一种新的 K 分布形状参数估计器

郝程鹏[*][**]　　侯朝焕[*]　　鄢锦[*]

[*](中国科学院声学研究所　北京　100080)

[**](中国科学院研究生院　北京　100039)

摘　要：该文提出了一种将已有的 U 估计器和 X 估计器结合起来估计 K 分布形状参数的新估计器。仿真结果表明，与以前提出的方法相比，新估计器在我们所关心的小 ν 值范围能够提供更加准确的形状参数估计，几乎相当于通过数值方法计算的最大似然估计器的性能。

关键词：K 分布，形状参数，估计器

中图分类号：TN911.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2005)09-1404-04

A New Estimator for Estimating the Parameters of K-Distribution

Hao Cheng-peng[*][**]　　Hou Chao-huan[*]　　Yan Jin[*]

[*](*Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

[**](*Graduate School, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039, *China*)

Abstract　This paper proposes a new estimator for estimating the parameters of K-distribution which combines U estimator with X estimator efficiently. Simulations show that this new estimator yields shape parameter estimates with lower variance when compared with previous estimators. Parameter estimates obtained from new estimator are approximately equal to the numerically evaluated Maximum Likelihood(ML) estimates when ν is low.

Key words　K-distribution, Shape parameter, Estimator

1　引言

从观测数据中估计一个统计分布的参数是许多信号和图像处理的必要任务之一。例如，在对高分辨率雷达图像的分析中，为了完成目标信号的恒虚警检测以及背景杂波的分类，准确的参数估计是必须的。众所周知，K 分布模型是高分辨率雷达杂波的一个标准模型，而且最近的一些研究表明[1,2]，K 分布还能够很好地描述高分辨率主动声纳混响的统计分布特性。所以，K 分布越来越引起人们的关注，估计 K 分布参数的方法也成为研究的一个热点。

我们知道，当待估计的分布形式已知时，最大似然估计(ML)将是最佳的参数估计方法。但是，对于 K 分布，很难得到 ML 估计的闭型解，而且为了找到最大似然解，需要大量的迭代运算，计算量相当大。为此，很多学者提出了不同的估计方法来替代 ML 估计，Raghavan[3] 提出了基于观测数据算术均值和几何均值的的形参估计器——R 估计器。Oliver[4] 讨论了另外 3 种估计器——U 估计器，V 估计器和 W 估计器，Blacknell[5]，Lombardo 和 Oliver[6] 则具体分析了这 3 种方法的精度。Joughin[7] 比较了数值 ML 估计器和基于二、四阶矩的 V 估计器。Iskander 和 Zoubir[8] 讨论了基于小数矩的 Y 估计器。Blacknell 和 Tough[9] 则提出了 X 估计器。

本文首先对这几种比较有代表性的 K 分布形状参数估计器进行介绍，然后借助仿真的方法比较各估计器的性能，在此基础上给出改进估计性能的新估计器。

2　K 分布

K 分布是描述合成孔径雷达杂波和高分辨率主动声纳混响分布的比较好的概率模型，其概率密度函数(PDF)为

$$f(z)=\frac{2c}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{cz}{2}\right)^{\nu}K_{\nu-1}(cz) \tag{1}$$

其中 ν 为形状参数，c 为尺度参数，杂波的平均功率 $\mu=4\nu/c^2$，$\Gamma(\bullet)$ 为 Gamma 函数，$K_{\nu-1}(\bullet)$ 为 $\nu-1$ 阶第二类修正贝塞尔函数。

形状参数 ν 决定 K 分布偏离瑞利分布的程度，ν 越小，偏离程度越大，具有比瑞利分布更大的尾部，所以在采用相同检测门限进行检测的情况下，虚警概率越大。因此通过估计形状参数 ν 来了解杂波或混响分布的尖锐程度是非常必要的，而且小 ν 值时的估计精度是我们最关心的。

2004-04-20 收到，2004-08-23 改回
国家自然科学基金(60272087) 资助课题

3　形状参数的估计

3.1　ML 估计器

当分布形式已知时，最大似然估计是最佳的参数估计的方法。如果 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 是一个具有 m 个参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ 分布的 N 个独立采样值，那么 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 的联合概率密度函数为 $p(A_1:\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ $p(A_2:\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ $\cdots$ $p(A_N:\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$。当被看成是 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ 的函数时，称这个概率密度函数为似然函数:

$$l_N(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m : A_1,A_2,\cdots,A_N)=\prod_{i=1}^{N} p(A_i:\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \tag{2}$$

$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ 的最大似然估计是根据观测数据计算得到的、使最大似然函数达到最大值时的一组值 $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_m$。

由于对数函数是一个单调函数，似然函数也可以写成对数形式:

$$\ln(l_N(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m : A_1,A_2,\cdots,A_N))=\sum_{i=1}^{N}\ln(l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m : A_i) \tag{3}$$

在很多情况下，获得对数似然函数的闭型解更容易。K 分布的对数似然函数为

$$\begin{aligned}&\ln(l_N(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m : A_1,A_2,\cdots,A_N))\\&=v\sum_{i=1}^{N}\ln(A_i)+\sum_{i=1}^{N}\ln\left[K_{v-1}(cA_i)\right]\\&\quad+N\{(1-v)\ln 2+(v+1)\ln c-\ln(\Gamma(v))\}\end{aligned} \tag{4}$$

由于得不到式(4)最大值的闭型解，所以我们必须借助数值方法在由 v 和 c 组成的二维数值空间进行搜索找到这个最大值。

3.2　Oliver 讨论的 3 个估计器

Oliver 讨论的 3 个形状参数的估计器 U, V 和 W 分别为

$$\hat{U}\equiv[\ln(z^2)]-\log([z^2]) \tag{5}$$

$$U=E\left[\hat{U}\right]=\phi^0(v)-\ln(v)-\gamma \tag{6}$$

$$\hat{V}\equiv[z^4]/[z^2]^2 \tag{7}$$

$$V=E\left[\hat{V}\right]=2\left(1+(1/v)\right) \tag{8}$$

$$\hat{W}\equiv[\ln(x^2)^2]-[\ln(x^2)]^2 \tag{9}$$

$$W=E\left[\hat{W}\right]=\phi^1(v)+\pi^2/6 \tag{10}$$

其中 $\phi^0(v)$ 是双 gamma 函数，$\phi^n(v)$ 是双 gamma 函数的第 n 阶导数；γ 是欧拉常数，$\gamma=0.57721$；$[f(z)]=(1/N)\sum_{i=1}^{N}f(z_i)$，也适用于下文。对于每一种估计方法，将观测数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 带入式(5)、式(7)或式(9)计算出统计量值，然后根据式(6)，式(8)或式(10)的转换关系将统计量转换成形状参数的估值。因为 Raghavan 提出的 R 估计器与 U 估计器的性能相当，所以在这里我们将不再讨论 R 估计器。

3.3　基于小数矩的 Y 估计器

Iskander 和 Zoubir 提出的基于小数矩的 Y 估计器所采用的统计量为

$$\hat{Y}\equiv\frac{[x^{p+2q}]}{[x^p][x^{2q}]} \tag{11}$$

$$Y=E\left[\hat{Y}\right]=\mu_{p+2q}/(\mu_p\mu_{2q}) \tag{12}$$

其中

$$\mu_k=E[X^k]=\frac{\Gamma(0.5k+1)\Gamma(v+0.5k)}{\Gamma(v)}(2c)^k \tag{13}$$

考虑到高阶矩的不稳定性，采用低阶矩进行估计更加合适，我们令 $q=1$，然后将式(13)带入式(12)，得

$$v=\frac{\left(\dfrac{p+2}{2}\right)^2-\dfrac{\mu_{p+2}}{\mu_p\mu_2}}{\dfrac{\mu_{p+2}}{\mu_p\mu_2}-\left(\dfrac{p+2}{2}\right)}=\frac{\left(\dfrac{p+2}{2}\right)^2-Y|_{q=1}}{Y|_{q=1}-\left(\dfrac{p+2}{2}\right)} \tag{14}$$

当 $p=2$ 时，Y 估计器和 V 估计器等价。Iskander 和 Zoubir 借助仿真方法证明 $p=0.1$ 时 Y 估计器的性能最佳。

3.4　Blacknell 和 Tough 的估计方法

2001 年 Blaknell 和 Tough 又提出了 X 估计器，它采用的统计量为

$$\hat{X}\equiv\frac{[x^2\ln x^2]}{[x^2]}-\log[x^2] \tag{15}$$

$$X=E\left[\hat{X}\right]=\phi(2)-\phi(1)+\phi(v+1)-\phi(v) \tag{16}$$

其中 $\phi(z)$ 为双 gamma 函数

$$\phi(z)=\frac{\mathrm{d}\ln(\Gamma(z))}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{\mathrm{d}(\Gamma(z))}{\mathrm{d}z} \tag{17}$$

根据 gamma 函数的基本特性 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$，取其对数有

$$\ln(\Gamma(z+1))=\ln z+\ln(\Gamma(z)) \tag{18}$$

所以有

$$\phi(z+1)=\frac{\mathrm{d}\ln(\Gamma(z+1))}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}(\ln z+\ln(\Gamma(z)))}{\mathrm{d}z}=\phi(z)+\frac{1}{z} \tag{19}$$

将式(19)带入式(16)

$$X=1+(1/v) \tag{20}$$

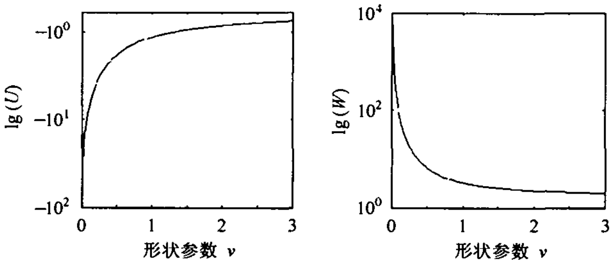
从式(20)可以看出，统计量与形状参数 v 之间的转换关系很简单。

4　误差分析

估计器的性能由两个因素决定：一是估计精度，Blacknell 分析了 U，V 和 W 估计器的精度，得到的结论是 U 估计器的估计精度最高。二是计算的复杂程度，可以看到 5 种估计器 U，V，W，X 和 Y 中 U，W 和形状参数 v 的关系式是复杂函数，转换时需要很大的计算量，而 V，X 和 Y 与 v 的关系式相对简单，转换时需要的计算量较小。所以，从计算量

的角度上看，V，X 和 Y 的性能更好。但是随着数字技术的发展，统计量和形状参数 ν 的函数关系可以制成表格或用硬件实现。然后在恒虚警检测中随时查找，转换计算量的问题也就迎刃而解。这样估计精度就成了衡量各估计器性能更重要的因素。

下面我们借助仿真的方法来分析各估计器的误差。在 5 个估计器中，U，W 和形状参数 ν 的函数关系需要采用查表法实现。因为小 ν 值时的估计精度是我们最关心的，所以暂时将表格中 ν 值的最大范围定为 30，最小间隔定为 0.01。当然，如果需要对更大 ν 值时的估计精度进行分析，可以将表格做的更大。图 1 给出了 U，W 与形状参数 ν 的函数关系曲线。



(a) U 估计器　　　　(b) W 估计器

图 1　U, W 估计器的统计量与形状参数 ν 的关系曲线

现在我们来比较 U，V，W，X，Y 的性能，其中 Y 估计器的 p 值取最佳值 0.1，仿真次数为 10000，观测数据长度为 256，ML 仿真结果是采用数值方法对由 c 和 ν 组成的二维数值空间进行搜索得到的，比较结果见图 2。其中横坐标为形状参数 ν，纵坐标为估计标准差 σ_ν。从图 2 可以看出，U 估计器的误差与 ML 的误差最接近，性能最好，W 估计器在 ν 值很小的情况下，性能几乎与 U 相同，但是随着 ν 值的增大，W 的性能迅速恶化，当 $\nu>1.2$ 时，W 的性能在几个估计器中最差。值得注意的是虽然 U 估计器的性能最好，但是与 ML 仿真结果相比，还有一定的差距，所以估计方法的性能还有一定的提升空间，这就促使我们去寻找新的更好的估计方法。

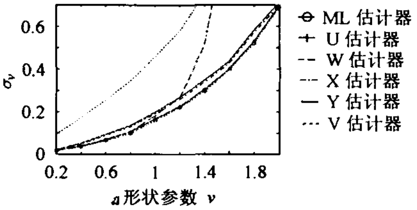


图 2　几种估计器的误差曲线

5　新估计器的提出

文献[10]提出的利用 K 分布的多个矩来获得更加精确的形参估计的观点给我们启发，我们将 U 估计器和 X 估计器结合起来，得到了一个新的估计器，称之为 M 估计器。从下文的分析可以看出，M 估计器几乎与最大似然估计器性能相差无几，证明了多矩结合的有效性，同时也找到了一种性能更佳的新估计器。

$$\begin{aligned}\hat{M} &\equiv \alpha\hat{X}+(1-\alpha)\hat{U}\\ &=\alpha\left(\frac{[x^2\ln x^2]}{[x^2]}-\log[x^2]\right)\\ &\quad+(1-\alpha)\left([\ln(x^2)]-\ln([x^2])\right)\end{aligned} \tag{21}$$

$$M=E\left[\hat{M}\right]=\alpha\left(1+\frac{1}{\nu}\right)+(1-\alpha)\left(\phi^0(\nu)-\ln(\nu)-\gamma\right) \tag{22}$$

其中 α 为加权因子，决定 U，X 分量在 M 估计器中所占的比重。

图 3 给出了不同 α 值情况下 M 估计器的误差曲线。因为小 ν 值时的误差是我们最关心的，所以横坐标选择了形状参数的倒数 $t=1/\nu$，这样，横坐标的值越大，对应的形状参数越小。纵坐标采用了对数座标，观测数据长度 $n=256$。其中 $\alpha=0$ 对应 U 估计器，$\alpha=1$ 对应 X 估计器。可以看出，对于每一个 α 值，都不可能在整个 ν 值范围内具有最小的估计误差，在小 t 值(大 ν 值)范围 $\alpha=0.5$ 时的误差最小，在我们所关心的大 t 值(小 ν 值)范围，$\alpha=0.15$ 时误差最小。我们根据在大 t 值时的误差要尽量小，在小 t 值时的误差又不要太大的选取原则，还分析了 α 取 0.15 附近其它值时的误差，最后选定 0.15 作为加权因子 α 的最佳值，此时的 M 估计器为

$$\hat{M}\equiv 0.15\left(\frac{[x^2\ln x^2]}{[x^2]}-\log[x^2]\right)+0.85\left([\ln(x^2)]-\ln([x^2])\right) \tag{23}$$

$$M=E\left[\hat{M}\right]=0.15\left(1+\frac{1}{\nu}\right)+0.85\left(\phi^0(\nu)-\ln(\nu)-\gamma\right) \tag{24}$$

图 4 给出了 $n=256$，$\alpha=0.15$ 时的 M 估计器和通过数值方法计算的最大似然估计器估计误差的仿真结果。可以看到在小 ν 值时两种估计器的误差相差无几。

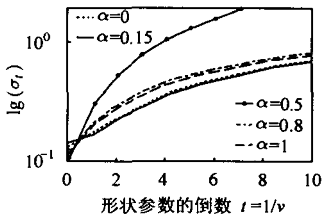


图 3　不同 α 值情况下 M 估计器的误差曲线

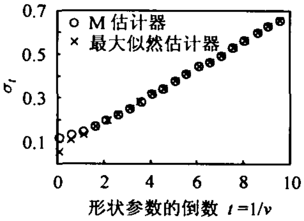


图 4　M 估计器与最大似然估计器的误差比较

6　结束语

本文提出了一种利用 K 分布的多个矩来估计形状参数的新方法，它将 U 估计器和 X 估计器结合起来，提供更加

准确的形状参数估计，并且存在一个最优的加权常数，在我们所关心的小 v 值范围内使估计方法的性能达到最佳。将本文所提出的估计器应用到高分辨率雷达或声纳信号恒虚警检测中是进一步需要做的工作。

参 考 文 献

[1] Lyons A P, Abraham D A. Statistical characterization of high-frequency shallow-water sea-floor backscatter. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1999, 106(3): 1307 – 1315.

[2] Abraham D A, Lyons A P. Novel physical interpretation of K-distributed reverberation. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 2002, 27(4): 800 – 813.

[3] Raghavan R S. A method for estimating parameters of K-distributed clutter. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems.*, 1991, 27(2): 238 – 246.

[4] Oliver C J. Optimum texture estimators for SAR clutter. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1993, 26: 1824 – 1835.

[5] Blacknell D. Comparison of parameter estimators for K distribution. *IEE Pro.-F*, 1994, 141(1): 45 – 52.

[6] Lombardo P, Oliver C J. Estimation of texture parameters in K-distributed clutter. *IEE Proc.-F*, 1994, 141(4): 196 – 204.

[7] Joughin I R, Percival D B, Winebrenner D P. Maximum likelihood estimation of K distribution parameters for SAR data. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 1993, 31(5): 989 – 998.

[8] Iskander D R, Zoubir A M. Estimating the parameters of K distribution using higher order and factional moments. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic System.*, 1999, 35(4): 1453 – 1457.

[9] Blacknell D, Tough J A. Parameter estimation for the K-distribution based on zlog(z). *IEE Proc.-F*, 2001, 148(6): 309 – 312.

[10] Jahangir M, Blacknell D, White R G. Accurate approximation to the optimum parameter estimate for K-distributed clutter. *IEE Proc.-F*, 1996, 143(6): 383 – 390.

郝程鹏： 男，1975 年生，博士生，研究方向为信号处理.

侯朝焕： 男，1936 年生，中国科学院院士，研究员，研究方向为信号处理与大规模集成电路设计.

鄢 锦 ： 男，1968 年生，副研究员，研究方向为水声物理与水声信号处理.