二进制序列的游程相关函数 [1]

杨光正 杨翔宇 * 徐丽娟
(中国西南电子技术研究所 成都 610036)
*(北京大学物理系 北京 100871)

摘 要 本文研究了二进制序列的游程数与它的周期性和非周期性相关函数之间的关系，导出了用 Tseng 子码游程数表示的周期性和非周期性相关函数。

关键词 二进制序列，游程数，相关函数， Tseng 分解

中图号 TN-911.31

1 前 言

尽管二进制序列在现代电子技术中得到了广泛的应用，然而仍然有不少棘手的课题有待解决。

在抗干扰编码领域，码组抗干扰能力的提高是以牺牲部分传输效率 η 为代价的. 众所周知，理论上可实现 $\eta=R/C\to 1$, 同时保证 $P_e\to 0$, 然而实践与理论相去甚远. 如何寻找与理论极限接近的理想编码？这是一个悬而未决的问题.

在通信和雷达领域，希望用更长的 Barker 码，可是近半个世纪来，找到最长的 Barker 码是 N=13, 是否存在 $N>13$ 的 Barker 码？至今无法回答。

还有码组的优选问题 $\cdots$ 。

之所以出现上述这些情况，无疑地是人们对二进制序列的基本性质缺乏足够的了解. 基于这种认识，近年来开展了一些基础研究，并取得了一些进展，先后发现了二进制序列的重量定理 [1] 和群相关特性 [2], 本文又进一步揭示了二进制序列的相关函数与游程之间的密切联系。

2 定义和约定

记集合: $Q_N=\{0,1,2,\cdots,N-1\}$, $Q_{-N}=\{1-N,2-N,\cdots,-1,0\}$, $Q=\{1,2,\cdots,2^N\}$, $Q_{2N}=\{0,1,2,\cdots,2N-1\}$;

对域: $f=\{0,1\}$, $F=\{1,-1\}$ 作映射;

μ: $\mu(f)\to F$, $\mu^{-1}(F)\to f$ 。

码集 $\boldsymbol{C}$ 定义为

$$\boldsymbol{C}=\{C_\alpha,\alpha\in Q: C_\alpha=(c_{\alpha 1}c_{\alpha 2}\cdots c_{\alpha p}\cdots c_{\alpha N}), c_{\alpha p}\in F, N=\text{const.}\}.$$

为阐述简练，文中有时用游程表示 C_α:

$$C_\alpha=(l_{\alpha 1}^{(1)}l_{\alpha 2}^{(1)}\cdots l_{\alpha n_\alpha}^{(1)}),$$

1 1996-06-28 收到， 1997-09-24 定稿

其中 $l_{\alpha i}^{(1)}$ 是 C_α 中的第 i 个游程， $l_{\alpha i}^{(1)}$ 的长度是 $l_{\alpha i}$, n_α 是 C_α 包含的游程个数 (简称游程数)。

码字 $C_\alpha(\in \boldsymbol{C})$ 和 $C_\beta(\in \boldsymbol{C})$ 链接成 $C_{\alpha\beta}(\notin \boldsymbol{C})$ 指的是

$$C_{\alpha\beta}=C_\alpha\circ C_\beta=(c_{\alpha1}c_{\alpha2}\cdots c_{\alpha N}c_{\beta1}c_{\beta2}\cdots c_{\beta N})=(c_{\alpha\beta1}c_{\alpha\beta2}\cdots c_{\alpha\beta2N}).$$

Tseng[3] 曾用符号： $C_\alpha=C_{\alpha1}\otimes C_{\alpha2}\cdots\otimes C_{\alpha k}\cdots\otimes C_{\alpha j}=\otimes\prod_{k=1}^{j}C_{\alpha k}^{(j)}$, 表示将 C_α 分解成等长的 j 个子码，由于代数学中已将 $\otimes$ 用作矩阵的 Kronecker 积的运算符， $\prod$ 已用作连乘的缩记符，故用 $\otimes\prod$ 表示 Tseng 分解易引起混淆，何况用等号表示分解也欠妥，因而本文约定改用下述记法：

$$C_\alpha\Rightarrow\overset{j}{T}\,C_{\alpha k}^{(j)}=C_{\alpha1}^{(j)}TC_{\alpha2}^{(j)}\cdots TC_{\alpha k}^{(j)}\cdots TC_{\alpha j}^{(j)},\quad k\in Q_j$$

表示 Tseng 分解,并取消 Tseng 对 $C_{\alpha k}^{(j)}$ 长度的限定[3],亦即本文的子码是 $C_{\alpha k}^{(j)}=(c_kc_{k+j}c_{k+2j}\cdots c_{k+aj})$, 下标中的

$$a=\begin{cases}[N/j], & k\le b;\\ [N/j]-1, & k>b;\end{cases}\qquad \text{而 } b=N-[N/j]\cdot j;$$

式中的 $[\cdot]$ 是 Gauss 记号。

文中将 $C_\alpha\Rightarrow\overset{j}{T}\,C_{\alpha k}^{(j)}$ 称为 C_α 的 j 次 Tseng 分解， $C_{\alpha k}^{(j)}$ 称为第 k 个 Tseng 子码 (在不致引起混淆的情况下简称子码),$C_{\alpha k}^{(j)}$ 的游程数记为 $n_{\alpha k}^{(j)}$ ，长度记为 $N_{\alpha k}^{(j)}$ 。

定义 从 C_α 中截下长度为 $(j-1)$ 的码段，若在截下的码段中包含长度为 l 的游程也是原码 C_α 中长度为 l 的游程，则称截下的码段中的该游程为完整游程。

定义 C_α 中与游程 $l_{\alpha i}^{(1)}$ 相邻的游程 $l_{\alpha(i\pm1)}^{(1)}$ 若满足条件 $l_{\alpha(i\pm1)}\ge(j-l_{\alpha i})$, 则称此 $l_{\alpha i}^{(1)}$ 为指标是 j 的孤立游程 (简称孤立游程)。

C_α 中包含长度为 l, 指标为 j 的孤立游程的个数记为 $q_j^{(l)}$ 。

$C_\alpha(\in \boldsymbol{C})$ 与 $C_\beta(\in \boldsymbol{C})$ 的非周期性自相关函数 (aACF) 和非周期性互相关函数 (aCCF) 分别是

$$\begin{matrix}\rho_\alpha(j)=C_\alpha\cdot C_\alpha^*=\sum_{i=1}^{N-j}c_{\alpha i}\cdot c_{\alpha i+j};\\ \psi_{\alpha\beta}(j)=C_\alpha\cdot C_\beta^*=\sum_{i=1}^{N-j}c_{\alpha i}\cdot c_{\beta i+j};\end{matrix}\quad c_{\alpha i},c_{\beta i}\in F;\quad j\in Q_N.\tag{1}$$

C_α 的周期性相关函数 (PCF) 是

$$R_\alpha(j)=\rho_\alpha(j)+\rho_\alpha(j-N),\qquad j\in Q_N.\tag{2}$$

3 aACF 的游程定理

定理 1 对 $C_\alpha(\in \boldsymbol{C})$ 作 $C_\alpha\Rightarrow\overset{j}{T}\,C_{\alpha k}^{(j)}$, 设 C_α 的码长是 N, $C_{\alpha k}^{(j)}$ 的游程数是 $n_{\alpha k}^{(j)}$, 则 C_α 的 aACF 必为

$$\rho_\alpha(j)=(N+j)-2\sum_{k=1}^{j}n_{\alpha k}^{(j)},\qquad j\in Q_N.$$

证明 考察 C_α 的 aACF 的第一旁瓣 $\rho_\alpha(1)$

$$\rho_\alpha(1)=\sum_{i=1}^{N-1}c_i\cdot c_{i+1},\qquad c_i\in F.$$

若等式右端的 $(N-1)$ 项中有 u 项是 -1, 则有

$$\rho(1)=(N-1)-2u,\qquad u=(N-\rho(1)-1)/2.$$

欲满足 $c_i\cdot c_{i+1}=-1$, c_i 必与 c_{i+1} 异号，相邻码元异号只能发生在两个游程的交界处，n_α 个游程仅能提供 $(n_\alpha-1)$ 个异号，设 C_α 有 n_α 个游程，则有 $u=n_\alpha-1$, 于是

$$n_\alpha=(N-\rho(1)+1)/2,\tag{3}$$

$$\rho(1)=(N+1)-2n_\alpha.\tag{4}$$

作 $C_\alpha\Rightarrow\overset{j}{T}\,C_{\alpha k}^{(j)}$, (3) 式对任意二进制序列为真，故亦适用于 Tseng 子码 $C_{\alpha k}^{(j)}$, 于是

$$n_{\alpha k}^{(j)}=(N_{\alpha k}^{(j)}-\rho_k(1)+1)/2,$$

式中 $N_{\alpha k}^{(j)}$ 和 $\rho_k(1)$ 分别是 $C_{\alpha k}^{(j)}$ 的长度和 aACF 的第一旁瓣。

对 k 求和

$$\sum_{k=1}^{j}n_{\alpha k}^{(j)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j}(N_{\alpha k}^{(j)}-\rho_k(1)+1).\tag{5}$$

考虑 $\sum_{k=1}^{j}N_{\alpha k}^{(j)}=N$, $\sum_{k=1}^{j}1=j$, 有

$$\sum_{k=1}^{j}\rho_k(1)=(N+j)-2\sum_{k=1}^{j}n_{\alpha k}^{(j)}.\tag{6}$$

另一方面 C_α 的 aACF 的第 j 个旁瓣可写成

$$\rho_\alpha(j)=\sum_{i=1}^{N-j}c_i\cdot c_{i+j}=\sum_{k=1}^{j}\sum_{h=1}^{a}c_{k+(h-1)j}\cdot c_{k+hj},\qquad c_i\in F,\quad j\in Q_N.$$

因 $C_{\alpha k}^{(j)}$ 的 aACF 的第一旁瓣的展开式是 $\rho_k(1)=\sum_{h=1}^{a}c_{k+(h-1)j}\cdot c_{k+hj}$, 所以 $\rho_\alpha(j)=\sum_{k=1}^{j}\rho_k(1)$ 。

直接代入 (6) 式即得

$$\rho_\alpha(j)=(N+j)-2\sum_{k=1}^{j}n_{\alpha k}^{(j)},\qquad j\neq 0.\tag{7}$$

为了能将 aACF 的主峰包括进去，在此定义 $j=0$ 时 $\sum_{k=1}^{j}n_{\alpha k}^{(j)}=0$ ，命题成立。 证毕

对 $2|N$, $j>N/2$ 或 $2\nmid N$, $j>(N-1)/2$, (7) 式可简化，为此我们令 $J=N-j$, 代入 (7) 式得

$$\rho_\alpha(N-J)=2N-J-2\sum_{k=1}^{N-J}n_{\alpha k}^{(N-J)}.$$

前 J 个 Tseng 子码，每个子码只有两个码元，后 $(N-2J)$ 个子码，每个子码仅有一个码元，因而后 $(N-2J)$ 个子码的游程数是确知的，即 $n_{\alpha k}=1$, 所以

$$\begin{aligned}\rho_\alpha(N-J) &= (2N-J)-2\sum_{k=1}^{J} n_{\alpha k}^{(J)} - 2\sum_{k=J+1}^{N-J} n_{\alpha k}^{(N-J)} \\ &= 3J - 2\sum_{k=1}^{J} n_{\alpha k}^{(J)}, \qquad J<[(N+1)/2]. \end{aligned}\tag{7a}$$

4 aCCF 的游程定理

定理 2 若 $n_{\alpha\beta k}^{(N+j)}, n_{\alpha k}^{(N+j)}, n_{\beta k}^{(N+j)}$, 分别是 $C_{\beta\alpha}(\notin \boldsymbol{C})$, $C_\alpha(\in \boldsymbol{C})$, $C_\beta(\in \boldsymbol{C})$ 的 $(N+j)$ 次 Tseng 分解的第 k 个子码的游程数，则 C_α 和 C_β 的 aCCF 必为

$$\psi_{\beta\alpha}(j)=\begin{cases} -(N+j)+2\displaystyle\sum_{k=1}^{N+j}(n_{\alpha k}^{(N+j)}+n_{\beta k}^{(N+j)}-n_{\alpha\beta k}^{(N+j)}), & j\in Q_{-N}; \\ (3N+j)-2\displaystyle\sum_{k=1}^{N+j} n_{\alpha\beta k}^{(N+j)}, & j\in Q_N. \end{cases}$$

证明 考察 $C_{\alpha\beta}=C_\alpha\circ C_\beta$ 的 aACF

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha\beta}(i) &= C_{\alpha\beta}\cdot C_{\alpha\beta}^{*} = \sum_{p=1}^{2N-i} c_{\alpha\beta p}\cdot c_{\alpha\beta p+i} \\ &= \rho_\alpha(i')+\rho_\beta(i')+\psi_{\beta\alpha}(i-N), \qquad i\in Q_{2N}, \end{aligned}\tag{8}$$

式中 $i'=\begin{cases} i, & i<N; \\ 0, & i\geq N. \end{cases}$

由定理 1 可直接写出

$$\rho_{\alpha\beta}(i)=(2N+i)-2\sum_{k=1}^{i} n_{\alpha\beta k}^{(i)}, \qquad i\in Q_{2N}, \tag{9a}$$

$$\rho_\alpha(i')=(N+i')-2\sum_{k=1}^{i'} n_{\alpha k}^{(i')}, \tag{9b}$$

$$\rho_\beta(i')=(N+i')-2\sum_{k=1}^{i'} n_{\beta k}^{(i')}. \tag{9c}$$

将 (9) 式代入 (8) 式得

$$\psi_{\beta\alpha}(i-N)=(2N+i)-2(N+i')+2\left[\sum_{k=1}^{i'}(n_{\alpha k}^{(i')}+n_{\beta k}^{(i')})-\sum_{k=1}^{i} n_{\alpha\beta k}^{(i)}\right].$$

令 $j=i-N$, 并考虑 i 和 i' 的值域，最后得到

$$\psi_{\beta\alpha}(j)=\begin{cases}-(N+j)+2\sum_{k=1}^{N+j}(n_{\alpha k}^{(N+j)}+n_{\beta k}^{(N+j)}-n_{\alpha\beta k}^{(N+j)}), & j\in Q_{-N}; \quad (10a)\\ (3N+j)-2\sum_{k=1}^{N+j}n_{\alpha\beta k}^{(N+j)}, & j\in Q_N, \quad (10b)\end{cases}$$

(10) 式反映了 aCCF 的不对称性。

5 PCF 的游程定理

定理 3 作 $C_\alpha \Rightarrow \overset{j}{T}\, C_{\alpha k}^{(j)}$, $C_{\alpha\alpha k}=C_\alpha\circ C_\alpha \Rightarrow \overset{j}{T}\, C_{\alpha\alpha k}^{(j)}$, 设子码 $C_{\alpha k}^{(j)}$, $C_{\alpha\alpha k}^{(j)}$ 的游程数分别是 $n_{\alpha k}^{(j)}$, $n_{\alpha\alpha k}^{(j)}$, 则 C_α 的周期性相关函数 $R_\alpha(j)$ 必为

$$R_\alpha(j)=N-2\sum_{k=1}^{j}(n_{\alpha\alpha k}^{(j)}-n_{\alpha k}^{(j)}),\qquad j\in Q_N.$$

证明 由 (2) 式可写出 C_α 的 PCF:

$$R_\alpha(j)=\rho_\alpha(j)+\rho_\alpha(j-N),\qquad j\in Q_N.$$

在 Q_N 中考虑链接码 $C_{\alpha\alpha}$ 的 aACF, 为此令 (8) 式中的 $\alpha=\beta$ 得

$$\rho_{\alpha\alpha}(j)=\rho_\alpha(j)+\rho_\alpha(j)+\psi_{\alpha\alpha}(j-N)$$

考虑 $\psi_{\alpha\alpha}(j-N)=\rho_\alpha(j-N)$, 结合上两式即得

$$R_\alpha(j)=\rho_{\alpha\alpha}(j)-\rho_\alpha(j).$$

令 (9a) 式中的 $\beta=\alpha$, 并将 i 改成 j, 同时考虑 (7) 式即得

$$R_\alpha(j)=N-2\sum_{k=1}^{j}(n_{\alpha\alpha k}^{(j)}-n_{\alpha k}^{(j)}),\qquad j\in Q_N. \tag{11}$$

证毕

PCF 具有均匀旁瓣的码在实用中较为重要. 对于均匀旁瓣 $R_\alpha(j)=S$=const., $(j\neq 0)$, 由定理 3 有

$$\sum_{k=1}^{j}(n_{\alpha\alpha k}^{(j)}-n_{\alpha k}^{(j)})=(N-S)/2.$$

6 游程数的恒等关系式

众所周知, $C_\alpha(\in C)$ 的 aACF 的主峰 $\rho_\alpha(0)$ 是一个与集 C 中具体码字无关的常数，这是迄今我们知道的唯一的一个恒等关系。

若将 C_α 看成 $\boldsymbol{R}^N$ 空间的 N 维 Descartes 坐标系中的矢量，那么集 $\boldsymbol{C}$ 便在 $\boldsymbol{R}^N$ 空间张成一个 N 维超球，这个超球的面积唯一地由 $\rho(0)$ 确定。

对 $j \neq 0$ 的情况是否存在其他恒等关系？这是一个令人感性趣的问题。

从几何的观点看，Tseng 分解实质上是将 N 维空间分割成 j 个子空间，Tseng 子码便是矢量 $\tilde{C}_\alpha$ 在子空间中的投影。

$\boldsymbol{R}^N$ 空间是 $\boldsymbol{R}^{2N}$ 空间的子空间，既然在 $\boldsymbol{R}^N$ 空间 $\boldsymbol{C}$ 有不变量 $\rho_\alpha(0) = N$，那么将 $\boldsymbol{R}^N$ 扩展成 $\boldsymbol{R}^{2N}$ 后很可能存在其他的恒等关系。我们可通过链接 C_α 的技术将 $\boldsymbol{R}^N$ 扩展成 $\boldsymbol{R}^{2N}$。

6.1 $C_\alpha(\in \boldsymbol{C})$ 的 Tseng 游程恒等关系

考察 $C_\alpha = C_\beta$ 的情况，对此有 $\psi_{\alpha\beta}(j) = \psi_{\alpha\alpha}(j) = \rho_\alpha(j)$，由定理 1，定理 2 可得

$$(N+j) - 2\sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)} = (3N+j) - 2\sum_{k=1}^{N+j} n_{\alpha\alpha k}^{(N+j)}.$$

经整理后即得

$$\sum_{k=1}^{N+j} n_{\alpha\alpha k}^{(N+j)} - \sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)} = N, \qquad j \in Q_N. \tag{12}$$

此式对 $\boldsymbol{C}$ 中任意码字均成立，是一个恒等关系。

6.2 C_α 与 $C_\beta(\in \boldsymbol{C})$ 之间的 Tseng 游程恒等关系

作 $C_\alpha \Rightarrow^{(N+j)}_{T} C_{\alpha k}^{(N+j)}$, $C_\beta \Rightarrow^{(N+j)}_{T} C_{\beta k}^{(N+j)}$, $j \in Q_{-N}$; $C_{\beta\alpha} = C_\beta \circ C_\alpha \Rightarrow^{(N+j)}_{T} C_{\beta\alpha k}^{(N+j)}$。分别记 $C_{\alpha k}, C_{\beta k}, C_{\beta\alpha k}$ 的游程数为 $n_{\alpha k}, n_{\beta k}, n_{\beta\alpha k}$。由 (10) 式可直接写出 $C_{\beta\alpha}$ 的 $\psi_{\alpha\beta}(j)$，(仅须将 (10) 式中下标 α, β 互易即可)，再考虑 $\psi_{\alpha\beta}(-j) = \psi_{\beta\alpha}(j)$，即得

$$-(N-j) + 2\sum_{k=1}^{N-j}(n_{\alpha k}^{(N-j)} + n_{\beta k}^{(N-j)} - n_{\alpha\beta k}^{(N-j)}) = (3N+j) - 2\sum_{k=1}^{N+j} n_{\beta\alpha k}^{(N+j)}.$$

经整理后，最后得到

$$\sum_{k=1}^{N-j}(n_{\alpha k}^{(N-j)} + n_{\beta k}^{(N-j)} - n_{\alpha\beta k}^{(N-j)}) + \sum_{k=1}^{N+j} n_{\beta\alpha k}^{(N+j)} = 2N, \quad j \in Q_N. \tag{13}$$

我们称 (12) 式和 (13) 式为无条件恒等关系。

6.3 Tseng 游程的条件恒等关系

所谓条件恒等关系是指在 j 相同的条件下对 $\boldsymbol{C}$ 中所有码字均成立的恒等关系。

考虑 $C_\beta = \overline{C}_\alpha$ 的情况，对此有 $\psi_{\alpha\overline{\alpha}}(j) = C_\alpha \cdot \overline{C}_\alpha^* = -\rho_\alpha(j)$。

作 $C_{\alpha\overline{\alpha}} = C_\alpha \circ \overline{C}_\alpha \Rightarrow^{(N+j)}_{T} C_{\alpha\overline{\alpha}k}^{(N+j)}$，记子码 $C_{\alpha\overline{\alpha}k}^{(N+j)}$ 的游程数为 $n_{\alpha\overline{\alpha}k}^{(N+j)}$。根据 (9b) 和 (10b) 式有

$$(3N+j) - 2\sum_{k=1}^{N+j} n_{\alpha\overline{\alpha}k}^{(N+j)} = -[(N+j) - 2\sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)}].$$

经整理后得

$$\sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)} + \sum_{k=1}^{N+j} n_{\alpha\bar{\alpha}k}^{(N+j)} = 2N + j. \tag{14}$$

在 j 相同的条件下，(14) 式对 C 中任意码字均成立。

有了上述恒等关系，我们就可导出 C_α 的 aACF 的全游程表示式。

为此将 (14) 式改写成

$$(N+j) - 2\sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)} = \sum_{k=1}^{N+j} n_{\alpha\bar{\alpha}k}^{(N+j)} - (N + \sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)}). \tag{15}$$

将 (12) 式改写成

$$\sum_{k=1}^{N+j} n_{\alpha\alpha k}^{(N+j)} = N + \sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)}. \tag{16}$$

将 (16) 式代入 (15) 式并考虑 (7) 式，最后得到

$$\rho_\alpha(j) = \sum_{k=1}^{N+j} (n_{\alpha\bar{\alpha}k}^{(N+j)} - n_{\alpha\alpha k}^{(N+j)}), \qquad j \in Q_N. \tag{17}$$

7 游程结构定理

在大多数实际应用中需要知道 aACF 与各种游程长度的游程数之间的关系。因此有必要深入探讨这一问题。

定理 4 若在 $C_\alpha(\in C)$ 的 n_α 个游程中有长度为 l 的游程 $p^{(l)}$ 个，其中有 $q_j^{(l)}$ 个属孤立游程，则 C_α 的 aACF 必满足关系：

$$\rho(j) = (N+j) - 2jn_\alpha + 4p^{(j-1)} + 2\left[\sum_{l-1}^{j-2} (j-l)\cdot(p^{(l)} + q_j^{(l)}) + r_j - b_j\right], \quad j \in Q_N. \tag{18}$$

证明 考察 (7) 式中的 $\sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)}$, 设 C_α 中共有 n_α 个游程，若从 C_α 中移去一个码段，此码段中含有 e 个完整的游程，则 C_α 中余下的游程数 n'_α 应为

(1) 若 $2\not| e$, 则 $n'_\alpha = n_\alpha - (e+1)$。

(2) 若 $2|e$, 则 $n'_\alpha = n_\alpha - e$。

(3) 若移去的是码首或码尾的码段，则无论 $2\not| e$ 或 $2|e$, 都有 $n'_\alpha = n_\alpha - e$。

(4) 若移去的码段中仅包含 C 中一个游程的一部分 (非完整游程) 则 $n'_\alpha = n_\alpha$。

在作 $C_\alpha \Rightarrow \overset{j}{T} C_{\alpha k}^{(j)}$ 时，生成子码 $C_{\alpha k}^{(j)}$ 的过程可看成是先从 C_α 中移去 $(c_1 c_2 \cdots c_{k-1})$, 保留码元 c_k, 然后再移去一个长度为 $(j-1)$ 的码段 $(c_{k+1} c_{k+2} \cdots c_{k+j-1})$, 保留 c_{k+j}, 照此每隔一个码元移去一个长度为 $(j-1)$ 的码段，全部移完后，留下的 $(c_k c_{k+j} c_{k+2j} \cdots c_{k+aj})$ 便是 Tseng 子码 $C_{\alpha k}^{(j)}$。

在生成 $C_{\alpha k}^{(j)}$ 的过程中，若移去的码段中共包含长度为 l 的完整游程 $p_k^{(l)}$ 个，其中有 r'_k 个码段包含奇数个完整游程，考虑到 (3) 在计算 r'_k 时应扣除码首和码尾包含奇数个完整游程的情况，设 r_k 是已扣除后的值，则在考虑 (1)-(4) 后，得到 $C_{\alpha k}^{(j)}$ 的游程数是

$$n_{\alpha k}^{(j)} = n_\alpha - \left(\sum_{l=1}^{j-1} p_k^{(l)} + r_k\right).$$

对 k 求和：

$$\sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)} = j \cdot n_\alpha - \left(\sum_{k=1}^{j}\sum_{l=1}^{j-1} p_k^{(l)} + \sum_{k=1}^{j} r_k\right).$$

因在生成 j 个 Tseng 子码的过程中，C_α 中每个长度为 l 的游程被完整地移出过 $(j-l)$ 次，所以有

$$\sum_{k=1}^{j} p_k^{(l)} = (j-l)\cdot p^{(l)}.$$

(顺便指出，$(j-l)<0$ 表示移去的码段中包含的不是完整游程，因本文只计完整游程，故当 $(j-l)<0$ 时定义该项为零) 。于是得到

$$\sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)} = j \cdot n_\alpha - \left(\sum_{l=1}^{j-1} (j-l)\cdot p^{(l)} + r''_j\right),$$

式中 $r''_j = \sum_{k=1}^{j} r_k$ 。

在生成 j 个 $C_{\alpha k}^{(j)}$ 的全过程中，移出的码段遍历整个 C_α，因此可将其等效为用一个宽度为 $(j-1)$ 的窗口 W 从左向右通过 C_α，每移一位观察一次，累计下 W 中出现奇数个完整游程的次数。考虑到 (3)，实际上 W 应从 $(c_2c_3\cdots c_j)$ 逐位移至 $(c_{N-j+1}c_{N-j+2}\cdots c_{N-1})$，$r''_j$ 便是累计下 W 中出现奇数个完整游程的总次数。

实际上为了便于分析，我们宁可将 W 从 $(c_1c_2\cdots c_{j-1})$ 逐位移至 $(c_{N-j+2}c_{N-j+3}\cdots c_N)$，累计下 W 中出现奇数个完整游程的总次数 r'_j，然后再扣除 (3) 的情况，即 $r''_j = r'_j - b_j$ 。若 W 处于 C_α 首、尾两端位置时，两者均不含奇数个完整游程，则 $b_j=0$；若其中之一包含有奇数个完整游程，则 $b_j=1$；若两者均包含奇数个完整游程，那么 $b_j=2$ 。

若 C_α 中包含有长 $l=(j-1)$ 的游程，由于 l 等于窗宽，恰好填满 W，所以在生成 j 个 Tseng 子码的过程中，每个长 $l=(j-1)$ 的游程只能被完整地移出一次。

对于长 $l<(j-1)$ 的孤立游程，在生成 j 个子码的过程中，每个孤立游程被移出过 $(j-l)$ 次。

设 C_α 中存在长 $l=j-1$ 的游程 $p^{(j-1)}$ 个，长 $l<(j-1)$ 的孤立游程 $q_j^{(l)}$ 个，那么

$$r''_j = r'_j - b_j = p^{(j-1)} + \sum_{l=1}^{j-2}(j-l)\cdot q_j^{(l)} + r_j - b_j.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)} = j\cdot n_\alpha - \left[\sum_{l=1}^{j-1}(j-l)\cdot p^{(l)} + p^{(j-1)} + \sum_{l=1}^{j-2}(j-l)\cdot q_j^{(l)} + r_j - b_j\right]$$

$$= j\cdot n_\alpha - \left[2p^{(j-1)} + \sum_{l=1}^{j-2}(j-l)\cdot(p^{(l)} + q_j^{(l)}) + r_j - b_j\right], \tag{19}$$

式中 r_j 是从 r_j' 中分离出长为 $(j-1)$ 的游程和长度为 $l<(j-1)$ 的孤立游程后的余项。因而它应是 W 从 C_α 的首部逐位移至尾部时，累记下 W 中出现长度 $l<(j-1)$ 的奇数个非孤立的完整游程的总次数。将 (19) 式代入 (7) 式后即得 (18) 式。 证毕

8 约束关系

原则上讲，仿照上节的方法可以继续从 (r_j-b_j) 中分离出与码字结构有关的游程项，但这样一来文章过于冗长，偏离了主题，所以这个问题留待以后作专题研究，下面讨论 b_j 的约束条件。

b_j 描述的是 W 处于码首和码尾位置时，W 中是否包含有奇数个完整游程，而 W 的宽度与 j 有关，因而 $\sum_{j=1}^{N-1} b_j$ 应是 W 处于码首和码尾位置时，其宽度由零逐位增大到 $(N-1)$ 的过程中，W 中出现奇数个完整游程的总次数。

先考察 W 处于码首的情况。

在此我们不失一般地设 $C_\alpha=(l_{\alpha1}^{(1)}l_{\alpha2}^{(1)}\cdots l_{\alpha n_\alpha}^{(1)})$ 中第一游程 $l_{\alpha1}^{(1)}$ 的码元全是零元。$l_{\alpha i}^{(1)}$ 的长度是 $l_{\alpha i}$。

当 W 的宽度从零逐位增加到 $(j-1)=l_{\alpha1}$ 时，W 中开始出现一个完整游程 $l_{\alpha1}^{(1)}$，在 W 的宽度逐位增加到 $(j-1)=l_{\alpha1}+l_{\alpha2}$ 之前，W 中只有一个完整游程 $l_{\alpha1}^{(1)}$，因此 W 中出现 $l_{\alpha1}^{(1)}$ 的次数恰好等于 $l_{\alpha2}$ 的值。同理 W 中出现三个完整游程的次数是 $l_{\alpha4}$。所以当 W 的宽度由零增至 $(N-1)$ 的过程中，出现奇数个完整游程的总次数应等于 $(l_{\alpha1}^{(1)}l_{\alpha2}^{(1)}\cdots l_{\alpha n}^{(1)})$ 中所有下标为偶数的游程长度之和，而 C_α 中下标为奇数的游程长度之和就等于 C_α 的重量 w，所以下标是偶数的游程长度之和应等于 $(N-w)$。

当 W 位于码尾时，分两种情况讨论。

(1) $2|n_\alpha$ 的情况 因已设 $l_{\alpha1}^{(1)}$ 是全零的游程，故当 n_α 为偶数时 $l_{\alpha n_\alpha}^{(1)}$ 应是全 1 的游程，所以当 W 的宽度由零增至 $(N-1)$ 的过程中，类似于上面的分析，W 中出现奇数个完整游程的总次数应等于 C_α 的重量 w。

(2) $2\nmid n_\alpha$ 的情况 当 $2\nmid n_\alpha$ 时，$l_{\alpha n_\alpha}^{(1)}$ 是全零的游程，故当 W 的宽度由零逐位增至 $(N-1)$ 的过程中，W 中出现奇数个完整游程的总次数应为 $(N-w)$。综合上面的分析，最后得到

$$\sum_{j=1}^{N-1} b_j = \begin{cases} N, & 2|n_\alpha; \\ 2(N-w), & 2\nmid n_\alpha. \end{cases}$$

除 $\sum b_j$ 有约束外，还有两个明显的约束关系 (证明从略)，

$$\sum_{l=1}^{l_{\max}} p^{(l)} = n_\alpha, \qquad \sum_{l=1}^{l_{\max}} l\cdot p^{(l)} = N,$$

式中 $l_{\max}$ 是 C_α 中最长的游程长度.

致谢 杜强先生曾为本文定稿付出了辛勤的劳动，在此仅向杜强先生表示诚挚的谢意.

参 考 文 献

[1] 杨光正. 脉压码时间旁瓣特性的研究. 电子科学学刊, 1994, 16(1): 40–47.

[2] 杨光正, 杨翔宇, 徐丽娟. 二进制序列的群相关特性. 电子科学学刊, 1997, 19(2): 158–165.

[3] Tseng C C, Liu C L. Complementary sets of sequences. IEEE Trans. on Information Theory, 1972, 18(5): 644–651.

[4] Painchaud G R, Mckenzie J A H. An experimental adaptive digital pulse compression subsystem for multi-function radar applications, the Record of the IEEE 1990 International Radar conference, New York: May, 1990, 154.

RUN CORRELATION FUNCTIONS OF BINARY SEQUENCES

Yang Guangzheng Yang Xiangyu Xu Lijuan

(*Southwest China Research Institute of Electronic Technology, Chengdu* 610036)

*(*Department of Physics, Peking University, Beijing* 100871)

Abstract For both the periodic case and aperiodic case, the relations between the run numbers of a binary sequence and autocorrelation, cross-correlation functions of sequences are investigated.And the correlation functions expressed by the runs of a binary sequence, which are refered to as RCF,are derived in this paper.

Key words Bianry sequence, Run number, Correlation function, Tseng dissolving

杨光正： 男，1937 年生，高级工程师，从事雷达专业，主要研究信号处理，通信理论和智能理论.

杨翔宇： 男，1979 年生，北京大学物理系学生，曾获国际生物学奥林匹克金牌，主要研究兴趣是遗传编码.