Cam: Research Paper in Probability and Statistics*. New York: Springer-Verlag, 1997: 55–88.
- [6] Le Cam L. Convergence of estimates under dimensionality restrictions. *Annals of Statistics*, 1973, 1(1): 38–53.
- [7] Barron A R, Birge L, Massart P. Risk bounds for model selection via penalization. *Probability Theory and Related Fields*, 1999, 113(3): 301–413.
- [8] Karlsson G, Vetterli M. Extension of finite length signal for sub-band coding. *Signal Processing*, 1989, 17(2): 161–166.

李立: 女, 1982年生, 硕士生, 研究方向为低信噪比信号检测、小波分析等。

彭玉华: 女, 1966年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为多尺度分析、小波分析与数字信号处理、低信噪比信号分析、图像压缩编码技术、数字图像处理及在生物医学工程、生物特征识别领域的应用等。

杨明强: 男, 1969年生, 讲师, 博士生, 研究方向为多尺度分析、图像处理等。

薛佩军: 男, 1965年生, 博士生, 研究方向为模糊集与粗集理论、信息加密等。