

导电媒质包围的球形空腔内的 圆环天线的特性*

袁 翊

(海军司令部通信部, 北京)

摘要 本文导出了导电媒质在被其包围的球形空腔中的圆环天线内产生的输入阻抗的公式。描述了导电媒质中天线辐射性能的定义。导出了圆环天线的辐射电阻公式。数值计算结果表明所得的两个公式收敛迅速, 一般只需取第一项或前两项之和即可。探讨了这些数值与空腔半径等参数之间的关系。

关键词 圆环天线; 导电媒质; 输入阻抗; 辐射电阻

一、引言

在实际情况下, 圆环天线常处于导电媒质包围的球形空腔之内作接收天线用, 如图1所示。工作在这样环境中的圆环天线, 由于周围导电媒质的影响, 使其输入阻抗和辐射性能与工作在自由空间的环形天线有很大的不同。导电媒质引起的输入阻抗包括电阻和电抗两部份。电阻部份是导电媒质引起的损耗电阻, 它增大天线的噪声, 降低接收系统的灵敏度, 故应尽量减小。天线输入阻抗的改变要求相应地改变接收机的输入回路, 以使天线和接收机之间达到最佳匹配。因此, 对导电媒质产生的输入阻抗的计算, 以及对该阻抗与球形空腔大小等参数的关系的分析, 是很有必要的。导电媒质中天线辐射性能的定义在一般文献中均未涉及, 本文对此进行了描述, 并导出了导电媒质中圆环天线的辐射电阻公式。这对于确定天线的接收性能, 进行通信系统设计是很有必要的。

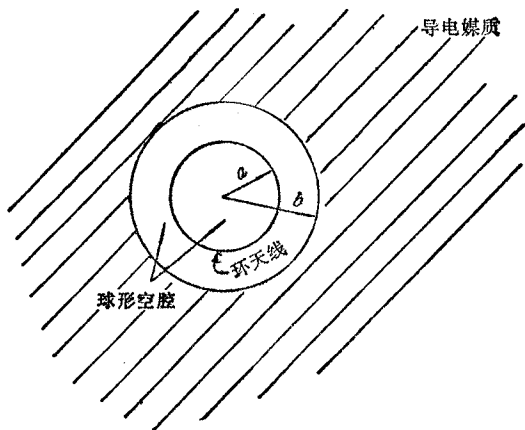


图1 圆环天线平面的剖面图

* 1988年4月11日收到, 1989年9月22日修改定稿。

二、矢位公式的推导

取球坐标系 r, φ, θ , 令坐标原点位于圆环天线中心, 赤道平面 ($\theta = 90^\circ$ 平面) 与天线平面重合, 球形空腔中心亦与坐标原点重合. 设环天线的半径 $a \ll \lambda$ (自由空间的工作波长), 并认为天线上的电流为常数 (不随 φ 变化). 在这些条件下, 圆环天线产生的矢位 $\mathbf{A}$ 只有 A_φ 分量, 且不随 φ 变化. 导电媒质产生的二次矢位显然也只有 A_φ 分量, 同样不随 φ 变化. 因此, 所讨论问题的矢位均可由下式求出^[1].

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) + k^2 r^2 A_\varphi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{A_\varphi}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (1)$$

如取 $e^{-j\omega t}$ 作为电磁场的时间变化因子, 则在导电媒质中波数 k 由下式决定.

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon + j\omega \mu \sigma \quad (2)$$

式中, σ, μ 和 ε 是媒质的导电率、导磁系数和介电系数. 在自由空间中波数如以 k_0 表示, 则

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \quad (3)$$

式中, μ_0 和 ε_0 是自由空间的导磁系数和介电系数.

(1) 式可用分离变数法求解. 包含变数 θ 的方程的解为第一类和第二类一阶连带勒让德函数的线性组合, 但这些解的大部份在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 处有奇异点, 只有第一类一阶连带勒让德函数 $P_n^1(\cos \theta)$ 当 n 为整数时除外. 此外, 第一类一阶勒让德函数当 n 为奇数时是相对于 $\theta = 90^\circ$ 的偶函数, 而当 n 为偶数时则为奇函数. 在本问题中, 电磁场对称于赤道平面, 而且对于任何 θ 值均应为有限值, 所以(1)式的解应该写成

$$A_\varphi = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^{\infty} [A'_{2m+1} J_{2m+\frac{1}{2}}(kr) + B'_{2m+1} H_{2m+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr)] P_{2m+1}^1(\cos \theta) \quad (4)$$

式中, $P_{2m+1}^1(\cos \theta)$ 是第一类一阶连带勒让德函数, $J_{2m+\frac{1}{2}}(kr)$ 是复宗量的贝塞尔函数, $H_{2m+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr)$ 是复宗量的第一类汉克耳函数 A'_{2m+1} 和 B'_{2m+1} 为系数.

为了求得导电媒质在圆环天线内产生的输入阻抗, 必须求出导电媒质在空腔 $a < r < b$ 区域内产生的矢位, 而且要使它与天线电流联系起来. 为此, 把该区域内的矢位表示成天线本身(不存在导电媒质时)产生的矢位和导电媒质产生的矢位两者之和. 圆环天线本身(不存在导电媒质时)在 $r > a$ 的区域产生的矢位, 由于在无穷远处应满足辐射条件, 故有

$$A_{\varphi 1}^p = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1} H_{2m+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 r) P_{2m+1}^1(\cos \theta), \quad r > a \quad (5)$$

而导电媒质在空腔内产生的矢位为

$$A_{\varphi 1}^s = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1} J_{2m+\frac{1}{2}}(k_0 r) P_{2m+1}^1(\cos \theta), \quad r < b \quad (6)$$

导电媒质中的矢位可以不必分成天线本身产生的和导电媒质产生的两部份之和, 可以用一个总的矢位表示. 由于在无穷远处应满足辐射条件, 所以该矢位为

$$A_{\varphi 2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kr) P_{2m+1}^1(\cos\theta), \quad r > b \quad (7)$$

下面确定公式中的三个系数。首先确定系数 A_{2m+1} 。从文献[2]可知, 具有恒定电流 I 、半径为 a 的圆环在 $r > a$ 区域产生的感应矢位可表示为

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m+1)!!}{(2m+1)(2m+2)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2m+2} P_{2m+1}^1(\cos\theta), \quad r > a \quad (8)$$

在 $k_0 r \ll 1$ 的区域内, 天线的矢位主要是感应矢位, 与辐射场有关的矢位成份可以忽略, 因而(5)式和(8)式应相等。由于宗量很小时, 汉克耳函数可近似地表示为^[3]

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = -j \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{(2n+1)!!}{(2n+1)z^{n+1}} \quad (9)$$

故得

$$A_{2m+1} = j \frac{\mu_0 I}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2k_0}} \frac{(-1)^m (2m+1)!! (k_0 a)^{2m+2}}{(2m+1)(4m+1)!! (2m+2)!!} \quad (10)$$

这样, A_{2m+1} 同天线电流就联系起来了。下面根据边界条件决定系数 B_{2m+1} 和 C_{2m+1} 。因为电磁场与矢位有如下关系:

$$E_{\varphi} = j\omega A_{\varphi}; \quad H_{\theta} = -\frac{1}{\mu r} \left(r \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial r} + A_{\varphi} \right) \quad (11)$$

所以从电场切线分量相等的条件得出

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1} H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(k_0 b) P_{2m+1}^1(\cos\theta) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1} J_{2m+\frac{3}{2}}(k_0 b) P_{2m+1}^1(\cos\theta) \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kb) P_{2m+1}^1(\cos\theta) \end{aligned} \quad (12)$$

由于^[3]

$$\frac{\partial}{\partial r} [Z_{2m+\frac{3}{2}}(kr)] = \frac{k}{2} [Z_{2m+\frac{1}{2}}(kr) - Z_{2m+\frac{5}{2}}(kr)] \quad (13)$$

式中, $Z_{2m+\frac{3}{2}}(kr)$ 为贝塞尔函数或汉克耳函数。故从磁场切线分量相等条件得出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1} H(k_0 b) P_{2m+1}^1(\cos\theta) \\ & + \frac{1}{\mu_0} \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1} J(k_0 b) P_{2m+1}^1(\cos\theta) \\ & = \frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} H(kb) P_{2m+1}^1(\cos\theta) \end{aligned} \quad (14)$$

为了书写简洁, 在上式中引入了符号 $J(z)$ 和 $H(z)$, 其含义是: $J(z) = J_{2m+\frac{3}{2}}(z) + z[J_{2m+\frac{1}{2}}(z) - J_{2m+\frac{5}{2}}(z)]$, $H(z) = H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(z) + z[H_{2m+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) - H_{2m+\frac{5}{2}}^{(1)}(z)]$

显然, 如果无穷级数每一项相等, 那末它们的和肯定相等。所以可令(12)式和(14)式等号两边每一项相等, 这样得

$$A_{2m+1}H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(k_0b) + B_{2m+1}J_{2m+\frac{3}{2}}(k_0b) = C_{2m+1}H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kb) \quad (15)$$

$$\frac{1}{\mu_0} [A_{2m+1}H(k_0b) + B_{2m+1}J(k_0b)] = \frac{1}{\mu} C_{2m+1}H(kb) \quad (16)$$

联解(15)和(16)式,得

$$B_{2m+1} = A_{2m+1} \left[\frac{1}{\mu} H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(k_0b)H(kb) - \frac{1}{\mu_0} H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kb) \right. \\ \left. \times H(k_0b) \right] / \left[\frac{1}{\mu_0} H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kb)J(k_0b) - \frac{1}{\mu} J_{2m+\frac{3}{2}}(k_0b)H(kb) \right] \quad (17)$$

$$C_{2m+1} = \frac{1}{\mu_0} A_{2m+1} [H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(k_0b)J(k_0b) - J_{2m+\frac{3}{2}}(k_0b)H(k_0b)] / \left[\frac{1}{\mu_0} H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kb) \right. \\ \left. \times J(k_0b) - \frac{1}{\mu} J_{2m+\frac{3}{2}}(k_0b)H(kb) \right] \quad (18)$$

从上两式看出,当 $\mu = \mu_0$ 、 $k = k_0$ 时, $B_{2m+1} = 0$, 而 $C_{2m+1} = A_{2m+1}$. 这一结果符合物理事实. 不存在导电媒质时当然也不存在它产生的矢位,而只有圆环天线本身的矢位. 这从一个方面表明以上处理是可行的,运算是正确的.

当宗量很小时,贝塞尔函数的近似表达式为^[3]:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{x^n}{(2n+1)!!} \quad (19)$$

这样,根据(9)和(19)式,(17)和(18)式可简化为

$$B_{2m+1} = -j \frac{(4m+1)!!(4m+3)!!}{(k_0b)^{4m+3}} A_{2m+1} \left[(4m+2) \frac{\mu}{\mu_0} \right. \\ \left. \times H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kb) + H(kb) \right] / \left[(4m+4) \frac{\mu}{\mu_0} H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kb) - H(kb) \right] \quad (20)$$

$$C_{2m+1} = -j \frac{4\mu}{\pi\mu_0} \sqrt{\frac{\pi}{2k_0b}} \frac{(4m+3)!!}{(k_0b)^{2m+1}} A_{2m+1} \\ / \left[(4m+4) \frac{\mu}{\mu_0} H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kb) - H(kb) \right] \quad (21)$$

三、导电媒质引起的输入阻抗公式的推导和数值计算

把 $r = a$ 和 $\cos\theta = 0$ 代入(6)式,即得导电媒质在圆环天线位置产生的矢位. 该矢位在天线内引起的感应电动势为

$$\mathcal{E} = j\omega 2\pi a A_{\phi 1}^s \quad (r = a, \cos\theta = 0) \quad (22)$$

以天线电流 I 除上式,并取负值,即为导电媒质在天线内产生的输入阻抗. 由于

$$P_{2m+1}^1(0) = (-1)^m (2m+2)(2m+1)!! / (2m+2)!! \quad (23)$$

和 $k_0 a \ll 1$, 计及(19)、(20)和(10)式, 可得到输入阻抗公式为

$$\begin{aligned} Z = & -j\pi a \mu_0 \omega \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+2)[(2m+1)!!]^2}{(2m+1)[(2m+2)!!]^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{4m+3} \\ & \times \left[(4m+2) \frac{\mu}{\mu_0} H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kb) + H(kb) \right] \\ & / \left[(4m+4) \frac{\mu}{\mu_0} H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kb) - H(kb) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

在一般情况下, $|kb| \approx 1$, 因而不能用汉克耳函数的近似式进一步简化(24)式。目前尚无复宗量的汉克耳函数表, 因此只能根据下列汉克耳函数的级数表达式计算其值^[3]。

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = j^{-(n+1)} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{jz} \sum_{l=0}^n e^{j\frac{l\pi}{2}} \frac{(n+l)!}{l!(n-l)! 2^l z^l} \quad (25)$$

把(25)式代入(24)式, 简化后, 得

$$\begin{aligned} Z = & j\pi a \mu_0 \omega \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+2)[(2m+1)!!]^2}{(2m+1)[(2m+2)!!]^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{4m+3} \\ & \times \left\{ \left[(4m+2) \frac{\mu}{\mu_0} + 1 \right] \sum_{l=0}^{2m+1} e^{jl(\frac{\pi}{2}-\phi)} \frac{(2m+1+l)!}{l!(2m+1-l)! 2^l (|k|b)^l} \right. \\ & + j|k|b e^{j\phi} \left[\sum_{l=0}^{2m} e^{jl(\frac{\pi}{2}-\phi)} \frac{(2m+l)!}{l!(2m-l)! 2^l (|k|b)^l} \right. \\ & \left. \left. + \sum_{l=0}^{2m+2} e^{jl(\frac{\pi}{2}-\phi)} \frac{(2m+2+l)!}{l!(2m+2-l)! 2^l (|k|b)^l} \right] \right\} \\ & / \left\{ - \left[(4m+4) \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] \sum_{l=0}^{2m+1} e^{jl(\frac{\pi}{2}-\phi)} \frac{(2m+1+l)!}{l!(2m+1-l)! 2^l (|k|b)^l} \right. \\ & + j|k|b e^{j\phi} \left[\sum_{l=0}^{2m} e^{jl(\frac{\pi}{2}-\phi)} \frac{(2m+l)!}{l!(2m-l)! 2^l (|k|b)^l} \right. \\ & \left. \left. + \sum_{l=0}^{2m+2} e^{jl(\frac{\pi}{2}-\phi)} \frac{(2m+2+l)!}{l!(2m+2-l)! 2^l (|k|b)^l} \right] \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

根据(26)式用计算机进行数值计算。表1给出了导电媒质为海水时的某些计算结果。对于海水 $\mu = \mu_0$, 波数 k 的相角 $\phi = \frac{\pi}{4}$, $|k| = \sqrt{2\pi f \mu_0 \sigma}$ 。计算是针对典型的海水导电率和工作频率进行的。表中的 N 为求和时所取的项数, C 表示相对导磁率。这里需要注意, 由于本文所取的时间因子为 $e^{-j\omega t}$, 故感抗为 $-jX$, 容抗为 jX 。

从计算结果中看出: (1). 对于导电媒质为海水的情况, (26)式的收敛速度虽与 b/a 值有关, b/a 愈小, 收敛愈慢, 但即使当 b/a 值为 1.1 时, 收敛仍相当快。若取 $m=0$ 一项, 当 b/a 为 2 时, 误差仅为千分之几, 当 b/a 为 1.1 时, 误差也只有百分之几。因此,

表1 $Z = R - jX$, $C = 1$, $\sigma = 4$, $f = 15000\text{Hz}$

$a = 0.5$								
N	$b = 1$		$b = 0.75$		$b = 0.6$		$b = 0.55$	
	$R \times 10^3$	$X \times 10^4$	$R \times 10^3$	$X \times 10^4$	$R \times 10^3$	$X \times 10^4$	$R \times 10^3$	$X \times 10^4$
0	1.039595	4.507528	1.614967	5.369503	2.207586	5.960881	2.479901	6.170993
1	1.043267	4.509135	1.630485	5.373383	2.254987	5.968514	2.553152	6.180931
3	1.043319	4.509141	1.631213	5.373432	2.260944	5.968755	2.567008	6.181381
5	1.043319	4.509141	1.631218	5.373432	2.261206	5.968758	2.568258	6.181391

$a = 0.1$								
N	$b = 0.2$		$b = 0.15$		$b = 0.12$		$b = 0.11$	
	$R \times 10^3$	$X \times 10^4$	$R \times 10^3$	$X \times 10^4$	$R \times 10^3$	$X \times 10^4$	$R \times 10^3$	$X \times 10^4$
0	1.326736	1.253338	1.815985	1.296032	2.305388	1.321839	2.527897	1.330187
1	1.329686	1.253389	1.828418	1.296128	2.343331	1.322134	2.586510	1.330319
2	1.329727	1.253389	1.828960	1.296130	2.347368	1.322125	2.595340	1.330188
3	1.329728	1.253389	1.829000	1.296130	2.348086	1.322106	2.597564	1.330155

(26)式取 $m = 0$ 一项,精度即可满足要求。(2). 导电媒质引起的损耗电阻比天线在自由空间中的辐射电阻大得多(半径为0.5m的圆环天线在15kHz的辐射电阻为 $1.2 \times 10^{-13}\Omega$)但接近于天线导线的损耗电阻(导线直径1cm时约为 $3 \times 10^{-3}\Omega$). 导电媒质引起的电抗为容抗,比天线本身的感抗在数值上小得多(半径为0.5m,导线直径为0.01m的圆环天线在15kHz的感抗为0.27 Ω),可以忽略不计。(3). 导电媒质引起的输入阻抗随天线半径的变化较为剧烈。当半径变化5倍时,电阻变化约80倍,而电抗变化约320倍。(4). 输入阻抗随空腔半径 b 的缩小而增大。

四、辐射电阻公式的推导和计算

在自由空间中,辐射电阻一般通过对电磁波的波印廷向量在半径趋于无限大的球面上进行面积分求得。在导电媒质中由于媒质的衰减作用,在不同半径球面上求得的波印廷向量积分值各不相同,而在半径趋于无穷大球面上求得的值等于零,因而辐射电阻难于定义,至今未见讨论。本文把辐射电阻理解为天线产生携带能量一直往无穷远处传播的电磁场分量的能力。天线产生的电磁场可分成两部份,一部份携带的能量不往无穷远处传播,只是时而从天线耦合至空间,时而从空间返回天线,这部份电磁场可以称之为感应场;而另一部份携带能量往无穷远处传播,永远离开天线,这部份电磁场称为辐射场或电磁波。辐射电阻只与这后一部份电磁波相联系。在自由空间中,电磁波在传播过程中无损耗,因而在天线外面任何半径球面上对辐射场的波印廷向量进行积分,所求得的辐射电阻值均相同;通常在半径趋于无穷大球面上求辐射电阻,就是为了使辐射场和感应场自动分开。在导电媒质中,把天线产生的总场分成辐射场和感应场两部份,并在遭到媒质衰减之前就对辐射场的波印廷向量进行积分,以求得辐射电阻。这样处理的出发点是把天线

的辐射能力和其周围空间的电波传播条件区分开来。天线周围导电媒质对电波传播的衰减属于电波传播范畴,与天线辐射能力无关。因此,只要把导电媒质包围的球形空腔内的圆环天线产生的辐射场从总电磁场中分离出来,在球形空腔边界处对辐射场的波印廷向量进行面积分,就可以确定该圆环天线的辐射电阻。

从(7)式中把与辐射场有关的矢位分出来。(7)式是无穷级数,它的每一项均含汉克耳函数,而 $\left(2m + \frac{3}{2}\right)$ 阶的汉克耳函数又是由 $(2m + 2)$ 项组成,这些项相应地反比于距离 r 的 $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ 次方,这里 n 取 $0-2m+1$ 间的整数。从这些项随距离的变化规律中可以看出,仅反比 $\sqrt{r}$ 的一项与辐射场有关,其它各项均与辐射场无关。反比于 $\sqrt{r}$ 的项代入(7)式后得到反比于 r 一次方的场量,它携带能量传播至无穷远处;其它各项给出的场量反比于 r 的高次方,在无穷远处的能量为零。汉克耳函数级数中反比于 $\sqrt{r}$ 的项,也是当 $r \rightarrow \infty$ 时的汉克耳函数的渐近表达式,即

$$H_{2m+\frac{3}{2}}^{(1)}(kr) = -(-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr} \quad (27)$$

把(27)式代入(7)式,即得只与辐射场有关的矢位

$$A_{\varphi 2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m C_{2m+1} P_{2m+1}^1(\cos\theta) \quad (28)$$

由此得波印廷向量

$$\begin{aligned} P = & -\frac{\omega}{\pi \mu \sqrt{2}} \frac{e^{-\sqrt{2}|k|r}}{r^2} \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m C_{2m+1} P_{2m+1}^1(\cos\theta) \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m C_{2m+1}^* P_{2m+1}^1(\cos\theta) \end{aligned} \quad (29)$$

式中, C_{2m+1} 左上角的“*”号表示共轭复数。在 $r=b$ 的球面上对(29)式积分,并取负号,所得结果即是辐射功率。用 $I^2/2$ 除辐射功率,即得辐射电阻。由于连带勒让德函数有如下特性^[2]:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi [P_{2m+1}^1(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta &= \frac{2(2m+2)(2m+1)}{4m+3} \\ \int_0^\pi P_j^1(\cos\theta) P_k^1(\cos\theta) \sin\theta d\theta &= 0, \quad j \neq k \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

故辐射电阻的公式为:

$$\begin{aligned} R_{\Sigma} = & 4 \sqrt{2} \pi^2 \mu f b^2 |k| \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(4m+3)(2m+2)}{2m+1} \right. \\ & \times \left[\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \right]^2 \left(\frac{a}{b} \right)^{4m+4} \Big/ \left[\frac{(4m+4)\mu}{\mu_0} - 1 \right] \sum_{n=0}^{2m+1} e^{jn(\frac{\pi}{2}-\psi)} \\ & \times \frac{(2m+1+n)!}{n!(2m+1-n)! 2^n (|k|b)^n} + j|k|b e^{j\psi} \left[\sum_{n=0}^{2m} e^{jn(\frac{\pi}{2}-\psi)} \right] \end{aligned}$$

$$\times \frac{(2m+n)!}{n!(2m-n)!2^n(|k|b)^n} + \sum_{n=0}^{2m+2} e^{j\alpha(\frac{\pi}{2}-\phi)} \\ \simeq \left[\frac{(2m+2+n)!}{n!(2m+2-n)!2^n(|k|b)^n} \right]^2 \} \quad (31)$$

根据(31)式用计算机进行计算。对于导电媒质为海水的某些计算结果列于表 2。表 2 中的符号同表 1。从计算结果可以看出：(1). (31) 式收敛很快。天线半径愈小，收敛愈快。取 $m=0$ 一项，精度已足够。(2). 位于导电媒质球形空腔内的圆环天线的辐射电阻比位于自由空间中的辐射电阻大得多。当 $a=0.5\text{m}$ 和 $f=15\text{kHz}$ 时，位于自由空间中的圆环天线的辐射电阻 $R_z = 1.20174 \times 10^{-13}\Omega$ 。如该天线位于半径 $b=1\text{m}$ 的球形空腔内，在相同频率时算得的辐射电阻 $R_z^i = 3.403323 \times 10^{-4}\Omega$ ，是 R_z 的 2.831996×10^9 倍。从物理意义上说，引起幅射电阻增大的原因是电磁波波长在海水中比在自由空间中缩短了很多倍(缩短倍数为 $\sqrt{\sigma/4\pi f\epsilon_0} = 1.54919 \times 10^3$)，这相当于天线尺寸增大了这些倍，从而提高了幅射效率。(3). 在自由空间中，圆环天线的辐射电阻正比于圆环半径

表 2 辐射电阻值 $\sigma=4$, $F=15000\text{Hz}$

$a=0.5$				
	$b=1$	$b=0.75$	$b=0.6$	$b=0.55$
N	$R_z^i \times 10^4$			
0	3.403289	4.318591	4.989509	5.236530
1	3.403322	4.318634	4.989559	5.236583
3	3.403322	4.318634	4.989559	5.236583
5	3.403322	4.318634	4.989559	5.236583

$a=0.1$				
	$b=0.2$	$b=0.15$	$b=0.12$	$b=0.11$
N	$R_z^i \times 10^6$			
0	1.176893	1.235573	1.272182	1.284625
1	1.176893	1.235573	1.272182	1.284625
3	1.176893	1.235573	1.272182	1.284625
5	1.176893	1.235573	1.272182	1.284625

的四次方，0.5m 和 0.1m 半径天线的辐射电阻之比为 625 倍。但当这两天线置于导电媒质包围的球形空腔中时，它们的辐射电阻的比值将减小，而且比值与 b/a 值有关。在表 3 中列出了不同 b/a 值下两种天线的辐射电阻比值，它表明在导电媒质中辐射电阻随圆环半径大小的变化趋于缓和。(4). 空腔半径 b 愈小，辐射电阻愈大。这是不难理解的，因为

表 3 辐射电阻比值

b/a	2	1.5	1.2	1.1
$\frac{R_z^i(a=0.5)}{R_z^i(a=0.1)}$	289	335	391	408

空腔愈小,波长缩短效应对天线的的影响愈大。

参 考 文 献

- [1] 任朗,天线理论基础,人民邮电出版社,北京,1980, p. 500, p. 38.
- [2] W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1950, 273—274.
- [3] 《数学手册》编写组,数学手册,人民教育出版社,北京,1979, pp. 627—640.

THE CHARACTERISTICS OF A CIRCULAR LOOP ANTENNA IN SPHERICAL CAVITY SURROUNDING BY CONDUCTIVE MEDIUM

Yuan Yi

(Department of Communication of the Naval Headquarters, Beijing)

Abstract A formula of input impedance of a circular loop antenna in spherical cavity surrounding by conductive medium is obtained. The definition of radiation performance of the antenna in conductive medium is given. The formula of radiation resistance of the antenna is derived. The results of numerical calculation show that the two formulas converge very fast, so it is feasible to take the first term or the sum of first two terms only. The relationship between above mentioned characteristics and the parameters, such as the radius of spherical cavity and others, is discussed.

Key words Circular loop antenna; Conductive medium; Input impedance; Radiation resistance