一种新的基于小波变换的白噪声消除方法 [1]

徐　科　　徐金梧

(北京科技大学机械工程学院　北京　100083)

摘　要　本文研究了空间分布不均匀信号和白噪声在小波变换下的不同特性，提出了一种新的基于小波变换的白噪声消除方法。这种方法可以对非平稳信号进行消噪处理，解决了传统信号处理方法对非平稳信号的局限性，并且有快速算法能够加以实现。仿真结果证明这种方法具有很好的去噪效果。

关键词　白噪声，噪声消除，小波变换

中图号　TN911.7

1 引　言

对分析信号进行去噪处理是提高数据的可靠性和数据分析精度的关键。传统的去除噪声的方法主要是采用频谱分析技术，也就是利用傅里叶变换把信号映射到频域内加以分析。这种方法适用于信号是平稳的且具有明显区别于噪声的谱特征，对于非平稳信号就不适合。

由于传统频谱分析技术的局限性，时频分析技术得到了很快的发展。小波分析作为一种新型的时频分析方法，由于其具有良好的时频局部性，并且有快速算法 (Mallat 算法) 加以实现，因而受到了越来越多的关注。 Mallat 曾于 1992 年利用奇异信号和随机噪声在多尺度空间中不同的模极大值特性设计了一种小波消噪方法 [1]，但是这种方法对奇异性大的信号，效果比较好，而对奇异性小的信号，效果就不太理想。本文研究了空间分布不均匀信号和白噪声在小波分解后呈现出的不同特性，提出一种新的基于小波变换的去除白噪声方法，并且给出了仿真结果，说明这种方法可以很好地应用于非平稳信号的去噪处理。

2 小波变换

设 $\varphi(t)$ 是满足条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(\omega)|^2|\omega|^{-1}\mathrm{d}\omega<\infty \tag{1}$$

的平方可积函数，式中 $\hat{\varphi}(\omega)$ 是函数 $\varphi(\omega)$ 的傅里叶变换。那么函数 $f(t)$ 的积分小波变换定义为

$$W_{a,b}f=\langle f,\varphi_{a,b}\rangle=|a|^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{\varphi}(\frac{t-b}{a})\mathrm{d}t, \tag{2}$$

式中， a 称为伸缩因子， b 称为平移因子。

(2) 式表示的是小波变换的连续模型，在实际应用中我们需要将小波变换数字化后加以实现。因此我们假定 (2) 式中的 a 按序列 $[2^j]_{j\in Z}$ 取值，这样就形成了二进小波变换：

$$W_{2^j}f=\langle f,\varphi_{2^j}\rangle=2^{-j}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{\varphi}(\frac{x-t}{2^j})\mathrm{d}t, \tag{3}$$

式中 j 为尺度参数。实际应用中的信号所包含的频率成分总是有限的，我们无需计算 j 上所有尺度的二进小波变换，因此可采用有限尺度上的二进小波变换。

[1] 1997-12-29 收到， 1999-01-09 定稿
国家教委“跨世纪优秀人才计划”基金资助项目

S.Mallat 于 1989 年提出多尺度分析 [2]，通过它可以构造正交小波基。并且在多尺度分析的基础上，产生了有限尺度二进小波变换的 Mallat 算法 [2]。这一算法在小波分析中的地位相当于快速傅里叶变换 (FFT) 在信号频域分析中的地位，它的分解算法可以表述为

$$\left.\begin{aligned} c_k^0 &= f_k, \\ c_k^j &= \sum_n c_n^{j-1}\overline{h}_{n-2k}, \\ d_k^j &= \sum_n c_n^{j-1}\overline{g}_{n-2k}, \end{aligned}\right\} \qquad k = 1,\cdots,N/2^j, \quad j = 1,\cdots,J, \tag{4}$$

式中 f_k 为信号的时域波形， N 为采样点数， $h(n), g(n)$ 为一对正交滤波器 H 和 G 的脉冲响应 [3]， J 为最大分解层数。

信号经 Mallat 分解算法分解之后，还可以用 Mallat 重构算法进行重构，重构算法表述如下：

$$c_k^j = \sum_n c_n^{j+1} h_{k-2n} + \sum_n d_n^{j+1} g_{k-2n}, \quad k = 1,\cdots,N/2^j, \quad j = J-1,\cdots,0. \tag{5}$$

实际应用中，我们可以根据不同信号 (如白噪声和其它信号) 在小波分解后表现出的不同特性，对小波分解后的信号进行处理，并且把处理后的信号加以重构，就可以实现信噪分离或滤波的目的。

3 小波去噪模型

给定带噪声的信号

$$y_i = f(t_i) + e_i, \quad i = 1,\cdots,N, \tag{6}$$

式中 $t_i = i/N, e_i$ 是方差为 σ^2 的高斯白噪声，即 $N(0,\sigma^2)$。

用一 $N \times N$ 的正交矩阵 W 代表 (4) 式所示的小波分解的算子，则 (6) 式所示信号 y 的小波分解可以表示为

$$w = Wy. \tag{7}$$

向量 w 称为信号 y 的小波系数，共有 N 个元素。为方便起见，我们将 w 分为 J 列，并且用

$$w_{j,k}: \qquad j = 1,\cdots,J; \quad k = 1,\cdots,N/2^{j-1}$$

表示。由于 W 是正交矩阵，因此

$$y = W^{-1}w = W^T w. \tag{8}$$

下面两个关于小波系数的特性是我们构造小波去噪模型的出发点：

(1) 对于空间分布不均匀函数，其小波系数 $w_{j,k}$ 只是在少数的 (j,k) 点有大的值，而大部分的 (j,k) 点的 $w_{j,k}$ 值很小；

(2) 对于白噪声，它对所有小波系数 $w_{j,k}$ 的影响是一样的。事实上，由于 e_i 是白噪声，因此它的正交变换 $z_{j,k} = We_i$ 也是白噪声，即 $z_{j,k}$ 在整个 $\{j,k|j = 1,\cdots,J;\ k = 1,\cdots,N/2^j\}$ 域上的分布是一致的。

由上面两个特性可以得到，白噪声 e_i 对所有 (j,k) 点的小波系数 $w_{j,k}$ 都有影响，而信号 $f(t_i)$ 只对极少数 (j,k) 点的小波系数 $w_{j,k}$ 有影响。如果我们把低于某个阈值 λ 的 (主要

由白噪声引起) 设为 0 ，而保存高于阈值 λ 的 $w_{j,k}$(主要由信号 $f(t_i)$ 引起) 。经这样处理之后的 $w_{j,k}$ 就可以理解为基本上是由信号 $f(t_i)$ 引起的，再用 (5) 式对 $w_{j,k}$ 进行重构，重构后得到的信号就是信号 $f(t_i)$ 的估计值。因此我们可以建立如下的模型。

(1) 计算信号 y 的小波系数 $w_{j,k}$ 。可以采用 (4) 式所示的快速算法。

(2) 令 $\lambda=\sigma\sqrt{2\log(n)}$ ，定义

$$\eta_\lambda(y)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(y)(|y|-\lambda), & |y|\ge\lambda;\\ 0, & |y|<\lambda,\end{cases} \tag{9}$$

并且把 $w_{j,k}$ 代入 (9) 式，得到 $\hat{\theta}=\eta_\lambda(w_{j,k})$ 。

(3) 对 $\hat{\theta}$ 进行重构，得到 $f(t_i)$ 的估计值 $\hat{f}(t_i)=W^T\hat{\theta}$ 。

实际运算中，可以采用 (4) 式和 (5) 式进行小波分解和重构，运算速度很快。

4 仿真结果

图 1 是不加噪声的两个测试信号， (a) 是 Heavisine 信号，就是正弦信号加上两个不连续点； (b) 是 Doppler 信号，就是频率随时间变化的正弦信号。这两个信号是比较典型的非平稳信号。图 2 是加上噪声之后的两个测试信号，其信噪比均为 7.0dB ，噪声是 $\sigma=1$ 的标准白噪声。对图 2 中的测试信号用上述小波去噪模型进行去噪处理，得到去噪后的信号如图 3 所示，由图 3 可以看出，去噪后的信号与图 1 中的原信号相比几乎不失真。计算得到其信噪比分别提高到 22.5dB(a) 和 15.7dB(b) ，达到了很好的去噪效果。

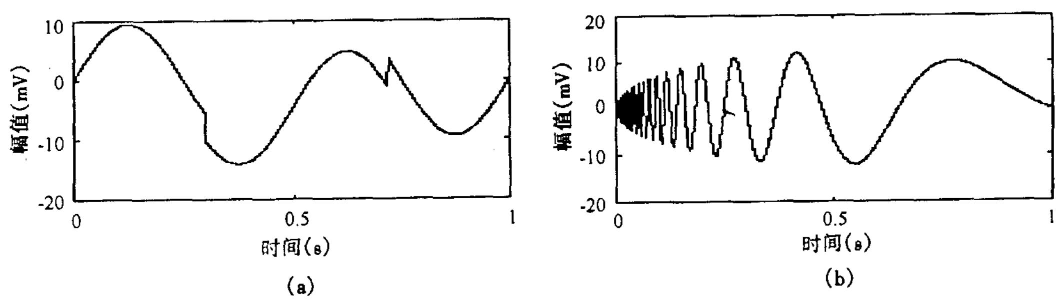

图 1 用于测试的不加噪声信号

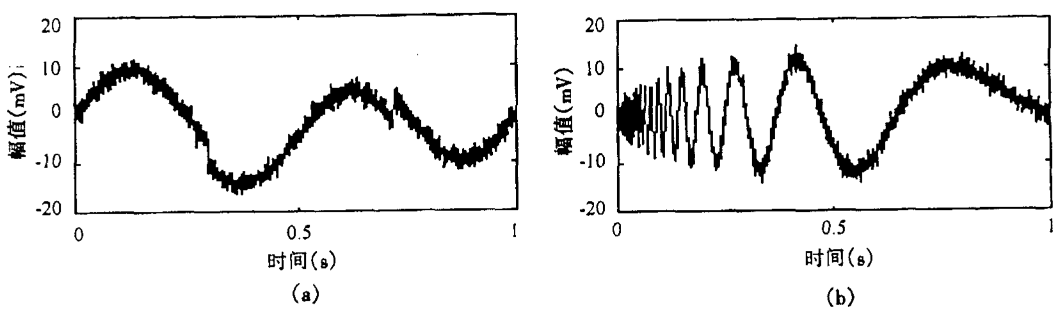

图 2 加上噪声后的测试信号

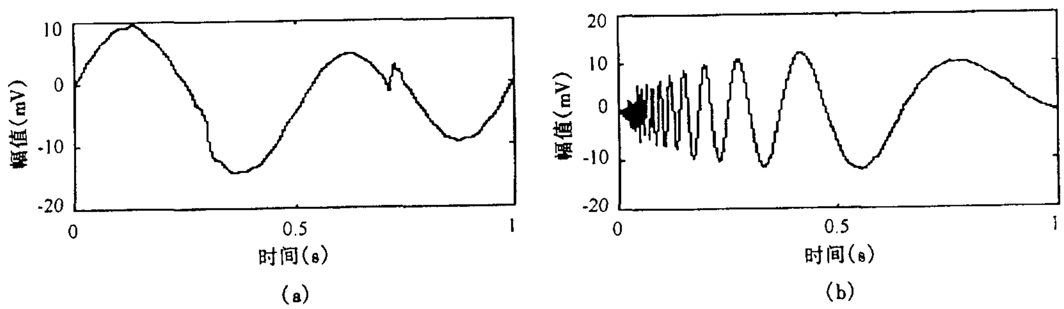

图 3　去噪后的测试信号

同样，对图 1(a) 和图 1(b) 信号在信噪比为 3dB 的情况下进行去噪处理，可以得到去噪后信号的信噪比分别提高到 18.1dB 和 12.3dB；对图 1(a) 和图 1(b) 信号在信噪比为 0dB 的情况下进行去噪处理，可以得到去噪后信号的信噪比分别提高到 13.1dB 和 9.3dB 。因此这种去噪方法在信号信噪比低的情况下也能得到很好的去噪效果。

5 结　论

本文根据空间分布不均匀函数和白噪声在小波分解后的不同特性，运用统计信号处理的一些理论，提出了一种新的基于小波变换的白噪声消除方法。通过仿真结果，说明了这种方法具有很好的降噪效果，能够有效地应用于非平稳信号的去噪处理。

参　考　文　献

[1] Mallat S. Singularity detection and processing with wavelets. IEEE Trans. on IT, 1992, IT-38(2): 617–642.

[2] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Trans. on PAMI, 1989, PAMI-11(7): 674–693.

[3] Daubechies I. Orthonomal bases of compactly supported wavelets. Comm. Pure and Appl. Math. 1988, 41: 909–996.

A NEW METHOD FOR WHITE NOISE REDUCTION BASED ON WAVELET TRANSFORM

Xu Ke　　Xu Jinwu

(*Faculty of Mechanical Eng., Beijing University of Science and Technology, Beijing* 100083)

Abstract　This paper reviews different properties of non-stationary signals and white noise after wavelet decomposition, and presents a new method of white noise reduction based on wavelet transform which can be realized with fast algorithm. The simulation results show that the method can be applied to white noise reduction of non-stationary signals efficiently.

Key words　White noise, Noise reduction, Wavelet transform

徐　科：　男，1972 年生，博士后，主要从事信号处理、小波分析和机械设备故障诊断等研究工作，发表论文 8 篇．

徐金梧：　男，1949 年生，教授，博士生导师，主要从事机械设备故障诊断和智能控制等研究工作，获省部级科技进步奖 3 项，发表论文 70 余篇，专著 3 本．