

多族谐波信号估计的子空间匹配投影算法

刘 东 相敬林

(西北工业大学航海学院 西安 710072)

摘 要: 该文根据子空间匹配投影分解算法, 将信号自适应地分解在谐波子空间上, 得到一种多族谐波信号参数估计的方法。这种方法利用插值 FFT 算法和谐波参数的先验信息, 能分离基频或谐波频率结构较为紧密的不同族谐波分量, 谐波频率估计精度高。仿真表明, 这种新方法能准确地估计基频频率、谐波频率和阶数, 对随机相位抖动也不敏感; 用于分析实船噪声也准确反映了船舶辐射噪声功率谱的线谱规律和特点, 较好地揭示了船舶的螺旋桨现场实际运行状况, 是一种很有价值的多谐波参数估计方法。

关键词: 匹配投影, 子空间, 谐波, 基频

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5869(2005)12-1897-04

A Method for Estimating Parameters of Multiple Harmonic Families Based on Subspace Matching Pursuit

Liu Dong Xiang Jing-lin

(College of Marine, Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China)

Abstract This paper proposes a method to estimate multiple harmonic families' parameters of a signal, which is based on subspace matching pursuit decomposition algorithm, and decomposes the signal into harmonic subspace adaptively. It takes advantages of interpolated FFT algorithm and the prior information of signal's parameters, with high estimation precision of harmonic frequency, it has ability to distinguish signal's harmonic components of different harmonic families, which have closed-spaced fundamental and harmonic frequencies. The trail indicates that it is a preferable method to estimate multiple harmonic families' parameters, as it is insensitive to random phase-shift of harmonic components, and is useful to precisely estimate the fundamental, harmonic frequencies and order of a signal. This method also can be used to depict the features of a ship radiated-noise power spectrum, and to reveal the operation condition of the ship propellers. All of above show the advanced method is a valuable method for multiple harmonic parameters estimation of signals.

Key words Matching Pursuit (MP), Subspace, Harmonic, Note

1 引言

谐波信号的参数估计是周期信号分析、周期分量提取的一个重要方面, 它在机械部件的振动性分析、无损检测和声信号分析等等场合有重要的应用价值^[1]。一般来说, 可以首先利用线谱分析方法, 然后利用谐波关系提取谐波信号分量, 但这种方法容易丢失谐波分量。Music, Pisarenko 和 ESPRIT 方法需要求解相关矩阵, 并将信号分解在信号子空间和噪声子空间内, 这需要噪声分布和谐波阶数等先验知识, 基频频率估计也不够准确, 且不易得到多族谐波参数的准确估计。在有些情况下, 如船舶辐射噪声分析中, 由于辐射噪声源的特点, 含有丰富的谐波信息, 希望通过分析能够得到其中蕴涵的多族线谱谐波分量信息^[2]。1992 年, Mallat 等人提出匹配投影(MP)算法^[3], 此后 Goodwin 等人又提出了子空

间匹配投影(SMP)算法^[4], Gribonval 提出基于 SMP 的谐波匹配投影(HMP)算法^[5], 并应用于钢琴声信号的分析中。HMP 算法的实质是将信号分解在近似正交的原子所张成的各子空间上。当只需要估计近似平稳信号组成的谐波分量(平稳谐波分量)的情况下, HMP 算法使用的 Gabor 原子集不便于准确地估计平稳谐波分量。

本文根据 MP 和 SMP 算法, 提出基于 Fourier 基的多族平稳谐波分量估计方法。它利用插值 FFT 计算, 提高了基频和谐波频率估计精度, 而且能分离参数结构较为紧密的不同族谐波分量, 便于引入谐波频率分布范围等先验信息。仿真表明它对初始相位的随机性表现的不敏感, 对船舶辐射噪声的分析结果也较好地反映了噪声功率谱中的线谱谐波分量的规律和特点, 揭示了螺旋桨的运行状况。是一种较好的多族谐波参数估计方法。

2 MP及SMP分解算法

自MP算法被提出以来,又相继演化出了许多其它算法,如OMP(正交匹配投影),SMP和HMP等。本文首先简要叙述MP算法,并着重分析SMP算法。

2.1 MP分解算法

给定一个参数化波形集(原子集) $D_g = \{g_i | i \in \gamma_g, \|g_i\| = 1\}$ 过完备,待分解信号向量 $x \in \mathbb{R}^N$ 。设 $Rf^{(0)} = x$, $r = 0$, 按照步骤 $Rf^{(r+1)} = Rf^{(r)} - \langle Rf^{(r)}, g^{(r)} \rangle \cdot g^{(r)}$ 进行残差向量迭代,其中 $g^{(r)} = \alpha \cdot \sup_{i \in \gamma} \{|\langle Rf^{(r)}, g_i \rangle|\}$, $0 < \alpha \leq 1$, 则此迭代分解渐进收敛^[3]。

2.2 SMP分解算法

Goodwin等人根据MP算法提出SMP的概念^[4],SMP分解算法的初衷是,分析信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 中,未知待提取的分量是某些原子的线性组合,即希望得到信号在部分原子所张成的子空间上(与需要有关)的分解,如谐波信号可以看作是傅氏基的线性组合。利用SMP算法,在谐波原子张成的子空间(谐波子空间)上,分解信号 x 以逐步得到信号各族谐波分量。SMP算法将信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 逐步分解在一个特殊的原子集

$D_h = \{h_i | i \in \gamma_h, \|h_i\| = 1\}$ 上,且 $\left\{h_i = \sum_{m=1}^M c_{i,m} \cdot g_{i,m} \mid i \in \gamma_h, g_{i,m} \in D_g\right\}$, 即分解原子集中的每一子 $h_i \in D_h$ 落在子集 $\{g_{i,m} | g_{i,m} \in D_g, m = 1, 2, \dots, M\} \subset D_g$ 所张成的线性子空间 $V(G_i) = \text{span}\{g_{i,m} | g_{i,m} \in D_g, m = 1, 2, \dots, M\}$ 的单位超球面 $S(G_i)$ 上。以矩阵或向量形式表示, $h_i = G_i \cdot c_i$, 其中 $G_i = [g_{i,1}, g_{i,2}, \dots, g_{i,M}]$ 。结合MP算法,有如下的SMP分解:

$$\begin{aligned} Rf^{(r+1)} &= Rf^{(r)} - \langle Rf^{(r)}, h^{(r)} \rangle \cdot h^{(r)} \\ &= Rf^{(r)} - G^{(r)} \cdot \alpha^{(r)} \end{aligned} \quad (1)$$

根据式(1),SMP算法关键是在所有的 $\{G_i | i = 1, 2, \dots\}$ 搜索找到 $G^{(r)}$, 满足

$$G^{(r)} = \arg \max_{\{G_i | i \in \gamma_h\}} |\langle Rf^{(r)}, h_i \rangle|^2 = \arg \max_{\{G_i | i \in \gamma_h\}} |\langle Rf^{(r)}, G_i \cdot c_i \rangle|^2 \quad (2)$$

且满足约束条件 $(G^{(r)})^H \cdot Rf^{(r+1)} = 0$, 即搜索使残差 $Rf^{(k)}$ 在子空间 $\{V(G_i) | i \in \gamma_h\}$ (由 G_i 的列向量张成)上投影最大的子空间 $\{V^{(r)} | r = 1, 2, \dots\}$ (由 $G^{(r)}$ 的列向量张成), 因此

$$\begin{aligned} G^{(r)} &= \arg \max_{\{V(G_i) | i \in \gamma_h\}} \left\{ \|P_{V(G_i)} Rf^{(r)}\| \right\} \\ &= \arg \max_{\{G_i | i \in \gamma_h\}} \left\{ \left(Rf^{(r)} \right)^H \cdot G_i \cdot \left(G_i^H G_i \right)^{-1} \cdot G_i^H \cdot Rf^{(r)} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

在 G_i 非奇异的条件下,有 $\alpha^{(r)} = \left\{ (G^{(r)})^H G^{(r)} \right\}^{-1} \cdot (G^{(r)})^H \cdot Rf^{(r)}$, 则式(1)变为

$$Rf^{(r+1)} = \left\{ I - G^{(r)} \cdot \left[(G^{(r)})^H \cdot G^{(r)} \right]^{-1} \cdot (G^{(r)})^H \right\} \cdot Rf^{(r)} \quad (4)$$

根据式(4)只需要找到 $G^{(r)}$, $h^{(r)}$ 或 $c^{(r)}$ 唯一与否,并不影响残差的分解。若在SMP算法中,令 D_g 为Gabor原子集,并使得各子空间 $V(G_i)$ 由 D_g 的正交向量所张成,则有 $G_i^H \cdot G_i = I$, I 为恒等单位矩阵,此时SMP算法简化为HMP算法;若在SMP算法中,令 G_i 由复数信号原子向量 g_i 及其共轭 g_i^* 构成,即 $G_i = [g_i, g_i^*]$, 则可得到文献[4]所示的算法。

3 基于插值Fourier分析的SMP算法

本文主要考虑多族平稳谐波构成的信号的分解,因此使用Fourier原子集,即 $D = \left\{ 1/N e^{j2\pi kn/(\ell N)} \mid k = 0, 1, \dots, \ell N - 1 \right\}$,

ℓ 称为 D 的过完备率,当 $\ell = 1$ 时, D 恰为完备的离散Fourier基,当 $\ell > 1$ 时, D 为过完备基。一般地,一族平稳的复谐波信号可表示为

$$s_h(n) = \sum_{m=1}^M a_m e^{-j(\omega_m n + \theta_m)} \quad (5)$$

其中 $\{\omega_m | m = 1, 2, \dots, M\}$ 是一组等差数列,其公差即为谐波频率,而 ω_1 则表明了这族谐波信号的基频的起始位置, θ_m 为各谐波分量的初始相位, M 表示该族谐波的谐波阶数。以下主要就基于Fourier基的SMP算法估计实和复谐波参数分别进行论述。

3.1 基于Fourier基的复谐波参数估计

根据前述的SMP算法,将 G_i 记做 G_{k_i, Δ_i} , 定义为呈谐波关系的原子所组成的矩阵,即

$$\begin{aligned} G_i &\triangleq F_{k_i, \Delta_i} \\ &= \frac{1}{N} \left[e^{j2\pi k_i n / \ell N}, e^{j2\pi (k_i + \Delta_i) n / \ell N}, \dots, e^{j2\pi (k_i + (M-1)\Delta_i) n / \ell N} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

G_i 代表基频频率为 k_i , 谐波频率为 Δ_i 的一组谐波原子。利用SMP分解式(3)的搜索,找到 $G^{(r)}$, 在利用式(3)计算的时候,假设共有 L 个 ($L \gg M$) 待搜索的谐波空间, 即有 $\{G_i | i = 1, 2, \dots, L\}$ 。以下两点因素可以大为减少运算量

(1) 所有的 $\{G_i^H \cdot Rf^{(r)} | i = 1, 2, \dots, L\}$ 都可以通过插值FFT算法一次性得到,其运算量为 $\mathcal{O}(N(\log_2 \ell + \log_2 N))$, 当 $\ell > 1$ 且为2的整数幂时,可利用FFT Pruning算法^[6];

(2) 并不是对所有不同的 G_i , 都要计算 $(G_i^H G_i)^{-1}$ 。事实上可以证明,对于不同的 G_i , 只要其表示相同的谐波频率, 则 $(G_i^H G_i)^{-1}$ 是相同的。 $G_i^H G_i$ 为 M 维的Toeplitz矩阵,其逆运算量为 $\mathcal{O}(M(\log_2 M)^2)$ ^[7], 若在使用SMP算法前,先将它计算出来并存储起来,则总存储量只有 QM , Q 为不同的谐波频率的数目。

直接利用SMP算法,谐波子空间阶数将恒为 M , 但实

际情况并非如此,为了进一步改善估计结果,多谐波参数估计算法须自适应地确定各族谐波的阶数。本文使用如下易行可靠的方法,即在前述的基于 SMP 的复谐波参数估计中,首先根据式(3)得到 $\mathbf{G}^{(r)} = \mathbf{F}_{k^{(r)}, \Delta^{(r)}}$, 结合 $\alpha^{(r)}$ 值大小的分布情况,按谐波关系去掉 $\mathbf{G}^{(r)}$ 中对应向量 $\alpha^{(r)}$ 元素模值较小的那些列,从而得到第 r 次迭代分解所估计的谐波频率 $\Delta^{(r)}$, 基频频率 $k^{(r)}$ 和谐波阶数 $M^{(r)}$, 再按式(6)求得 $\mathbf{B}^{(r)} = \mathbf{F}_{k^{(r)}, \Delta^{(r)}}$, 最后用 $\mathbf{B}^{(r)}$ 代替 $\mathbf{G}^{(r)}$, 代入式(4)更新分解残差。

3.2 基于 Fourier 基的实谐波参数估计

前述的复谐波参数估计方法中,迭代的每一步都只得到一族复谐波信号,这样每次更新得到的残差也都是复数信号,但有时更希望得到关于信号 $\mathbf{x}$ 实数分解,即保证 $\mathbf{G}^{(r)} \cdot \alpha^{(r)}$ 为实数,而且 $\{\mathbf{Rf}^{(r)} | r = 0, 1, \dots\}$ 为实数序列。

若在前述的基于 SMP 的复谐波参数估计中,在得到 $\mathbf{B}^{(r)}$ 后,再由此构造一个实谐波参数矩阵 $\mathbf{A}^{(r)}$, $\mathbf{A}^{(r)}$ 为 $\mathbf{B}^{(r)}$ 与其共轭矩阵共同构成的矩阵,即

$$\mathbf{A}^{(r)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(r)} & (\mathbf{B}^{(r)})^* \end{bmatrix} \quad (7)$$

将 $\mathbf{A}^{(r)}$ 代替 $\mathbf{G}^{(r)}$ 代入式(4),将当前残差正交分解在此实谐波矩阵对应的实谐波空间上,就可以保证更新后的分解残差仍为实数。这样,实谐波参数估计迭代为

$$\mathbf{Rf}^{(r+1)} = \left\{ \mathbf{I} - \mathbf{A}^{(r)} \cdot \left[(\mathbf{A}^{(r)})^H \cdot \mathbf{A}^{(r)} \right]^{-1} \cdot (\mathbf{A}^{(r)})^H \right\} \cdot \mathbf{Rf}^{(r)} \quad (8)$$

这种估计实数谐波信号参数的方法利用了前述的复谐波搜索运算的简便,避免使用实谐波矩阵进行搜索带来运算量的增大,也可进一步改善各谐波分量信号的估计。考虑到 $\mathbf{A}^{(r)}$ 的结构特点,式(8)中的运算增加量不会超过 $\mathcal{O}(M^2 \log_2 M)$ 。

综上所述,本文提出的多谐波族信号估计算法(复或实数信号)的实现步骤如下:

- (1) 初始化, 设 $\mathbf{Rf}^{(0)} = \mathbf{x}$, $r = 0$;
- (2) 搜索矩阵 $\mathbf{G}_i$, 根据式(3)搜索找到 $\mathbf{G}^{(r)}$, 估计这一步的(实或复谐波估计)运算量约为 $\mathcal{O}(N \cdot \log_2 N + L \cdot M \cdot \log_2 M)$ (利用 QM 存储量);

- (3) 首先按式(7)得到复谐波参数矩阵 $\mathbf{B}^{(r)}$ (复谐波信号估计)或实谐波参数矩阵 $\mathbf{A}^{(r)}$ (实谐波信号估计)代替式(4)中的 $\mathbf{G}^{(r)}$, 并按式(4)更新残差向量 $\mathbf{Rf}^{(r+1)}$ 。估计运算量不超过 $\mathcal{O}(M^2 \log_2 M)$ 。

- (4) 设 ε 和 K 分别为预先设定的一个门限值和最大分解次数, 检查: (a) $\|\mathbf{Rf}^{(k+1)}\| \leq \varepsilon$; (b) $r > K$ 。若任何一个条件满足, 则考虑停止计算, 否则进入步骤(2)。

一般情况下, 待搜索空间的数目 $L > N$, 而算法的运算量与 L 关系密切, 因此需要结合一定的先验约束(谐波分量的频率范围), 减少待搜索空间的数目 L , 这样既可以减少运算量, 也不会影响到谐波信号参数的估计精度。

4 仿真和实测数据分析

4.1 多谐波参数估计的仿真实验

设 $s(t)$ 由 C 族谐波信号构成, 第 c 族谐波的阶数为 P_c , 谐波频率为 Δf_c , 且调制在未知的频率 f_c 上, $a_{c,p}$ 和 $\theta_{c,p}$ 分别表示第 c 族谐波中第 p 阶谐波分量的幅度和初始相位, 即

$$s(t) = \sum_{c=1}^C \sum_{p=1}^{P_c} a_{c,p} \cos\{2\pi(f_c + p \cdot \Delta f_c)t + \theta_{c,p}\}$$

$s(t)$ 在白高斯噪声中的观察为 $x(t)$, 信噪比定义为 $s(t)$ 的平均功率与噪声方差之比(dB)。

设各谐波分量的初始相位服从 $[-\pi, \pi]$ 的均匀分布, 信噪比 -5 dB, 各谐波分量幅度、频率的设定值如表 1 所示, $x(t)$ 的采样频率为 240 Hz, 采样样本点数 $N = 512$ 。

仿真产生如图 1(a)所示的 $x(t)$ 归一化功率谱, 采用实数谐波参数估计, 并令 $M = 8$, $\ell = 4$ 。对 $x(t)$ 进行 3 步迭代分解, 由所得的谐波参数估计值可以得到重构信号, 重构信号功率谱(点划线)与 $s(t)$ 的功率谱(实线)如图 1(b)(它们都对同一值进行归一化)。估计所得基频和谐波频率参数如图 1(b)所示(同类数字分别代表基频、谐波频率和谐波阶数), 不同族的谐波分量在图上用不同符号标注其所在的位置(分别用 '+', '□', '*' 表示)。

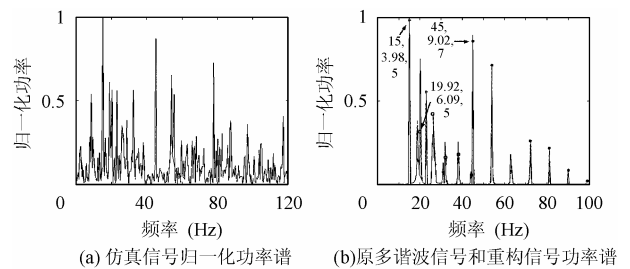


图 1 多谐波仿真信号的估计

表 1 多族谐波信号参数仿真设定

参数 谐波族	f_c (Hz)	Δf_c (Hz)	$a_{c,1}$	$a_{c,2}$	$a_{c,3}$	$a_{c,4}$	$a_{c,5}$
$c=1$	15	4	1	0.85	0.6	0.55	0.3
$c=2$	20	6	1	0.85	0.6	0.55	0.3
$c=3$	45	9	1	0.85	0.6	0.55	0.3

由于利用了插值 FFT 分析, 频率分辨率从 $F_s/N \approx 0.47\text{Hz}$ 提高到 $F_s/LN \approx 0.12\text{Hz}$, 基频频率和谐波频率估计精确, 谐波参数结构较为紧密的第 1 和第 2 族谐波准确分离开来。 P_1 和 P_2 估计准确, P_3 估计偏大是由于噪声在对应谐波空间投影上含有高次的谐波频率成分, 算法将噪声中的成分混入谐波分量中, 造成估计偏差。

由图 1 可见, 本文所述的多谐波参数估计方法, 能够根据谐波信号的结构特点, 自动地搜索得到同族的谐波分量, 并能分离谐波结构较为紧密的不同族谐波分量, 重构信号的功率谱结构已经很接近无噪声的原始信号功率谱, 各次谐波的幅度也大致反映了真实的谐波成分强度, 估计参数对初始相位和噪声表现不敏感, 估计结果较为理想。

4.2 实测数据的多谐波参数估计

船舶含有各种周期性往复运动和旋转机械部件, 如主、辅机和螺旋桨等, 这些部件的运转使得船舶对外辐射出大量谐波线谱信号。一般地, 在低频段(1kHz 以下), 船舶辅机辐射谐波线谱族出现在几百赫兹, 而螺旋桨辐射谐波线谱族则出现在 100Hz 以下的频段内。螺旋桨辐射噪声谐波分量的谐波频率对应螺旋桨的轴频或叶片频(轴频与螺旋桨叶片数的乘积), 对船舶目标识别来说, 这是一个很重要且有用的特征信息。

由于船舶辐射噪声频带很宽(高频段可达 10kHz 以上), 而且辐射噪声谱频域的动态变化范围很大(高达 40dB 以上), 为便于处理, 并得到较为稳定的谐波分量, 截取观测时间接近 7s 的某型船的实测辐射噪声数据, 并进行低通滤波, 降采样得到如图 2(a)所示的时域波形, 及如图 2(b)所示的归一化功率谱(实线)。已知船航速 21knmile/h, 螺旋桨为双桨, 3 叶片。

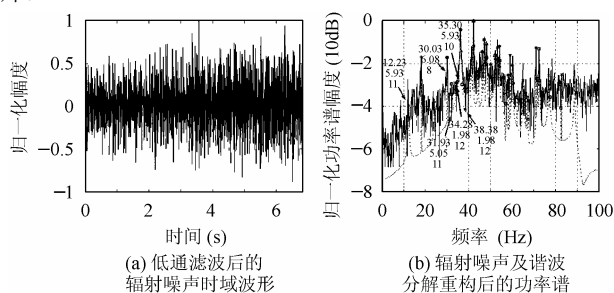


图 2 实测船舶辐射噪声数据分析

对图 2(a)所示的数据进行多谐波参数估计, 设 $M=12$, 分析频带不超过 100Hz。根据分解前 6 步(残差能量已经降为原信号的一半)得到的 6 族谐波分量重构的信号的功率谱如图 2(b)中虚线所示, 估计所得的 6 族谐波的参数在图 2(b)上标注(标注方式同图 1(b)), 不同族的谐波分量在图上用不同符号(‘+’, ‘□’, ‘○’, ‘☆’, ‘△’ 和 ‘×’)表示其所在的频率位置和幅度大小。由图 2 看出, 谐波频率为 6.08Hz(基频为 30.03Hz)的一族谐波(A 族)的能量最大, 分析其产生是由螺旋桨叶片旋转产生, 由此估计螺旋桨轴转速约为 120 转/min, 这与实际观测情况基本吻合, 可认为其反映

了靠近测量一侧的螺旋桨的实际工作状态; 谐波频率为 5.93Hz 的两族谐波, 基频分别为 12.23Hz(B 族)和 35.3Hz(C 族), B 族与 A 族谐波分量的频率成份很接近, 而且能量是 6 族谐波中最小的一族, 它可以看作是 A 族谐波分量在低频段的反映, 而 C 族能量较大, 且其谐波频率 5.93Hz 反映了另外一侧的螺旋桨的轴转速约为 119 转/min, 跟靠近测量一侧的螺旋桨轴转速相当, 这可解释为船行驶在航道上, 船两侧的螺旋桨运转情况基本相同; 图中 6 族谐波分量的重构功率谱能根据谐波信号的结构特点, 很好地提取出了船舶辐射噪声中的谐波分量, 重构信号功率谱准确反映了辐射噪声功率谱中线谱的规律和特点, 排除了虚假线谱信息。分析说明本文所提出方法能够有效地获取信号中多谐波分量信息。

5 结束语

本文根据 SMP 算法, 利用插值 FFT 分析, 将信号在谐波子空间上进行分解, 得到一种多族谐波参数的估计方法。这种方法运算量适当, 便于引入信号频率成分的分布范围的先验信息; 能充分利用谐波信号参数结构特点, 自动搜寻同族的谐波分量, 较好地排除非谐波线谱分量对估计的影响, 准确地提取信号的谐波分量; 能分离谐波参数结构较为紧密的不同族谐波分量, 并准确估计谐波的基频和谐波频率, 而且估计结果对噪声和初始相位的随机性不敏感。根据估计结果所重构的信号能够准确反映原始信号功率谱中谐波分量的规律和特点, 这说明本文方法具有较好的估计性能和很好的利用价值。

参考文献

- [1] 徐峰, 王志芳, 杨玉冰. 振动信号非整周期谐波分析的验证和改进. 清华大学学报(自然科学版), 1999, 39(4): 53 – 66.
- [2] 张建伟, 相敬林. 使用小波理论分析信号功率谱的二次处理方法. 信号处理, 1999, 15(2): 125 – 129.
- [3] Mallat S G, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Trans. on. SP*, 1993, 41 (12): 3397 – 3415.
- [4] Goodwin M. Matching pursuit with damped sinusoids. *Proc. IEEE-ICASSP*, Munich, Germany, 1997, 3: 2037 – 2040.
- [5] Gribonval R, Bacry E. Harmonic decomposition of audio signals with matching pursuit. *IEEE Trans. on. SP*, 2003, 51 (1): 101 – 111.
- [6] 胡广书著. 数字信号处理—理论、算法与实现. 北京: 清华大学出版社, 1998: 149 – 153.
- [7] 张贤达著. 信号处理中的线性代数. 北京: 科学出版社, 1997: 95 – 119.

刘 东: 男, 1977 年生, 博士, 从事水下信号与信息处理、被动水声信号特征提取与重构的研究。

相敬林: 男, 1936 年生, 教授, 博士生导师, 从事水下信号与信息处理的研究。