

一种解介质体散射问题的新方法*

王卫延 张守融

(中国科学院电子学研究所, 北京)

摘要 本文提出一种解非均匀介质体电磁散射问题的新方法。由测量到的介质体外的散射场, 按照递推关系, 可以求出全部介质体内的场分布。文章详细地推导了介质体内场分布的递推关系, 并给出了计算机模拟计算的结果。

关键词 非均匀介质体; 电磁散射; 递推法; CAA

一、导 言

二维非均匀介质体的电磁散射问题, 曾经由许多作者研究过。以往大多是采用 J. H. Richmond 提出的方法^[1]计算。应用这种方法处理大尺度介质时, 会遇到大型矩阵求逆的问题。为此, D. T. Borup^[2] 和 M. F. Saltan^[3] 等人又分别做了改进, 采用卷积和迭代的方法, 避开大型矩阵求逆, 使其更有实用价值。但在许多场合, 介质体以外的散射场可以通过测量得到, 人们需要知道的是介质体内的场分布。基于这一点, 本文提出一种新的方法, 采用 Fourier 变换或 Fourier 级数展开, 将介质体的散射场与体内的等效电流联系起来, 可以逐层递推介质体内的散射场, 从而解决此类散射问题。

二、解介质体散射问题的递推法

1. 散射场的展开

介质体散射问题的关键是求出介质体内的散射场分布。

我们将在圆柱坐标系中进行讨论。介质柱体如图 1, 置于坐标系内, 它的参数分布沿 z 方向是均匀的, 不均匀性表现在截面 S 上, 也就是说, 介质体的介电常数和电导率只是 ρ 和 θ 的函数, 它们的形式为 $\varepsilon(\rho, \theta)$, $\sigma(\rho, \theta)$ 。

假设入射波是 z 方向极化, 并且不沿 z 方向变化的单色波, 那么整个空间的电场矢量和介质体内的等效电流将仅有 z 分量。这里等效电流定义为:

$$\begin{aligned} J_{eq}(\rho, \theta) &= [\sigma(\rho, \theta) - i\omega(\varepsilon(\rho, \theta) - \varepsilon_0)] \cdot E(\rho, \theta) \\ &= [\sigma(\rho, \theta) - i\omega(\varepsilon(\rho, \theta) - \varepsilon_0)] \cdot [E^i(\rho, \theta) + E^s(\rho, \theta)] \end{aligned} \quad (1)$$

E , E^i , E^s 分别代表总电场、入射场和散射场。等效电流 J_{eq} 在介质体内外产生的散射场由下式表达:

* 1987年5月21日收到, 1987年10月20日修改定稿

$$E'(\rho, \theta) = \frac{-\omega\mu_0}{4} \int_S J_{eq}(\rho', \theta') H_0^{(1)}(k_0 \overline{\rho - \rho'}) dS \quad (2)$$

式中 ω, k_0 分别是入射波的角频率和它在自由空间中的波数, $H_0^{(1)}$ 是第一类零阶 Hankel 函数, $\overline{\rho - \rho'}$ 表示矢量 $\rho - \rho'$ 的模, 积分在柱体的截面 S 上进行. 由于介质体以外的等效电流为零, 故(2)式的积分可以扩展到包括柱体截面 S 在内的圆 C 上进行, 如图 2 所示.

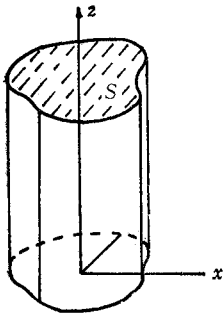
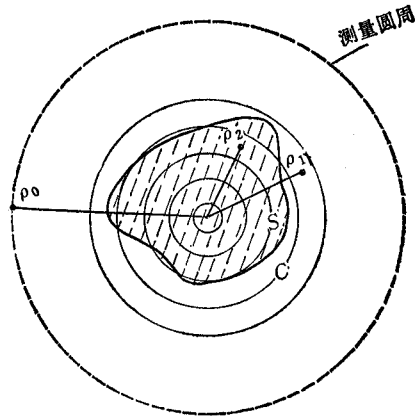
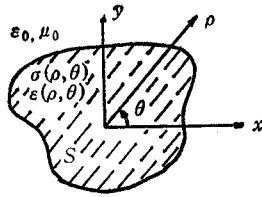


图 1 圆柱坐标系内的介质柱体

图 2 扩展为 N 个窄圆环的截面

把圆 C 划分为许多窄圆环, 使每个环足够窄, 从而可以近似地认为每个圆环上的电参数、电场、等效电流等沿径向均匀. 设这样的窄圆环共有 N 个, 从外至里记各圆环的中心半径为 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$, 如图 2 所示.

这样(2)式可以写为:

$$E'(\rho, \theta) = \frac{-\omega\mu_0}{4} \Delta\rho \sum_{k=1}^N \rho_k \int_{-\pi}^{\pi} J_{eq}(\rho_k, \theta') H_0^{(1)}(k_0 \overline{\rho_k - \rho}) d\theta' \quad (3)$$

式中 ρ_k 是第 k 个圆环的半径, $\Delta\rho$ 是环的宽度. 对 $E'(\rho, \theta)$ 作 Fourier 阶数展开, 有:

$$E'(\rho, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(\rho) e^{im\theta} \quad (4-1)$$

展开系数 $C_m(\rho)$ 为:

$$C_m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E'(\rho, \theta) e^{-im\theta} d\theta \quad (4-2)$$

将(3)式代入(4-2)式后

$$C_m(\rho) = \frac{-\omega\mu_0}{4} \Delta\rho \sum_{k=1}^N \rho_k \int_{-\pi}^{\pi} J_{eq}(\rho_k, \theta') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0^{(1)}(k_0 \overline{\rho_k - \rho}) e^{-im\theta} d\theta \right] d\theta' \quad (5)$$

利用 Hankel 函数的加法公式:

$$H_0^{(1)}(k_0 \overline{\rho_k - \rho}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n(k_0, \rho_k, \rho) e^{in(\theta - \theta')} \quad (6)$$

其中

$$M_n(k_0, \rho_k, \rho) = \begin{cases} H_n^{(1)}(k_0 \rho_k) J_n(k_0 \rho), & \rho_k \geq \rho \\ H_n^{(1)}(k_0 \rho) J_n(k_0 \rho_k), & \rho_k \leq \rho \end{cases} \quad (7)$$

以及三角函数的正交性, 可以把(5)式方括号中的项写为:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0^{(1)}(k_0 \rho_k - \rho) e^{-im\theta} d\theta = M_m(k_0, \rho_k, \rho) e^{-im\theta'} \quad (8)$$

再把(8)式代回(5)式:

$$C_m(\rho) = \frac{-\pi\omega\mu_0}{2} \Delta\rho \sum_{k=1}^N \rho_k M_m(k_0, \rho_k, \rho) d_m(\rho_k) \quad (9)$$

式中 $d_m(\rho_k)$ 表示在 $\rho = \rho_k$ 的介质环上的等效电流展开系数:

$$d_m(\rho_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_{eq}(\rho_k, \theta') e^{-im\theta'} d\theta' \quad (10-1)$$

$$J_{eq}(\rho_k, \theta') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m(\rho_k) e^{im\theta'} \quad (10-2)$$

(9)式的意义在于, 它将介质区内外任一圆周上的散射场展开系数与各介质环上的等效电流展开系数联系起来。

2. 最大环 ($\rho = \rho_1$) 上的散射场和等效电流

最大介质环上的散射场可以容易地由介质体外的散射场表示出来。如图 2, 在介质体外 $\rho = \rho_1$ 圆周上测量散射场, 依(4-2)式得到它的 Fourier 展开系数 $C_m(\rho_1)$ 。显然最大环 $\rho = \rho_1$ 和测量圆周 $\rho = \rho_0$ 的半径满足 $\rho_1, \rho_0 \geq \rho_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$), 所以可以将这两个圆周上散射场展开系数写成:

$$C_m(\rho_0) = \frac{-\pi\omega\mu_0}{2} \Delta\rho H_m^{(1)}(k_0 \rho_0) \sum_{k=1}^N \rho_k J_m(k_0 \rho_k) d_m(\rho_k),$$

$$C_m(\rho_1) = \frac{-\pi\omega\mu_0}{2} \Delta\rho H_m^{(1)}(k_0 \rho_1) \sum_{k=1}^N \rho_k J_m(k_0 \rho_k) d_m(\rho_k),$$

在这两个展开系数之间存在着简单的关系:

$$C_m(\rho_1) = C_m(\rho_0) \frac{H_m^{(1)}(k_0 \rho_1)}{H_m^{(1)}(k_0 \rho_0)} \quad (11)$$

因此可以表示出最大环上的散射场:

$$E^s(\rho_1, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(\rho_0) \frac{H_m^{(1)}(k_0 \rho_1)}{H_m^{(1)}(k_0 \rho_0)} e^{im\theta} \quad (12)$$

进而还可以得到此环上的等效电流:

$$J_{eq}(\rho_1, \theta) = (\sigma(\rho_1, \theta) - i\omega(\varepsilon(\rho_1, \theta) - \varepsilon_0))(E^i(\rho_1, \theta) + E^s(\rho_1, \theta)) \quad (13)$$

(12)和(13)两式表明, 一旦测量到介质体外任一圆周 $\rho = \rho_0$ 上的散射场, 就能够递推出最大介质环上的散射场和等效电流。

3. 第 i 层环 ($\rho = \rho_i$) 上的散射场 ($2 \leq i \leq N$)

为了求解第 i 层介质环上的散射场, 首先要假设第 1 层至第 $i-1$ 层环上的散射场

和等效电流是已知的, 这样假设是基于最外层环上的场量已经得到, 并且递推是由最外层开始的。

将介质区分为两部分, 第一部分是已经求出散射场分布的介质区域, 包括第 1 层至第 $i-1$ 层介质环; 第二部分是尚未求出散射场分布的介质区, 包括第 i 层至第 N 层环。由(3)式, 第 $i-1$ 层环和第 i 层环的散射场可以分别写成:

$$E^s(\rho_{i-1}, \theta) = \frac{-\omega\mu_0}{4} \Delta\rho \left(\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k \int_{-\pi}^{\pi} J_{eq}(\rho_k, \theta') H_0^{(1)}(k_0 \overline{\rho_k - \rho_{i-1}}) d\theta' \right. \\ \left. + \sum_{k=i}^N \rho_k \int_{-\pi}^{\pi} J_{eq}(\rho_k, \theta') H_0^{(1)}(k_0 \overline{\rho_k - \rho_{i-1}}) d\theta' \right) \quad (14-1)$$

和

$$E^s(\rho_i, \theta) = \frac{-\omega\mu_0}{4} \Delta\rho \left(\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k \int_{-\pi}^{\pi} J_{eq}(\rho_k, \theta') H_0^{(1)}(k_0 \overline{\rho_k - \rho_i}) d\theta' \right. \\ \left. + \sum_{k=i}^N \rho_k \int_{-\pi}^{\pi} J_{eq}(\rho_k, \theta') H_0^{(1)}(k_0 \overline{\rho_k - \rho_i}) d\theta' \right) \quad (14-2)$$

以上两式右边的第一个和式表示已经求解的等效电流对散射场的贡献, 第二个和式则表示尚待求解的等效电流对散射场的贡献。散射场展开系数相应地也能分为两项:

$$C_m(\rho_{i-1}) = C'_m(\rho_{i-1}) + C''_m(\rho_{i-1}) \quad (15-1)$$

$$C_m(\rho_i) = C'_m(\rho_i) + C''_m(\rho_i) \quad (15-2)$$

C'_m 与(14)式的第一个和式对应, C''_m 与第二个和式对应。由于第 $i-1$ 层环和第 i 层环的半径满足以下关系:

$$\rho_k (k = i, i+1, \dots, N) \leq \rho_{i-1}, \quad \rho_i \leq \rho_k (k = 1, 2, \dots, i-1)$$

因此由(9)式和(7)式可以给出 C'_m 和 C''_m 的表达式:

$$C'_m(\rho_{i-1}) = \frac{-\pi\omega\mu_0}{2} \Delta\rho J_m(k_0\rho_{i-1}) \sum_{k=1}^{i-1} \rho_k H_m^{(1)}(k_0\rho_k) d_m(\rho_k) \quad (16-1)$$

$$C''_m(\rho_{i-1}) = \frac{-\pi\omega\mu_0}{2} \Delta\rho H_m^{(1)}(k_0\rho_{i-1}) \sum_{k=i}^N \rho_k J_m(k_0\rho_k) d_m(\rho_k) \quad (16-2)$$

$$C'_m(\rho_i) = \frac{-\pi\omega\mu_0}{2} \Delta\rho J_m(k_0\rho_i) \sum_{k=1}^{i-1} \rho_k H_m^{(1)}(k_0\rho_k) d_m(\rho_k) \quad (16-3)$$

$$C''_m(\rho_i) = \frac{-\pi\omega\mu_0}{2} \Delta\rho H_m^{(1)}(k_0\rho_i) \sum_{k=i}^N \rho_k J_m(k_0\rho_k) d_m(\rho_k) \quad (16-4)$$

由于 $C_m(\rho_{i-1})$ 和 $d_m(\rho_1), d_m(\rho_2), \dots, d_m(\rho_{i-1})$ 都是已求得的量, 所以 $C'_m(\rho_{i-1})$ 和 $C''_m(\rho_{i-1})$ 也是可求的。比较以上四个展开系数, 不难发现在第 $i-1$ 层环和第 i 层环的散射场展开系数之间存在着简单的递推关系:

$$C'_m(\rho_i) = C'_m(\rho_{i-1}) \frac{J_m(k_0\rho_i)}{J_m(k_0\rho_{i-1})} \quad (17-1)$$

$$C''_m(\rho_i) = C''_m(\rho_{i-1}) \frac{H_m^{(1)}(k_0\rho_i)}{H_m^{(1)}(k_0\rho_{i-1})} \quad (17-2)$$

因此第 i 层介质环上总散射场展开系数为:

$$C_m(\rho_i) = C'_m(\rho_{i-1}) \frac{J_m(k_0 \rho_i)}{J_m(k_0 \rho_{i-1})} + C''_m(\rho_{i-1}) \frac{H_m^{(1)}(k_0 \rho_i)}{H_m^{(1)}(k_0 \rho_{i-1})} \quad (18)$$

由(4-1)式和(1)式分别得到第 i 层介质环上的散射场和等效电流:

$$E^i(\rho_i, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(\rho_i) e^{im\theta} \quad (19)$$

$$J_{eq}(\rho_i, \theta) = [\sigma(\rho_i, \theta) - i\omega(\epsilon(\rho_i, \theta) - \epsilon_0)][E^i(\rho_i, \theta) + E^r(\rho_i, \theta)] \quad (20)$$

仿照这样的过程,可以逐层递推出全部介质区域的散射场,以确定介质体内的电场分布。

三、计算机的模拟结果

根据前文提出的递推方法,对于有损耗和无损耗的几种情况,分别模拟计算了介质体内的电场分布。从计算结果看,采用文中提出的方法可以有效而准确地解决介质体的散射问题。在计算中,介质体以外 $\rho = \rho_0$ 处的散射场是用 Richmond 方法计算的,代替真实过程中的测量。把计算结果与采用以往方法得到的数据进行比较,二者吻合很好。

图 3 是一个无损耗的径向分层介质圆筒被平面波照射后,体内的电场分布图。在这个例子中,入射波波长为 1m,从介质筒的右侧 ($\theta = 0$) 照射。圆筒被分为三层,半径分别为 $\rho_1 = 0.22\text{m}$, $\rho_2 = 0.17\text{m}$, $\rho_3 = 0.12\text{m}$, 每层的相对介电常数分别是 4, 3, 2。递推是从 $\rho_0 = 0.3\text{m}$ 的圆周上散射场开始。从结果看到,在入射波照射的正面电场较强,而反面较弱。

图 4 则是一个损耗介质筒的电场分布图,它与前一个例子相比,仅是复介电常数不同。在这个例子中,第一层的电导率是 0.05,相对介电常数 $\epsilon_r(\rho_1, \theta) = 3 - 2\cos\theta$; 第二层的电导率是 0.04,相对介电常数 $\epsilon_r(\rho_2, \theta) = 2.5 - 1.5\cos\theta$; 第三层的电导率是 0.03,相对介电常数 $\epsilon_r(\rho_3, \theta) = 2 - \cos\theta$ 。从结果可以看到,由于电导率的出现,体内的场强明显下降,并使场分布规律发生很大变化。

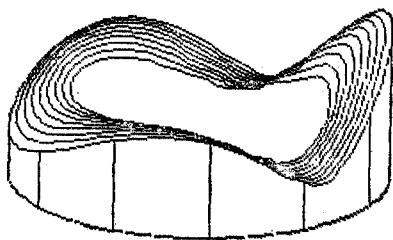


图 3 无损耗介质筒场强分布的例子

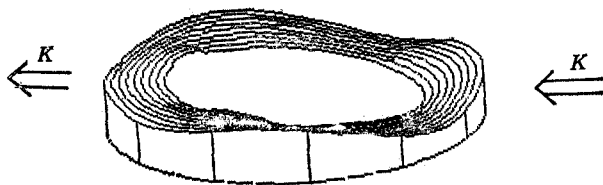


图 4 损耗介质筒场强分布的例子

如果介质体的截面近似为矩形,那么在直角坐标系下使用类似的方法比较方便。所不同的是将介质体的截面划分为 N 条窄带,并从介质区外的一条平行于窄带的直线上测量散射场,由此开始逐层递推。递推过程中用 Fourier 变换代替了 Fourier 级数展开。对不同例子所做的模拟计算同样取得准确结果。

图 5 是一个无损耗介质柱体的电场分布图。介质体分为 5 层, 每层宽 0.75m, 厚 0.05m, 相对介电常数依次为 5, 3, 2, 3, 5, 入射平面波从正面照射, 工作波长为 1m。

图 6 也是一个无损耗介质体的内部电场分布图。它的相对介电常数为:

$$\begin{aligned}\epsilon_r(x, y_1) &= 2 - \cos(2\pi x/0.75), \\ \epsilon_r(x, y_2) &= 1.5 - 0.5 \cos(2\pi x/0.75), \\ \epsilon_r(x, y_3) &= 3 - 2 \cos(2\pi x/0.75), \\ \epsilon_r(x, y_4) &= \epsilon_r(x, y_2), \\ \epsilon_r(x, y_5) &= \epsilon_r(x, y_1).\end{aligned}$$

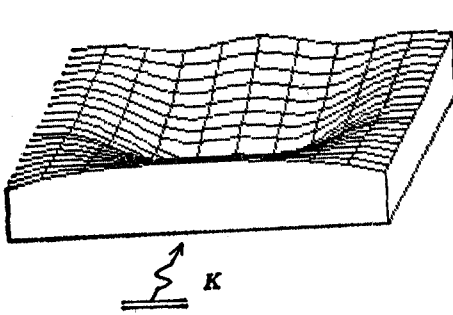


图 5 无损耗介质体场强分布的例子

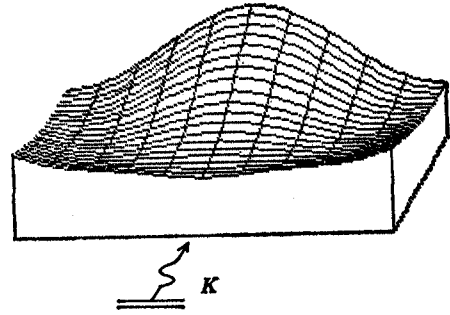


图 6 无损耗介质体场强分布的例子

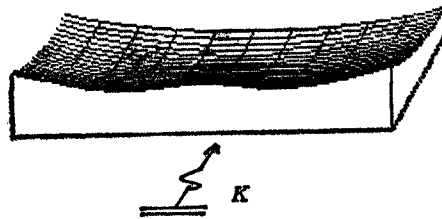


图 7 损耗介质体场强分布的例子

图 7 是一个有损耗介质体的电场分布图。它的电导率均为 0.05, 而相对介电常数为:

$$\begin{aligned}\epsilon_r(x, y_1) &= 1.5 - 0.5 \cos(2\pi x/0.75), \\ \epsilon_r(x, y_2) &= 2 - \cos(2\pi x/0.75), \\ \epsilon_r(x, y_3) &= 3 - 2 \cos(2\pi x/0.75), \\ \epsilon_r(x, y_4) &= \epsilon_r(x, y_2), \quad \epsilon_r(x, y_5) = \epsilon_r(x, y_1).\end{aligned}$$

同样看到, 电导率的出现使体内场强下降, 并使电场分布规律发生变化

四、结 论

本文在介质体外的散射场可测这一基础上, 提出采用逐层递推法求解介质体的散射问题的方法。由于这种方法不涉及矩阵运算, 只是反复进行一些 Fourier 变换或 Fourier 级数展开的工作, 因此降低了对计算机存储、CPU 时间等方面的要求。这种方法尤其适

用于大尺度散射体内部电场的求解。

参 考 文 献

- [1] J. H. Richmond, *IEEE Trans. on AP*, **AP-13**(1965), 334—341.
- [2] D. T. Borup, O. Gandhi, *IEEE Trans., on MTT*, **MTT-33** (1985), 417—419.
- [3] M. F. Saltan, R. Mittra, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-33**(1985), 163—168.

A NEW MOTHOD FOR SOLVING THE SCATTERING PROBLEM OF DIELECTRIC BODIES

Wang Weiyan Zhang Shourong

(*Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing*)

ABSTRACT A new approach to the EM scattering problem of an inhomogeneous lossy dielectric body is proposed. It is shown that the entire interier electric field distribution can be obtained from the measured exterier field distribution by simple recurrence relations. Detailed derivations of those recurrence relations for the field distribution inside the scattering body are presented, and the results obtained by computer simulations are given.

KEY WORDS Inhomogeneous dielectric body; EM scattering; Recurrence; CAA