

适用于 LPTV 系统的周期自适应滤波器的研究¹

陈 晶 王宏禹 邱天爽

(大连理工大学电子与信息工程学院 大连 116023)

摘 要 该文讨论了平稳(或周期平稳)随机信号通过线性时不变(或周期时变)系统后,输出信号的周期平稳性质,给出了两种可用于线性周期时变(LPTV)系统的周期自适应滤波器算法和一种系统周期的自适应估计算法;仿真结果表明了上述算法的有效性。

关键词 周期时变系统, 周期平稳, 自适应滤波器

中图分类号 TN911.72, TN713

1 引 言

随机信号的处理在生产、生活和科研中起着十分重要的作用。平稳随机信号的处理已经有了一套比较完整的理论^[1],并被广泛地应用于各个领域。相对而言,实际中更多的是要面对大量的非平稳随机信号。将非平稳近似为平稳是常用的方法。在某些场合下,这种近似是可以接受的;大多数情况下则是不能接受的,特别是在必须研究信号的非平稳特性时。目前对于非平稳随机信号的研究还处在起步阶段,理论还不完善,这也是非平稳随机信号的研究成为信号处理领域内热点课题的原因^[2-3]。

在产生非平稳随机信号的物理模型中有一类特殊的物理模型,其模型参数随时间的推移而呈现周期性地改变。例如:在机械故障诊断中,齿轮等零件周期性旋转而产生的震动信号的模型;由于人体规律性作息,一天内不同时刻对相同刺激产生不同脑电信号的模型等。这类常见而又特殊的系统一般称为周期时变系统^[1],若系统还是线性的,则称为线性周期时变(LPTV)系统。描述 LPTV 系统可使用 Green 函数 $g(t, u)$ 或时变冲激响应 $h(t, u)$,且有 $h(t, u) = g(t, t - u)$ 。

非平稳随机信号当中有一类被称为周期平稳随机信号^[2-4]。简单地说,周期平稳随机信号是信号的统计特性随着时间的推移而呈现出周期性的变化。周期平稳随机信号可认为是对平稳随机信号的推广;同时,它又在一定程度上体现出信号的非平稳性。周期平稳随机信号具有以循环自相关函数和循环功率谱密度^[2-4]为代表的许多新参数以及这些参数所固有的一些性质。本文先讨论(周期)平稳随机信号通过线性时不变(周期时变)系统后的情况;然后给出两种可用于 LPTV 系统的周期自适应滤波器实现算法:自适应滤波器组直接实现算法和基于时间基函数展开的自适应滤波器实现算法;针对这两种算法实现的关键问题——LPTV 系统周期的估计,这里另给出一种实用的自适应估计算法;最后给出相应算法的计算机仿真结果。

2 平稳随机信号通过线性周期时变系统

设连续、复随机信号 $x(t)$, 经过 Green 函数为 $g(t, u)$ 的线性时变系统后的输出是 $y(t)$, 则

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u)x(u)du \quad (1)$$

(1) 式中积分限取无穷,是为了更具一般性(以下相同)。对 LPTV 系统而言,若系统的周期为 T , 系统 Green 函数 $g(t, u)$ 还满足 $g(t + T, u + T) = g(t, u)$ 。定义 $x(t)$, $y(t)$ 的时变自相关函

¹ 2001-11-22 收到, 2002-05-20 改回

国家自然科学基金(60172072)资助项目、辽宁省科学技术基金(2001101057)资助项目

数分别为

$$R_x(t, \tau) = E[x(t)x^*(t + \tau)] \quad (2)$$

$$R_y(t, \tau) = E[y(t)y^*(t + \tau)] \quad (3)$$

(2), (3) 式中 $E[\cdot]$ 表示求统计平均, $x^*(t)$ 表示求 $x(t)$ 的共轭, 由 (1) 式可推出

$$y^*(t + \tau) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t + \tau, u)x(u)du \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(t + \tau, u)x^*(u)du \quad (4)$$

将 (1), (2) 和 (4) 式代入 (3) 式, 可进一步求出 $R_y(t, \tau)$ 与 $R_x(t, \tau)$ 之间的关系

$$\begin{aligned} R_y(t, \tau) &= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u)x(u)du \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(t + \tau, v)x^*(v)dv \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u)g^*(t + \tau, v)E[x(u)x^*(v)]dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u)g^*(t + \tau, v)R_x[u, v - u]dudv \end{aligned} \quad (5)$$

根据输入信号和线性系统的不同条件, 下面分成 4 种情况进行讨论. 讨论中将用到这样一些结论: 若输入信号 $x(t)$ 平稳, 则自相关函数与时刻无关, 即 $R_x(u, v - u) = R_x(v - u)$; 若输入信号 $x(t)$ 周期平稳, 且循环周期为 T_x , 则其自相关函数满足 $R_x(t + T_x, \tau) = R_x(t, \tau)$; 若系统线性时不变, 其 Green 函数与时刻无关, 即 $g(t, u) = g(t - u)$; 若系统是 LPTV 系统, 且周期为 T_g , 其 Green 函数满足 $g(t, u) = g(t + T_g, u + T_g)$.

(1) 在平稳输入、时不变系统的情况下, 系统输出仍是平稳的^[1].

(2) 在周期平稳输入, 时不变系统的情况下, 系统输出是周期平稳的, 且循环周期不变^[5].

(3) 在平稳输入, 周期时变系统的情况下, (5) 式可化为

$$R_y(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u)g^*(t + \tau, v)R_x(v - u)dudv \quad (6)$$

相应地, 用 $u = a + T_g, v = b + T_g$ 进行变量代换, $R_y(t + T_g, \tau)$ 可化为

$$R_y(t + T_g, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, a)g^*(t + \tau, b)R_x(b - a)dadb \quad (7)$$

对比 (6) 式与 (7) 式, 除了积分变量不同外, 其余相同, 即 $R_y(t + T_g, \tau) = R_y(t, \tau)$. 这表明平稳随机信号通过线性周期时变系统后的输出是周期平稳的, 且输出的循环周期与系统的线性时变周期 T_g 相同.

(4) 在周期平稳输入, 周期时变系统的情况下, (5) 式可化为

$$R_y(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u)g^*(t + \tau, v)R_x(u, v - u)dudv \quad (8)$$

设 T_x 与 T_g 的最小公倍数为 T , 即 T_x, T_h 满足 $T = pT_x, T = qT_g$, 这里的 p, q 为自然数. 用 $u = a + T, v = b + T$ 进行变量代换, 并考虑到 $g^*(t + T + \tau, b + T) = g^*(t + \tau, b)$,

$g(t+T, a+T) = g(t+qT_g, a+qT_g) = g(t, a)$, $R_x(a+T, b-a) = R_x(a+pT_x, b-a) = R_x(a, b-a)$, 则 $R_y(t+T, \tau)$ 可化为

$$R_y(t+T, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, a) g^*(t+\tau, b) R_x(a, b-a) da db \quad (9)$$

对比 (8) 式与 (9) 式, 除了积分变量不同外, 其余相同, 即 $R_y(t+T, \tau) = R_y(t, \tau)$. 这表明周期平稳随机信号通过线性周期时变系统后的输出仍是周期平稳的, 且输出信号的循环周期是输入信号的循环周期 T_x 与系统线性时变周期 T_g 的最小公倍数.

在上述讨论的各种情况中, 对适用于第 1 种情况的自适应滤波器已有众多研究; 对适用于第 2 种情况的自适应滤波器, 笔者已做了研究^[5]; 第 3、第 4 种情况的自适应滤波器, 迄今尚未见到. 对有多个循环周期的信号, 可以得到类似的结论, 这里就不再赘述.

3 周期自适应滤波器

自适应滤波器 (Adaptive filter) 在回波消除、信道均衡、系统辨识^[1,3,6,7] 等方面有广泛的应用, 研究适用于 LPTV 系统的自适应滤波器有明显的理论价值和应用前景. 习惯上称这种滤波器为周期自适应滤波器. 由于适用于上述第 3、第 4 种情况的周期自适应滤波器的区别仅在循环周期不同, 只要注意这一点就可以统一研究. 下面给出两种新的实现算法.

3.1 自适应滤波器组直接实现算法

分别用 $x(n)$, $y(n)$ 和 $g(n, m)$ 代表 LPTV 系统 (周期为 T) 输入、输出和系统 Green 函数 (满足 $g(n+T, m+T) = g(n, m)$). 三者之间的关系可写为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(n, m) x(m) \quad (10)$$

引理^[8] 具有 Green 函数 $g(n, m)$ 的 LPTV 系统稳定的充要条件是 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |g(n, m)| < \infty$.

由引理可知, $g(n, m)$ 应是渐进衰减的, 即 $\lim_{m \rightarrow \infty} g(n, m) = 0, \forall n$. 因此, 可认为对 n 时刻输出有贡献的输入仅有 N 有限项. 另外, 物理可实现的 LPTV 系统一定是因果系统, 因此 (10) 式求和上限应为 n . 重写 (10) 式如下:

$$y(n) = \sum_{m=n-(N-1)}^n g(n, m) x(m) \quad (11)$$

(11) 式可以用时变脉冲响应 $h(n, m) = g(n, n-m)$ 表示如下:

$$y(n) = \sum_{m=n-(N-1)}^n h(n, n-m) x(m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(n, m) x(n-m) \quad (12)$$

而 $h(n, m)$ 满足 $h(n+T, m) = g(n+T, n+T-m) = g(n, n-m) = h(n, m)$, 相应地, 在

$n+1, \dots, n+T, n+T+1, \dots$ 各时刻, (12) 式可写为

$$\left. \begin{aligned} y(n+1) &= \sum_{m=0}^{N-1} h(n+1, m)x(n+1-m) \\ &\vdots \\ y(n+T) &= \sum_{m=0}^{N-1} h(n+T, m)x(n+T-m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(n, m)x(n+T-m) \\ y(n+T+1) &= \sum_{m=0}^{N-1} h(n+T+1, m)x(n+T+1-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h(n+1, m)x(n+T+1-m) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

为求解 $h(n, m)$, 可以构成适当的自适应滤波器组, 用 LMS 算法^[1,6] 进行。图 1 给出了根据 (13) 式构成的自适应滤波器组的框图, 其中 $x(n)$ 为输入; $d(n)$ 为期望信号; $e_0(n), e_1(n), \dots, e_{T-1}(n)$ 为各个子自适应滤波器的输出误差信号; $e(n)$ 为最终的输出误差信号, 它仅是 $e_0(n), e_1(n), \dots, e_{T-1}(n)$ 按周期 T 的轮流输出 (开关 $K_0, K_1, \dots, K_{T-1}$ 按周期 T 轮流闭合, 开关 K 与它们同步)。图 1 仅是原理上的说明, 具体实现时还可以进行很多简化 (如输入信号 $x(n)$ 的延迟线就可以公用), 以提高处理效率。

3.2 基于时间基函数展开的实现算法

对于某一个 u , $h(t, u)$ 是一个时间函数, 因此 $h(t, u)$ 可以写成时间基函数的线性组合^[2,9]。基函数一般应选择正交完备的 (如三角函数、沃尔什函数等)。LPTV 系统的 $h(t, u)$ 呈现周期性的变化, 将其展开成三角函数较为方便。根据 Fourier 级数的有关理论^[9], 只要 $h(t, u)$ 满足所谓的 Dirichlet 条件 (实际物理系统一般都能满足), 它就能展成三角级数。对 $h(t, u)$ 的离散

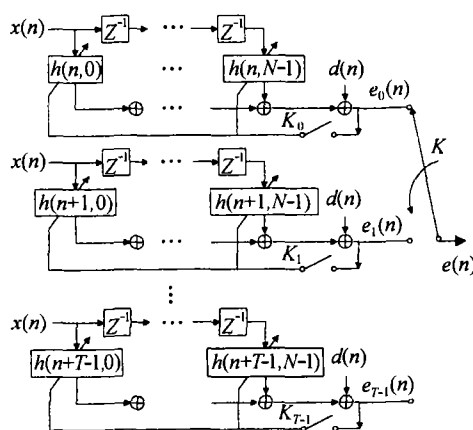


图 1 自适应滤波器组直接实现方法框图

形式 $h(n, m)$ 也有类似的结论, 即对某一个固定的 m 有

$$h(n, m) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_{k,m} \cos \left(kn \frac{2\pi}{T_h} \right) + b_{k,m} \sin \left(kn \frac{2\pi}{T_h} \right) \right] \quad (14)$$

其中 $a_{k,m}, b_{k,m}$ 是与 m 有关的常系数, T_h 为 LPTV 系统的周期. 实际上, 在一定误差范围内, (14) 式中 k 的取值范围不必到 ∞ , 例如仅取 s 项就足够了, s 也常常被称为基的程度. 将 (14) 式代入 (12) 式, 就可以将原来的时变系数问题化为非时变的常系数问题. 当然, 这样做的代价是原来问题的规模将要扩大 (未知数的数目将要增加). 不过考虑问题从时变到时不变的转化, 付出这样的代价也是值得的. (12) 式最终可化为

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} \left\{ x(n-m) \sum_{k=0}^{s-1} \left[a_{k,m} \cos \left(kn \frac{2\pi}{T_h} \right) + b_{k,m} \sin \left(kn \frac{2\pi}{T_h} \right) \right] \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{s-1} \left[a_{k,m} x(n-m) \cos \left(kn \frac{2\pi}{T_h} \right) + b_{k,m} x(n-m) \sin \left(kn \frac{2\pi}{T_h} \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

为了求解 $a_{k,m}, b_{k,m}$, 可通过构成适当的自适应滤波器, 用 LMS 算法^[1,6,10]进行. 很明显, 自适应滤波器阶数应为 $2Ns$. 值得注意的是, 自适应滤波器的输入由 $x(n)$ 生成, 而不能用简单的抽头延迟线构成, 具体的信号框图如图 2 所示. 其中 $d(n)$ 为期望信号, $e(n)$ 为误差信号. 图 2 仅是原理上的说明, 具体实现时可以进行很多简化 (如乘数为 1 时, 不需乘法运算), 以提高处理效率.

4 系统时变周期的自适应估计算法

对于实际应用而言, 如何确定 LPTV 系统的周期 T 是一个比较棘手的问题. 如果能够根据先验知识确定是最好的. 在没有先验知识的情况下, 第 2 节已经证明: 时变周期 T 与 $y(t)$ 的循环频率有关. 因此可通过估计 $y(t)$ 的循环频率来估计 T . 参考文献 [2, 4, 11-14] 中给出一些估计信号循环频率 (周期) 的方法. 这里再给出一种周期 T 的自适应估计方法.

LMS 算法在原理上是一个反馈系统, 跟踪速度有限. 若自适应滤波器当前工作周期 T' 与真实周期 T 不同时, 自适应滤波器增益 $G = \Sigma d^2(n) / \Sigma e^2(n)$ 将显著下降^[7]. 这里的算法将利用这一性质. 估计算法框图如图 3 所示. 设 T 的可能取值有 J 个, $T_1, T_2, \dots, T_J$. 按图 3 设置 J 个自适应滤波器, 每个滤波器的工作周期取 T 的一个可能的值. 在这些滤波器较充分地收敛后, 比较各个滤波器的 G 值, 并找出最大 G 值对应的周期 $T_{\max G}$. $T_{\max G}$ 就是 T 的一个较好的估值. 将估计出来的时变周期传送到第 2 部分提到的时变自适应滤波器中, 就可以进行正常的滤波处理了. 实际计算时, 不必真正算出 G 值, 由于 $d(n)$ 是同一信号, 直接比较 $e(n)$ 功率 (能量) 即可.

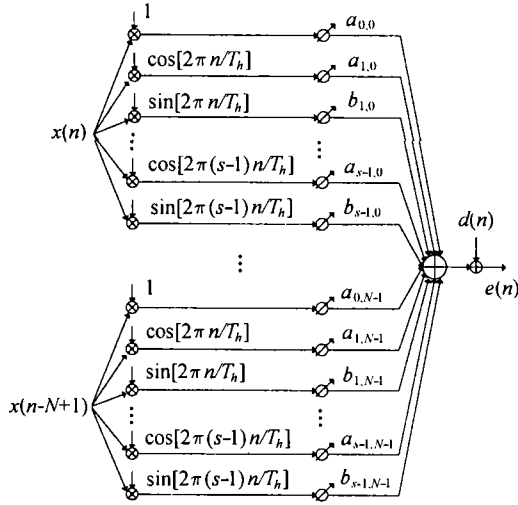


图 2 基于时间基函数展开的自适应滤波器信号框图

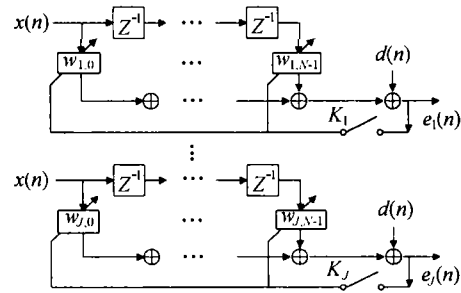


图 3 时变周期 T 的估计数字信号处理算法框图
(开关 $K_1, \dots, K_J$ 分别按 $T_1, \dots, T_J$ 周期闭合)

5 周期自适应滤波器算法性能分析

(1) 对自适应滤波器组直接实现算法而言, 其中每一个子滤波器均是平稳输入情况下的普通的自适应滤波器。这种情况下自适应滤波器的性能, 前人分析已经比较详细^[1], 此处不再赘述。由于每个子自适应滤波器每过 T 间隔才有一个数据输入、能进行一次调整, 因此在其它情况相同时, 就收敛速度而言, 该自适应滤波器组将比同阶的普通自适应滤波器慢 T 倍。

(2) 对基于时间基函数展开的实现算法而言, 在输入是白噪声的情况下的性能, 前人分析已经比较详细^[1], 此处不再赘述; 在输入是有色噪声的情况下的性能, 就收敛速度而言, 由于三角级数展开有一定的去相关作用^[7](“白化”输入信号), 因此周期自适应滤波器将比同阶的普通自适应滤波器快一些。实际中具体能快多少将取决于输入信号自相关阵特征值的分散程度。

对于准周期的线性时变系统, 由于自适应滤波器所固有的自适应特性, 上述周期自适应滤波器仍能很好地工作。

6 仿真与结论

(1) LPTV 系统周期 T 的自适应估计算法仿真所用的系统是一个时变 FIR 系统, 其归一化周期为 8, 每个 FIR 滤波器的阶数都是 64。将均匀分布的白噪声^[15]输入该系统, 系统输出作为目标信号 $d(n)$ 。为考察噪声对算法性能的影响, 在 $d(n)$ 中加入 -10dB , -20dB , -30dB 的白噪声。仿真时假设这些条件未知。仿真使用 $J(J=20)$ 个自适应滤波器。自适应时间为 20000 个数据点, 以保证自适应滤波器充分收敛。仿真结果见图 4。可以看出: 尽管加入噪声大小不同, 但在归一化周期为 8 处, 输出误差有极小值, 相应自适应滤波器增益是极大值, 这就表明了系统的归一化周期是 8。

(2) 仿真 3.1 节中算法的 LPTV 系统同上。为考察噪声对算法性能的影响, 在 $d(n)$ 中加入约 -30dB 的白噪声。仿真时假设这些条件未知。仿真结果见于图 5, 纵坐标代表周期自适应滤波器的对数系统增益^[7]。由图 5 可见, 普通 LMS 算法基本上未收敛。笔者对经典的 RLS 算法也进行了仿真, 结果是算法发散。

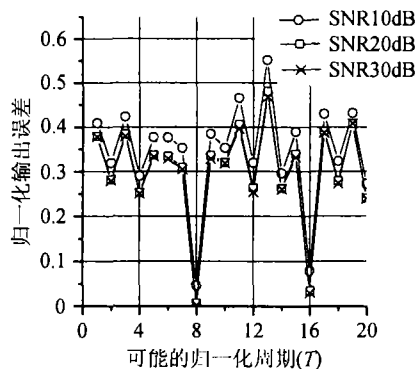


图4 时变周期的自适应估计算法仿真结果

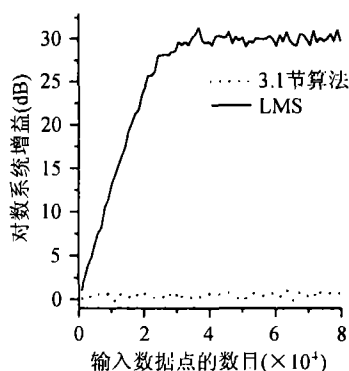


图5 自适应滤波器组直接实现算法仿真结果

(3) 产生一段在 $[-1, 1]$ 区间均匀分布的白噪声^[15]。将该白噪声通过传递函数为 $A(Z) = 31.62/(1 - 0.999Z^{-1})$ 的低通系统后, 去调制归一化周期为 10 的正弦波, 就得到一个二阶周期平稳随机信号 $x(n)$, 其归一化循环周期为 5。仿真所用的 LPTV 系统是 FIR 系统, 系统的归一化周期是 3, 每个 FIR 滤波器的阶数都是 64。将均匀分布的白噪声输入该系统, 系统输出作为目标信号 $d(n)$ 。为了考察噪声对算法性能的影响, 在 $d(n)$ 中加入约 -30dB 的白噪声。仿真时假设这些条件未知, 仿真结果见图 6。图 6 中曲线分别是 3.2 节算法 (基的程度 $s = 2, 4, 6, 10$) 和通常 LMS 算法的对数系统增益^[7]。由图 6 可见, 通常 LMS 算法基本上未收敛。一般情况是三角函数展开所取的项数越多, 逼近误差越小。 $s = 2$ 时逼近误差较大, 因此对数系统增益也较小 (与通常 LMS 算法差不多); $s = 4, 6$ 时, 情况逐渐变好; 由于 Gibbs 现象^[9] 及权失调^[1] 的影响, 基的程度 s 大到一定数值后 ($s = 10$), 系统增益的改善程度就不十分明显了, 而运算量将要增加很多。所以在实用中还有一个合理选择基的程度的问题。在这里, 经典的 RLS 算法仿真结果也是算法发散。

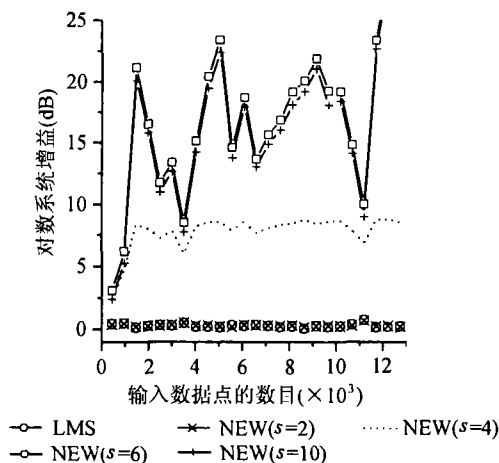


图6 基于时间基函数展开的实现算法仿真结果

参 考 文 献

- [1] 王宏禹, 随机数字信号处理, 北京, 科学出版社, 1988, 第 1, 7, 8 章.
- [2] 王宏禹, 非平稳随机信号分析与处理, 北京, 国防工业出版社, 1999, 第 1, 9 章.
- [3] 李立霞, 王文博, 王德隽, 周期平稳随机信号处理及其应用, 电子科学学刊, 1996, 18(3), 310-316.
- [4] W. A. Gardner, The spectral correlation theory of cyclostationary time-series, Signal Processing, 1986, 11(7), 13-36.
- [5] 陈 喆, 王宏禹, 基于二阶循环统计量的 LMS 算法, 大连理工大学学报, 2002, 42(2), 234-237.
- [6] B. Widrow, A. D. Stearns 著, 王永德, 等译, 自适应信号处理, 成都, 四川大学出版社, 1989, 第 2, 5, 6, 12 章.
- [7] 王宏禹, 邱天爽, 自适应噪声抵消与时间延迟估计, 大连, 大连理工大学出版社, 1999, 第 3 章.
- [8] 王宏禹, 数字信号处理专论, 北京, 国防工业出版社, 1995, 第 4 章.
- [9] 南京工学院数学教研组, 积分变换 (第三版), 北京, 高等教育出版社, 1993, 第 1 章.
- [10] 崔滔, 魏本涛, 扩频信号频域相关自适应滤波技术的研究, 西安电子科技大学学报, 1999, 26(3), 337-341.
- [11] 王成毅, 王宏禹, 循环谱密度的两通道最大熵谱估计, 电子科学学刊, 1999, 21(4), 461-466.
- [12] J. R. Fonollosa, C. L. Nikias, Analysis of transient signals using high-order time-frequency distributions, IEEE, ICASSP, The San Francisco Marriott USA, 1992, 197-200.
- [13] G. B. Giannakis, A. V. Dandawate, Polyspectral analysis of (almost)cyclostationary signals, LPTV system identification and related applications, Proc. 25th Asilomar Conference on Signals System and Computers, Pacific Grove, California, USA, 1991, 377-382.
- [14] F. Dominique, J. H. Reed, Estimating spectral correlation using the least mean square algorithm, Electronics letters, 1997, 33(3), 182-184.
- [15] 殷福亮, 宋爱军, 数字信号处理 C 语言程序集, 沈阳, 辽宁科学出版社, 1997, 第 1 章.

THE STUDY OF PERIOD ADAPTIVE FILTER FOR LPTV SYSTEM

Chen Zhe Wang Hongyu Qiu Tianshuang

(School of Electron. and Info. Eng., Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract In this paper, the cyclostationary property of output signal of the system is discussed, when a stationary(or cyclostationary) signal passes a linear period time variant(or time invariant) system. Two kinds of time variant adaptive filter are presented, which can be used in linear period time variant system. At same time, an algorithm for period of LPTV system is also presented. Simulation results indicate the efficiency of these algorithms.

Key words Period time variant system, Cyclostationary, Adaptive filter

陈 喆: 男, 1975 年生, 博士生, 目前的主要研究方向是非平稳随机数字信号处理.

王宏禹: 男, 1929 年生, 教授, 博士生导师, 目前的主要研究方向是随机与时变数字信号处理.

邱天爽: 男, 1954 年生, 教授, 博士生导师, 目前的主要研究方向是自适应信号处理、生物医学信号处理.