

小波基的构造方法和算法设计*

李兵兵 常义林 胡征

(西安电子科技大学信息工程系 西安 710071)

摘要 本文首先对小波分析的基本原理作了简要介绍;然后从分解信号完全恢复的角度,对几种典型的小波基进行了概括;并且着重指出:对于两带分解的小波基设计等价于在正则性条件下,设计一个两带完全恢复或近似完全恢复的滤波器组;最后给出了相应于 Daubechies 基的小波生成算法和实验结果.

关键词 小波分析,小波基设计,算法构成

1 引言

小波变换 (wavelet transform) 作为一种新的信号分析工具正在受到各国学者的普遍关注. 虽然小波变换的真正发展时间才几年,但它已被应用于图象编码、边缘检测、纹理鉴别、计算机视觉和雷达成象等多个不同的学科和领域,并且在许多应用中都显示出它的优越性. 小波分析不仅能有效地克服传统的傅里叶分析和其它一些分析方法所存在的不能同时进行时域和频域局域性分析的缺陷,适应于那些复杂的不平稳信源的分析,而且它运算简单,便于工程实现. 在对一个给定的信号进行小波分析时,为了更好地提取所需的信号特性,必须选择合适的小波基,所以根据应用需要设计合适的小波基是小波理论研究和应用的关键问题. 本文首先对小波理论的基本概念进行了介绍,重点指出构造两带分解的小波基等价于在附加正则性条件约束下,设计一个两带完全恢复或近似完全恢复的滤波器组. 然后在对几种典型的小波基设计方法概括的基础上,给出了一类小波基的生成算法和相应的结果.

2 小波理论的基本概念

对一个能量有限的函数 f 进行小波分解,就是用经过单一的小波函数 ϕ 进行伸缩和位移而形成的一组小波基 $\phi_{m,n}$ 来对 f 进行展开,即

$$f = \sum_{m,n} C_{m,n}(f) \phi_{m,n}, \quad (1)$$

这里 m 为尺度参数, n 为位移参数, $C_{m,n}(f)$ 为用 $\{\phi_{m,n}\}$ 对 f 展开而得到的系数,它可

1993-07-11 收到,1994-03-17 定稿

* 国家自然科学基金、高校博士点专项科研基金、国防预研基金资助课题

李兵兵 男,1955年生,博士生,研究方向是小波理论及其在图象编码中的应用,曾从事过数字语音插空技术、程控交换技术、语音编码和图象编码的研究工作.

常义林 男,1944年生,副教授,现从事图象压缩编码、自适应信号处理和数字通信技术的研究.

胡征 男,1917年生,教授,博士生导师,中国电子学会会士,IEEE 高级会员,现从事语音和图象信号处理以及综合业务数字网的研究.

由

$$C_{m,n}(f) = \langle \phi_{m,n}, f \rangle = \int \phi_{m,n}(x) f(x) dx \quad (2)$$

给出。在二进制伸缩的条件下, $\phi_{m,n}$ 可表示为

$$\phi_{m,n}(x) = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}x - n). \quad (3)$$

小波函数 ϕ 可看成是一个带通滤波器的脉冲响应。它由一个具有低通响应形式的相关的尺度函数 φ 而得出。构造两带离散正交的小波函数, 等价于在附加的正则性条件下, 设计一个两带完全恢复的滤波器组。此时相应于尺度函数 φ 的低通滤波函数 $L(n)$ 和相应于小波函数 ϕ 的带通滤波函数 $H(n)$ 可由下式决定:

$$\varphi(x) = \sum_n L(n) \varphi(2x - n), \quad (4)$$

$$\phi(x) = \sum_n H(n) \varphi(2x + n), \quad (5)$$

这里 $H(n) = (-1)^n L(n+1)$ 。

在我们得到滤波函数 $L(n)$ 和 $H(n)$ 后, 便可用这两个函数来对给定数据进行处理, 实现数据的小波分解和合成。

3 小波基的构造方法

针对具体的应用场合, 设计不同的小波基函数是实现信号最佳分解和处理的必要前提, 也是目前小波理论研究的重要内容。这里我们就两带信号分解方式的小波基构造的几种方法作一介绍。一个信号的两带分解和综合过程可由图 1 给出。

这里 $x(n)$ 为原始输入信号, $\hat{x}(n)$ 为恢复信号, H_1, H_2 为两个分析滤波器, 而 K_1, K_2 为两个综合滤波器。在上面的系统中取 Z 变换可得

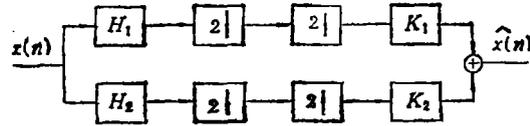


图 1 信号的两带分解和综合过程

$$\begin{aligned} \hat{X}(Z) = & [H_1(Z)K_1(Z) + H_2(Z)K_2(Z)]X(Z)/2 \\ & + [H_1(-Z)K_1(Z) + H_2(-Z)K_2(Z)]X(-Z)/2. \end{aligned} \quad (6)$$

要实现信号的完全恢复, 则要求

$$H_1(Z)K_1(Z) + H_2(Z)K_2(Z) = c, \quad (7)$$

$$H_1(-Z)K_1(Z) + H_2(-Z)K_2(Z) = 0. \quad (8)$$

这里 c 为常数, 当 c 取值为 2 时, 有 $\hat{X}(Z) = X(Z)$ 。这样小波基的设计就归结为在一定的正则性条件约束下, 选择合适的 H_1, H_2, K_1 和 K_2 以满足(7), (8)两式。

Daubechies^[1] 在假设 $K_1(Z) = H_1^*(Z)$, $H_2(Z) = -Z^{-1}H_1^*(-Z)$ 和 $K_2(Z) = H_2^*(Z)$ 的条件下, 将(7), (8)式中的四个未知量 H_1, H_2, K_1 和 K_2 减少到一个未知量 H_1 , 通过求解方程

$$|H_1(Z)|^2 + |H_1(-Z)|^2 = c, \quad (9)$$

给出了一类具有有限支集的正交小波基的解的形式为

$$M_N(\zeta) = \left[\frac{1}{2} (1 + e^{i\zeta}) \right]^N Q(e^{i\zeta}), \quad (10)$$

其中 $Q(e^{i\zeta})$ 是一个多项式,它满足

$$|Q(e^{i\zeta})|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} \sin^{2k} \left(\frac{1}{2} \zeta \right) + \sin^{2N} \left(\frac{1}{2} \zeta \right) \cdot R \left(\frac{1}{2} \cos \zeta \right), \quad (11)$$

这里 $R \left(\frac{1}{2} \cos \zeta \right)$ 是关于 $\cos \zeta$ 的奇次多项式。当我们通过适当地选择 $N, R \left(\frac{1}{2} \cos \zeta \right)$, 得到 $M_N(\zeta)$ 时,便可利用

$$M_N(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{2M-1} h_1(n) e^{in\zeta} \quad (12)$$

求得相应的 $h_1(n)$, 从而得到 $h_2(n), k_1(n)$ 和 $k_2(n)$ 。这里 $h_1(n), h_2(n), k_1(n)$ 和 $k_2(n)$ 是相应于 $H_1(Z), H_2(Z), K_1(Z)$ 和 $K_2(Z)$ 的时域表示。这类小波基是正交的, 但缺少对称性, 因此对一些场合的应用是不适宜的。例如为了得到具有线性相位的特性, 就必须放宽对于小波基正交性的要求。

Antonini 等人^[2]和 Mallat 等人^[3]出于应用场合的考虑, 通过选择不同的 H_1, H_2, K_1, K_2 的关系, 给出了不同的小波基的解。其它的小波基构造方法还有很多种, 如为了突出图象的方向性特征, 采用不可分离的二维小波基函数, 从减少图象的恢复误差和突出所需的子带信息出发, 采用多带分解的小波基函数和考虑克服有限序列处理时带来的边界影响而构造的有限序列小波基函数等等。随着小波理论研究的深入, 可以预料将有更多的小波基函数和构造方法出现。

4 一类小波基的算法实现

从前面的讨论可以看出, 小波基设计的关键在于求出相应的 $h_1(n)$, 而 $h_1(n)$ 的求取方法依小波基构造方法的不同而各异。对于 Daubechies 基和 Meyer 基而言, 它们的解的形式与 $Q(e^{i\zeta})$ 的能谱函数 $|Q(e^{i\zeta})|^2$ 相联系, 因此必须通过将 $|Q(e^{i\zeta})|^2$ 分解因式来求得相应的 $Q(e^{i\zeta})$ 。

根据信号分析理论^[4], 我们给出求解 $Q(e^{i\zeta})$ 和 $h_1(n)$ 的算法及其步骤:

- (1) 选定 $N, R \left(\frac{1}{2} \cos \zeta \right)$, 得到 $|Q(e^{i\zeta})|^2$ 的表达式;
- (2) 将 $|Q(e^{i\zeta})|^2$ 转化为 $\cos \zeta$ 的函数, 并用 W 代替 $\cos \zeta$, 从而可得到一个关于 W 的一元高次方程 $V(W)$;
- (3) 求解 $V(W)$ 得到所有的根 $w_i (i \in I)$;
- (4) 由 $w_i = (z + 1/z)/2$ 得到相应的 $z_i (i \in I)$ 。对于每一个 w_i , 可以得到两个 z_i 。若一个 z_i 位于单位圆内, 则另一个必在单位圆外; 或者两个 z_i 都是在单位圆上(重根);
- (5) 取出每对实根中的一个, 每两对复根中的一对, 从而构成

$$Q(Z) = A \prod_{i \in I} (Z - z_i);$$

- (6) 由 $Q(1) = \sqrt{V(1)}$ 确定比例因子 A , 从而得到 $Q(Z)$;
- (7) 利用 $Q(Z)$ 和 (10), (12) 式, 求出 $h_1(n), h_2(n), k_1(n)$ 和 $k_2(n)$ 。

从上面的算法中可以看出, 当选取不同的 z_i 来构成 $Q(Z)$ 时, 可得到不同的 $h_1(n)$ 。若选取所有单位圆外的 z_i 构成 $Q(Z)$ 时, 则得到具有最小相移特性的 $h_1(n)$; 若选取部

分单位圆内的 z_i 和部分单位圆外的 z_i 或全部单位圆内的 z_i 来构成 $Q(Z)$, 则可以得到另外的 $h_1(n)$ 。根据以上算法, 我们在表 1 中给出了相应于 $N=4, R\left(\frac{1}{2}\cos\zeta\right)=0$ 时的三种形式的 $h_1(n)$, 并在图 2 中给出了三种形式的 $h_1(n)$ 所对应的尺度函数波形和小波函数波形。

表 1 滤波系数 $h_1(n)$ ($N=4$)

单位圆内	单位圆外	混 合
-0.010597401785	0.230377813304	0.032223100604
0.032883011666	0.714846570541	-0.012603967259
0.030841381835	0.630880767927	-0.099219543570
-0.187034811711	-0.027983769406	0.297857795605
-0.027983769406	-0.187034811711	0.803738751793
0.630880767927	0.030841381835	0.497618667628
0.714846570541	0.032883011666	-0.029635527642
0.230377813304	-0.010597401785	-0.075765714787

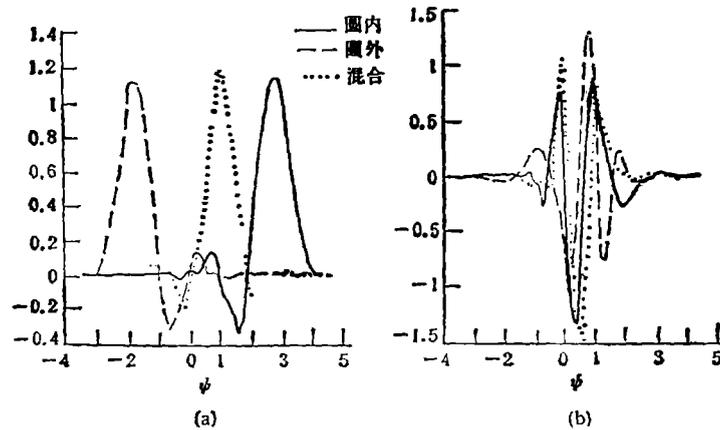


图 2

在进行实时信号处理时, 最小相移意味着最小时延, 故在应用时通常选取最小迟延和混合迟延的信号。而对于非实时信号处理时, 三者都可选用, 这也从一个方面说明小波分析的灵活性。由于求解 $V(W)$ 的根有现成的计算机算法可用, 所以上述算法在计算机上实现是很容易和简单的。

参 考 文 献

- [1] Daubechies I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1988, 41:909—996.
- [2] Antonini M, Barlaud M, Mathieu P, Daubechies I. *Image Coding Using Vector Quantization in the Wavelet Transform Domain. Proc. of ICASSP'90, New Mexico, USA: 1990, 2297—2300.*
- [3] Mallat S, Zhong S F. *IEEE Trans. on PAMI*, 1992, PAMI-14(7):710—732.
- [4] Papoulis A. *Signal Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1977, 30—55.

THE CONSTRUCTION METHODS AND ALGORITHM DESIGN OF WAVELET BASES

Li Bingbing Chang Yilin Hu Zheng

(Department of Information Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract Based on the brief introduction of the principle of wavelet analysis, this paper gives a summary of several typical wavelet bases from the point of view of perfect reconstruction of signal and emphasizes that designing wavelet bases which are used to decompose the signal into two-band form is equivalent to designing a two-band filters with perfect or nearly perfect property. The generating algorithm corresponding to Daubechies bases and some simulated results are also shown in this paper.

Key words Wavelet analysis, Wavelet bases design, Algorithm constitution