

## 用于信号逼近的自适应时延小波神经网络<sup>1</sup>

何振亚 李文化 蔚承建

(东南大学无线电工程系 南京 210096)

**摘 要** 小波神经网络是一种强有力的函数逼近工具。本文结合时延神经网络和小波分析概念提出一种新的小波神经网络模型——自适应时延小波神经网络(ATDWNN: adaptive time delay wavelet neural network)。ATDWNN 可以对同一类存在不同时延的多个信号用同一个超小波(superwavelet)进行逼近。为了训练 ATDWNN, 本文提出一种基于时间机理的竞争学习算法。实验表明, ATDWNN 不仅可以成功地对同一类存在不同时延的多个信号采用同一个超小波进行逼近, 而且可以用来估计各样本信号的时延。

**关键词** 自适应时延小波神经网络, 信号逼近, 时间竞争

**中图分类号** TN911.7

### 1 引 言

工程应用中经常遇到函数逼近问题, 例如系统建模和识别中用于非线性系统的识别, 医学中用于各种波形的压缩。在各种函数逼近方法中神经网络是一种非常有力的函数逼近工具。人们在这方面做了大量的工作, 并取得了很多成果。Hornik 讨论了多层感知器神经网络的函数逼近能力<sup>[1]</sup>; Park 等人采用 RBF 神经网络对任意非线性函数进行逼近<sup>[2]</sup>; Qinghue Zhang 和 Benveniste 在神经网络中引入小波概念, 即神经元响应函数不是采用 Sigmoid 函数和 Gaussian 基函数而是取为小波函数<sup>[3]</sup>; Jun Zhang 等人采用正交基小波神经网络进行函数学习, 并与 MLPNN 和 RBFNN 方法进行比较, 得出结论, 小波神经网络更适合于函数逼近<sup>[4]</sup>; Kreinovich 等人得出了相似的结论: 对于单变量函数, 小波神经网络是渐进最优逼近器<sup>[5]</sup>。另外, Delyon 等人从理论上对小波逼近的精度进行了分析<sup>[6]</sup>。与其它方法相比, 小波神经网络基函数的选择有更大的灵活性, 而且可以在不同的尺度上对函数逼近<sup>[7]</sup>。文献[5-7]中讨论了基于小波分解的单个信号的逼近问题。实际应用中经常需要把相似的多个信号按一定准则由一个函数表征, 这类似于图象处理中的码书设计问题。当同一类多个信号的起始时间同步时可采用文献[5-7]中的网络进行信号逼近, 但是各个信号存在时延差时, 文献[5-7]的方法就会产生错误的结果。

为了解决同一类多个信号存在不同时延的信号逼近问题, 本文结合时延神经网络<sup>[8]</sup>和小波分解的思想, 提出一种新的小波神经网络模型, 即自适应时延小波神经网络(ATDWNN)。设第  $j$  个采样信号为  $f_j(t)$ ,  $f_j(t) = \{f_j(0), f_j(1), \dots, f_j(T-1)\}$ ,  $0 \leq j \leq N-1$ , 各信号间最大时延为  $\tau_{\max}$ , 超小波的时间取样区间为  $T + \tau_{\max}$ 。超小波定义为母小波函数  $\Psi(t)$  在不同时延  $b$  和尺度  $a$  下的子小波  $\Psi((t-b)/a)$  的线性叠加<sup>[6]</sup>:

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^K w_k \Psi\left(\frac{t-b_k}{a_k}\right).$$

<sup>1</sup> 1996-07-02 收到, 1997-12-08 定稿  
国家自然科学基金资助课题

这样每一个样本信号  $f_j(t)$  的时间变量取值区间为  $[0, T + \tau_{\max}]$  的某段区间上, 只是不同的信号由于时延的不同而取为超小波函数的不同区间. 为了训练自适应时延小波神经网络, 本文提出了一种新的反馈学习算法——基于时间竞争的学习算法 (TCBP: time competition based back propagation learning). 我们把时间竞争机制引入到 BP 算法中, 即同一样本  $f_j(t)$  分别与超小波函数起始时间为  $\tau (0 \leq \tau \leq \tau_{\max})$  长度为  $T$  的一段区间进行匹配, 匹配最大 (距离最小) 的起始时间  $\tau_j^{\min}$  记为  $f_j(t)$  的竞争胜利时延, 然后采用 BP 算法利用  $f_j(t)$  与超小波函数的  $[\tau_j^{\min}, T + \tau_j^{\min}]$  区间之间的误差对网络权值进行修正 (各个子小波的位移  $b$ , 尺度  $a$  和加权  $w$ ). 网络收敛后得到的超小波函数用来表征同一类信号的所有信号  $f_j(t)$ ,  $0 \leq j \leq N - 1$ .

本文简单介绍了用于单变量函数逼近的小波神经网络模型 (WNN)<sup>[7]</sup>; 并将推广到同类的多个信号不存在时延的函数逼近情况; 同时提出自适应时延小波神经网络结构和学习算法; 给出了实验结果.

## 2 用于单变量信号逼近的自适应小波神经网络

小波变换是一种新的时频分解技术, 它把一个信号分解为同一母小波  $\Psi(t)$  在不同时延  $b$  和尺度  $a$  下的子小波  $\Psi_{a,b}(t)$  的线性叠加. 子小波  $\Psi_{a,b}(t)$  记为

$$\Psi_{a,b}(t) = (1/\sqrt{|a|})\Psi((t-b)/a), \quad a \neq 0, \quad b \in R. \quad (1)$$

信号  $f(t)$  的小波变换为

$$(w_{\Psi}f)(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\Psi_{a,b}(t)}dt. \quad (2)$$

信号  $f(t)$  的小波完全重建可由下式求得, 即

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (w_{\Psi}f)(a,b)\Psi_{a,b}(t)\frac{dad b}{a^2}. \quad (3)$$

$f(t)$  可按式由子小波近似, 即

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=1}^K w_k \Psi\left(\frac{t-b_k}{a_k}\right), \quad (4)$$

其中  $w_k, b_k, a_k$  分别为每个子小波的权系数、时延和尺度. (4) 式的神经网络结构由图 1 表示.

定义能量函数  $E$  为

$$E = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [f(t) - \hat{f}(t)]^2. \quad (5)$$

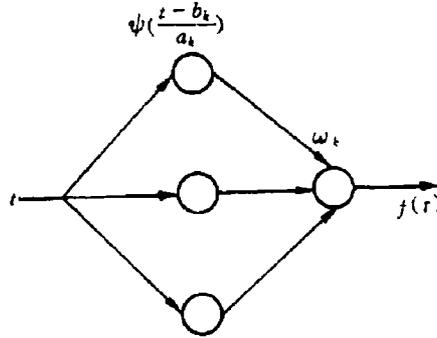


图 1 文献 [7] 中用于函数逼近的小波神经网络结构

由  $E$  分别对  $w_k$ ,  $b_k$ ,  $a_k$  求偏导数可以得到  $w_k$ ,  $b_k$  和  $a_k$  的修正公式:

$$\Delta w_k = \alpha_w \sum_{t=1}^T \left[ f(t) - \sum_{k=1}^K w_k \Psi \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \right] \Psi \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right), \quad (6a)$$

$$\Delta b_k = \alpha_b \sum_{t=1}^T \left[ f(t) - \sum_{k=1}^K w_k \Psi \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \right] \Psi' \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \frac{-w_k}{a_k}, \quad (6b)$$

$$\Delta a_k = \alpha_a \sum_{t=1}^T \left[ f(t) - \sum_{k=1}^K w_k \Psi \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \right] \Psi' \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \frac{-w_k}{a_k}. \quad (6c)$$

### 3 用于同类多个信号逼近的 WNN(无时延)

介绍 ATDWNN 之前, 我们先讨论第 2 节中的 WNN 用于同一类多个信号不存在时延的信号逼近问题。

设某一类数据集包含  $N$  个样本信号  $f_j(t)$ ,  $0 \leq j \leq N-1$ , 由  $\hat{f}(t)$  表征逼近的信号,  $\hat{f}(t)$  取为 (4) 式。定义能量函数为

$$E = \sum_{j=0}^{N-1} E_j, \quad (7)$$

其中  $E_j$  为  $f_j(t)$  与  $\hat{f}(t)$  之间的误差,

$$E_j = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [f_j(t) - \hat{f}(t)]^2. \quad (8)$$

利用 (8) 式可以得到网络权值的修正公式为

$$\Delta w_k = \alpha_w \sum_{t=1}^T \left[ f(t) - \sum_{k=1}^K w_k \Psi \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \right] \Psi \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right), \quad (9a)$$

$$\Delta b_k = \alpha_b \sum_{t=1}^T \left[ f(t) - \sum_{k=1}^K w_k \Psi \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \right] \Psi' \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \frac{-w_k}{a_k}, \quad (9b)$$

$$\Delta a_k = \alpha_a \sum_{t=1}^T \left[ f(t) - \sum_{k=1}^K w_k \Psi \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \right] \Psi' \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \left( \frac{t-b_k}{a_k} \right) \frac{-w_k}{a_k}. \quad (9c)$$

## 4 自适应时延小波神经网络及其学习算法

### 4.1 ATDWNN 的结构 (图 2)

设某类信号包含  $N$  个样本  $f_j(t)$ ,  $0 \leq j \leq N-1$ ,  $0 \leq t \leq T-1$ . 各样本间的最大时延为  $\tau_{\max}$ . 采用  $K$  个子小波对  $f_j(t)$  ( $0 \leq j \leq N-1$ ) 进行逼近, 逼近函数为  $\hat{f}(t)$ ,  $\hat{f}(t)$  的采样区间取为记为  $[0, T-1+\tau_{\max}]$ .  $\hat{f}(t)$  记为

$$f(t) = \sum_{k=1}^K w_k \Psi\left(\frac{t-b_k}{a_k}\right), \quad 0 \leq t \leq T+\tau_{\max}-1. \quad (10)$$

由于  $f_j$  与  $f_i$  ( $i \neq j$ ) 之间存在一定的时延, 采用 (9) 式是不合适的. 与图 1 中的 WNN 不同, ATDWNN 把超小波  $\sum_{k=1}^K w_k \Psi((t-b_k)/a_k)$  分别进行时延, 得到  $\tau_{\max}$  个时延超小波.

单个超小波的神经网络结构与图 1 中的 WNN 是一样的. 对于某个输入信号  $f_j(t)$  ( $0 \leq j \leq N-1$ ,  $0 \leq t \leq T-1$ ) 分别计算  $f_j(t)$  与各个时延超小波之间的匹配, 找出匹配度最大的时延  $\tau_j^{\min}$ , 则时延为  $\tau_j^{\min}$  的超小波即为  $\hat{f}(t)$  的逼近函数. 利用  $f_j(t)$  与时延为  $\tau_j^{\min}$  的超小波之间的误差, 采用梯度优化即可得到 ATDWNN 的学习算法.

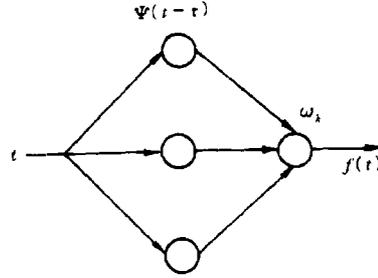


图 2 ATDWNN 的结构

### 4.2 基于时间竞争的 BP 学习算法

为了训练 ATDWNN, 我们提出了一种新的反馈学习算法. 通过把时间竞争机制引入到 BP 算法中可以得到各个样本的时延信息, 并利用时延信息和梯度优化方法得到 ATDWNN 的学习算法.

设时延为  $\tau$  的超小波  $\Psi(t+\tau)$  为, 则

$$\Psi(t+\tau) = \sum_{k=1}^K w_k \Psi\left(\frac{t-b_k+\tau}{a_k}\right), \quad 0 \leq t \leq T-1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}-1. \quad (11)$$

即  $\Psi(t+\tau)$  取为  $\hat{f}(t)$  的一段子区间.

$f_j(t)$  ( $0 \leq t \leq T-1$ ) 与  $\Psi(t+\tau)$  的距离  $d_{j,\tau}^2$  可由下式求得:

$$d_{j,\tau}^2 = \sum_{i=0}^{T-1} [f_j(t) - \Psi(t+\tau)]^2, \quad 0 \leq j \leq N-1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}-1. \quad (12)$$

设  $f_j(t)$  与  $\Psi(t+\tau)$  ( $0 \leq \tau \leq \tau_{\max}-1$ ) 的最小距离为  $d_{j,\tau}^{\min}$ , 则

$$d_{j,\tau}^{\min} = \min_{0 \leq \tau \leq \tau_{\max}-1} d_{j,\tau}^2. \quad (13)$$

针对  $f_j(t)$  定义能量函数  $E_j$  为

$$E_j = \sum_{t=0}^{T-1} \left[ f_j(t) - \sum_{k=1}^K w_k \Psi \left( \frac{t - b_k + \tau_j^{\min}}{a_k} \right) \right]^2. \quad (14)$$

从 (14) 式中可以看出,  $\tau_j^{\min}$  是输入样本  $f_j(t)$  经过时间竞争得到的匹配最大的时延值.

由  $E_j$  分别对  $w_k$ 、 $b_k$ 、 $a_k$  求偏导, 利用梯度优化法得到 ATDWNN 权值修正公式:

$$\Delta w_k = \alpha_w \sum_{t=1}^T \left[ f(t) - \sum_{k=1}^K w_k \Psi \left( \frac{t - b_k + \tau_j^{\min}}{a_k} \right) \right] \Psi \left( \frac{t - b_k + \tau_j^{\min}}{a_k} \right), \quad (15a)$$

$$\Delta b_k = \alpha_b \sum_{t=1}^T \left[ f(t) - \sum_{k=1}^K w_k \Psi \left( \frac{t - b_k + \tau_j^{\min}}{a_k} \right) \right] \Psi' \left( \frac{t - b_k + \tau_j^{\min}}{a_k} \right) \frac{-w_k}{a_k}, \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \Delta a_k &= \alpha_a \sum_{t=1}^T \left[ f(t) - \sum_{k=1}^K w_k \Psi \left( \frac{t - b_k + \tau_j^{\min}}{a_k} \right) \right] \\ &\quad \times \Psi' \left( \frac{t - b_k + \tau_j^{\min}}{a_k} \right) \left( \frac{t - b_k + \tau_j^{\min}}{a_k} \right) \frac{-w_k}{a_k}. \end{aligned} \quad (15c)$$

若令  $N = 1$ , (15a) 式简化为 (6a)。

## 5 实验结果

本文提出的自适应时延小波神经网络可以推广到任意维数的函数逼近, 这里仅讨论一维函数逼近. 下面给出一个胃电图 (EGG) 信号的逼近的例子. 临床应用中利用多个电极测量表面胃电活动信号时, 各电极测到的时序信号形状基本相同, 只是各信号间存在不同的时延. 图 3(a)、3(b)、3(c) 分别给出了一个人的 EGG 信号和不同的时延信号. 设信号采样区间为  $[0, 120]$ , 最大时延为  $\tau_{\max} = 15$ , 超小波区间为  $[0, 120]$ , 母小波函数取为  $\Psi(t) = \cos(1.75t) \exp(-t^2/2)$ . 实验中取  $\alpha_w = 0.4$ ,  $\alpha_b = 0.3$ ,  $\alpha_a = 0.3$ , 利用图 3 中的 EGG 信号训练 ATDWNN, 经过 200 次循环后得到逼近信号  $\hat{f}(t)$ .  $\hat{f}(t)$  与真实采样信号由图 4 表示, 图 3 中  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 、 $f_3(t)$  分别是在时延  $\tau$  为 0, 5 和 10 时的波形.  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 、 $f_3(t)$  竞争胜利的时延分别为 0, 5 和 10. ATDWNN 不仅正确地对三个 EGG 信号进行了逼近, 而且得到了各个信号之间的时延关系, 因此 ATDWNN 还可以用于估计信号之间的时延.

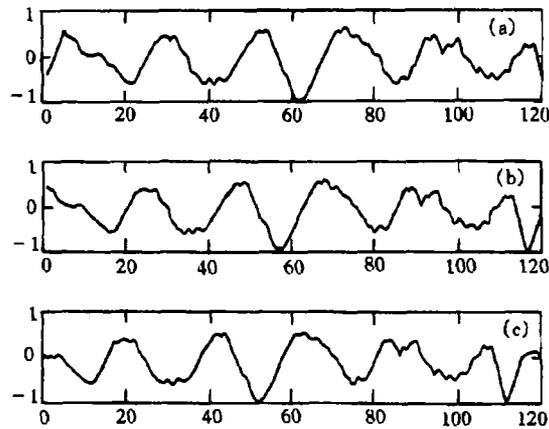


图 3 ECG 原始信号

(a) 时延为 0 的 ECG 信号, (b) 时延为 5 的 ECG 信号, (c) 时延为 10 的 ECG 信号

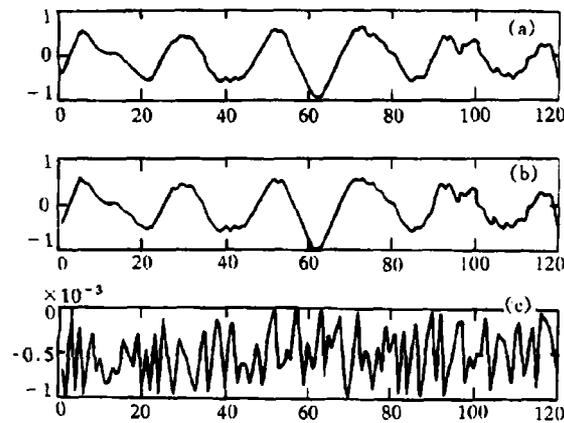


图 4 逼近信号与采样信号比较

(a) 采样信号 (b) 逼近信号 (c) 误差信号

## 6 结 论

本文结合时延神经网络和小波分解的思想提出了一种新的小波神经网络模型——自适应时延小波神经网络模型, 用来对包含多个存在不同时延的数据集进行逼近。ATDWNN 不仅利用基于小波分解进行函数逼近的思想, 同时利用 TDNN 输入层“单节拍时延线”(tapped-delay-line) 思想, 形成单节拍时延超小波, 某个采样信号由一定时延下的超小波表征。为了训练 ATDWNN, 提出了基于时间竞争的 BP 学习算法, 即输入信号  $f_j(t)$  在各时延之间存在竞争, 与超小波匹配最大的时延  $\tau_j^{\min}$  成为时间竞争的胜利者, 然后利用  $f_j(t)$  与时延为  $\tau_j^{\min}$  的超小波之间的误差和梯度优化方法对网络权值进行修正。通过对同类胃电信号(各个样本之间存在不同时延)的逼近, 结果表明本文提出的方法不仅正确地对胃电信号进行了逼近, 而且找到了各个样本之间的时延差。

## 参 考 文 献

- [1] Hornik K, Stinchcombe M, White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, 1989, NN-2(2): 359-366.
- [2] Par J, Sandberg I W. Universal approximation using radial-based-function networks. *Neural Computation*, 1991, 3: 246-257.
- [3] Zhang Q H, Benvenisete A. Wavelet networks. *IEEE Trans. on Neural networks*, 1992, NN-3(6): 889-989.
- [4] Zhang J, Walter G G, Miao Y B, Lee W N. Wavelet neural networks for function learning. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43(6): 1485-1496.
- [5] Kreinovich V, Sirisaengtaksin V, Cabrea S. Wavelet neural networks are optimal approximators for functions of one variable. University of Texas at EL. Paso, Computer Science Department Technical Report, 1992, No. UTEP-cs-92-29.
- [6] Delyon B, Juditsky A, Benveniste B. Accuracy analysis for wavelet approximation. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1995, NN-6(2): 332-348.
- [7] Szu H H, Telfer B, Kadambe B. Neural network adaptive wavelets for signal representation and classification. *Optical Engineering*, 1992, 31(9): 1907-1916.
- [8] Waibel A, Hanazawa T, Hinton G, Shikano K, Lana K. Phone recognition using time-delay neural networks. *IEEE Trans On ASSP*, 1989, ASSP-37(3): 328-339.

AN ADAPTIVE TIME DELAY WAVELET NEURAL NETWORK  
FOR SIGNAL APPROXIMATION

He Zhenya    Li Wenhua    Wei Chengjian

*(Southeast University, Department of Radio Engineering, Nanjing 210096)*

**Abstract** Wavelet neural networks (WNN) is a powerful tool for function approximation. In this paper a new model named adaptive time delay WNN(ATDWNN) is proposed which combines time delay neural network and wavelet decomposition. ATDWNN is used to approximate signals having different time delays in the same class. In order to train ATDWNN, time mechanism based competition learning is also proposed. It is shown through experiments that ATDWNN can not only approximate signals having different time delays by the same superwavelet, but also detect these time delays successfully.

**Key words** Adaptive time delay wavelet neural network, Signal approximation, Time competition

何振亚: 男, 1923年生, 教授, 博士生导师, IEEE fellow, 国家攀登计划认知科学(神经网络)重大  
关键项目首席科学家, 从事信号处理和计算智能的理论及应用研究。

李文化: 男, 1966年生, 博士后, 从事信号处理和神经网络的理论及应用研究。

蔚承建: 男, 1957年生, 博士生, 从事信号处理和进化计算的理论及应用研究。