

## 有耗互连线瞬态模拟的稳定递归算法<sup>1</sup>

徐勤卫 李征帆 毛吉峰 王 隽

(上海交通大学电子工程系 上海 200030)

**摘 要** 本文提出了一种用于求解高速 VLSI 和多芯片组件 (MCM) 中有耗互连线瞬态响应的稳定递归算法。在频域内, 均匀传输线两端的电压电流满足一组简单公式, 将这组公式利用 Taylor 级数进行近似, 通过逆拉氏变换得到一组时域内的递归公式。递归公式只涉及到传输线两端的电流和电压, 瞬态响应可以步进求解。递归公式中的卷积只与已经计算出的数值有关, 不涉及任何未知量。本方法避免了有理逼近所导致的不稳定性, 是绝对收敛的。数值实验结果表明, 本方法可以达到相当高的精度。

**关键词** 高速 VLSI, 多芯片组件, 互连线, 瞬态响应, Taylor 逼近, 递归算法

**中图分类号** TN47, TN811

### 1 引 言

现代集成电路技术的发展日新月异, 主要表现在电路工作速度的迅速提高和集成规模的空前扩大。在现代高速大规模集成电路 (VLSI) 和多芯片组件 (MCM) 中, 互连参量对电路性能的影响变得非常明显, 互连线效应越来越引起人们的关注。互连线所引起的信号延迟远远大于器件所造成的延迟; 高集成度造成互连线密度加大, 会造成严重的耦合干扰; 高速情况下的波动特性非常明显, 由此造成的信号多次反射和相互叠加, 会使信号波形严重畸变。如果芯片设计不当, 在较高的脉冲速率下, 这种互连效应会导致信号不能正常传输, 造成整个电路系统的工作失常。因此, 在高速集成电路的设计中必须考虑互连线效应, 利用分布式传输线模型模拟高速情况下的互连特性<sup>[1]</sup>。

高速 VLSI 和 MCM 中的有耗传输线是由电报方程描述的。一种传统的分析方法是在频域内通过快速傅氏变换 (FFT) 得到时域内的响应。但这种方法的计算量与取样点数的平方成正比, 对于时间跨度很长或频谱宽度很大的情况计算量太大。另一种直接的数值方法是时域差分法, 将时域偏微分方程写成差分形式进行求解。但这种方法耗用大量的计算机内存和计算时间, 实际应用有较大的困难<sup>[2]</sup>。

特征法 (Method of Characteristics, MC) 是用于求解偏微分方程的一种比较成熟的方法, 它将偏微分方程化为特征线上的常微分方程进行求解。已有文献表明, 特征法用于求解无耗传输线的瞬态响应是非常有效的<sup>[3-6]</sup>, 可以得到简单的递归形式, 因而具有较高的计算效率。但对于一般有耗传输线, 该方法不易得到解析的结果, 必须结合数值计算<sup>[7]</sup>。渐进波形估值法 (Asymptotic Waveform Evaluation, AWE) 是近年来兴起的一种方法<sup>[8,9]</sup>, 采用有理逼近技术, 利用有限次的模式匹配近似求解瞬态响应。Lin 和 Kuh 在文献 [9] 中对传输线的处理的方法采用 Pade 逼近技术, 并利用递归卷积, 降低了卷积运算的复杂程度。但这一方法的一个重要缺点在于 Pade 逼近模式匹配的模型难以保证其稳定性。

本文吸收了无耗线特征法递归形式的优点, 采用 Taylor 级数逼近, 得到了一般有耗传输线时域内递归形式的计算公式。这种方法具有时间变量的递归形式, 利于编程计算。本方法避免

<sup>1</sup> 1998-01-12 收到, 1998-11-15 定稿  
国家自然科学基金资助项目

了有理逼近, 因而不存在稳定性问题; 递归公式只与传输线两端的电压、电流有关, 其中的卷积不涉及未知量, 因而保持了较高的计算效率。

## 2 递归算法的推导

为简单起见, 首先以单根传输线为例。设  $R, L, C, G$  分别是单位长度 (PUL) 的电阻、电感、电容、电导, 传输线的电报方程为

$$\partial v(x, t) / \partial x = -L \partial i(x, t) / \partial t - Ri(x, t), \quad (1a)$$

$$\partial i(x, t) / \partial x = -C \partial v(x, t) / \partial t - Gv(x, t), \quad 0 \leq x \leq d, \quad t \geq 0, \quad (1b)$$

式中  $v(x, t), i(x, t)$  分别是  $t$  时刻, 传输线上  $x$  点处的分布电压和分布电流,  $d$  是传输线的长度。假设所有的初始条件为 0, 拉氏变换域 ( $s$  域) 内传输线两端的电压电流满足如下的关系:

$$YV(0, s) - I(0, s) = [YV(d, s) - I(d, s)]e^{-\gamma d}, \quad (2a)$$

$$YV(d, s) + I(d, s) = [YV(0, s) + I(0, s)]e^{-\gamma d}, \quad (2b)$$

此处

$$\gamma = \gamma(s) = \sqrt{(sL + R)(sC + G)}, \quad (3)$$

$$Y = Y(s) = \sqrt{(sC + G)/(sL + R)}, \quad (4)$$

式中  $V(0, s), V(d, s)$  和  $I(0, s), I(d, s)$  分别是  $s$  域内传输线两端的电压和电流。令

$$\alpha = G/C - R/L, \quad (5)$$

$$\beta = R/L, \quad (6)$$

于是

$$Y = Y(s) = \sqrt{(sC + G)/(sL + R)} = Y_0[1 + \alpha/(s + \beta)]^{1/2}, \quad (7)$$

式中  $Y_0 = \sqrt{C/L}$  作变量代换  $u = \alpha/(s + \beta)$ , 将 (7) 式利用  $u = 0$  处的 Taylor 级数进行近似, 则 (7) 式可展成 Maclaurin 级数, 取其前  $N + 1$  项, 得

$$Y \approx Y_0 \sum_{n=0}^N c_n u^n, \quad (8)$$

式中

$$c_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n}{du^n} \sqrt{1+u} \right]_{u=0}. \quad (9)$$

由于 (3) 式可写成

$$\gamma = L(s + \beta)Y, \quad (10)$$

于是

$$\gamma = Y_0 L(s + \beta) \sum_{n=0}^N c_n u^n = s\sqrt{LC} + Y_0 L \left( \beta + \frac{2}{2}\alpha \right) + Y_0 L \alpha \sum_{n=2}^N c_n u^{n-1}, \quad (11)$$

故

$$\exp(-\gamma d) = Q_0 \exp(-s\tau_0) Q_N(s), \quad (12)$$

式中

$$Q_N(s) = \exp(-dY_0L\alpha \sum_{n=2}^N c_n u^{n-1}), \quad (13)$$

$$Q_0 = \exp[-Y_0Ld(\beta + \alpha/2)], \quad (14)$$

$$\tau_0 = d\sqrt{LC}. \quad (15)$$

由 (10) 和 (12) 式, (2) 式化为

$$V(0, s)Y_0 \sum_{n=0}^N c_n u^n - I(0, s) = Q_0 \left[ V(d, s)Y_0 \sum_{n=0}^N c_n u^n - I(d, s) \right] \exp(-s\tau_0)Q_N(s), \quad (16a)$$

$$V(d, s)Y_0 \sum_{n=0}^N c_n u^n + I(d, s) = Q_0 \left[ V(0, s)Y_0 \sum_{n=0}^N c_n u^n + I(0, s) \right] \exp(-s\tau_0)Q_N(s). \quad (16b)$$

在 (16) 式中, 令

$$I_1(0, s) = V(0, s)Y_0 u, \quad (17a)$$

$$I_1(d, s) = V(d, s)Y_0 u; \quad (17b)$$

$$I_{j+1}(0, s) = V(0, s)Y_0 u^{j+1} = I_j(0, s)u, \quad (18a)$$

$$I_{j+1}(d, s) = V(d, s)Y_0 u^{j+1} = I_j(d, s)u, \quad j = 1, 2, \dots, N-1; \quad (18b)$$

(16) 式可变为

$$\begin{aligned} V(0, s)Y_0 - I(0, s) + \sum_{n=1}^N c_n I_n(0, s) \\ = Q_0 \left[ V(d, s)Y_0 - I(d, s) + \sum_{n=1}^N c_n I_n(d, s) \right] \exp(-s\tau_0)Q_N(s), \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} V(d, s)Y_0 + I(d, s) + \sum_{n=1}^N c_n I_n(d, s) \\ = Q_0 \left[ V(0, s)Y_0 + I(0, s) + \sum_{n=1}^N c_n I_n(0, s) \right] \exp(-s\tau_0)Q_N(s). \end{aligned} \quad (19b)$$

如果 (19) 式中的  $Q_N(s)$  能够通过逆拉氏变换变成时域中的解析式, 则 (19) 式可以直接变换到时域。注意到 (13) 式中  $Q_N(s)$  具有指数形式, 可用如下的 Taylor 逼近式进行近似:

$$Q_N(s) \approx 1 + \sum_{j=1}^n b_j \left( \frac{1}{s + \beta} \right)^j. \quad (20)$$

此处  $b_j$  是对应的 Taylor 系数。由上式, 可近似得到  $Q_N(s)$  的逆拉氏变换解析式  $P(t)$ :

$$P(t) = \delta(t) + \sum_{j=1}^n b_j \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} \exp(-\beta t). \quad (21)$$

对 (19) 式进行逆拉氏变换, 得到以下时域内的方程:

$$Y_0 v(0, t) - i(0, t) + \sum_{n=1}^N c_n i_n(0, t) = Q_0 \left[ Y_0 v(d, t - \tau_0) - i(d, t - \tau_0) + \sum_{n=1}^N c_n i_n(d, t - \tau_0) \right] * P(t), \quad (22a)$$

$$Y_0 v(d, t) + i(d, t) + \sum_{n=1}^N c_n i_n(d, t) = Q_0 \left[ Y_0 v(0, t - \tau_0) + i(0, t - \tau_0) + \sum_{n=1}^N c_n i_n(0, t - \tau_0) \right] * P(t); \quad (22b)$$

$$\alpha Y_0 v(0, t) = \beta i_1(0, t) + di_1(0, t)/dt, \quad (23a)$$

$$\alpha Y_0 v(d, t) = \beta i_1(d, t) + di_1(d, t)/dt; \quad (23b)$$

$$\alpha i_j(0, t) = \beta i_{j+1}(0, t) + di_{j+1}(0, t)/dt, \quad (24a)$$

$$\alpha i_j(d, t) = \beta i_{j+1}(d, t) + di_{j+1}(d, t)/dt, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (24b)$$

(22) 式表示时域内的递归过程, 其中 \* 表示卷积。时间步长设定后, 传输线的瞬态响应可以递归求得。(22) 式中的延迟时间  $\tau_0$  和衰减因子  $Q_0$  描述了传输线的基本特征。

在文献 [9] 中, 递归过程的每一步都包含未知数, 需要解方程求得; 而本方法中, (23) 式右端的物理量都是在递归过程中已经求出的值, 递归卷积运算中不涉及未知量; 另外, Taylor 逼近避免了文献 [9] 中 Pade 逼近所导致的不稳定性。

对于耦合传输线, 可利用文献 [5] 中的方法进行模式分解, 每一模式可用以上类似的方法处理。

### 3 数值结果

图 1 所示的电路表示某 MCM 互连电路的一部分, 激励电压是一个高速脉冲, 其上升下降沿都是 0.5ns, 中间 1V 电平持续 2ns。传输线电路参数为

$$\text{line\# 1: } d = 0.1\text{m}, L = \begin{bmatrix} 494.6 & 63.3 \\ 63.3 & 494.6 \end{bmatrix} (\text{nH/m}), C = \begin{bmatrix} 62.8 & -4.9 \\ -4.9 & 62.8 \end{bmatrix} (\text{pF/m}),$$

$$R = \begin{bmatrix} 50 & 10 \\ 10 & 50 \end{bmatrix} (\Omega/\text{m}), \quad G = 0;$$

$$\text{line\# 2: } d = 0.06\text{m}, L = 360\text{nH/m}, C = 100\text{pF/m}, R = 50\Omega/\text{m}, G = 0.01\text{S/m};$$

其它参数为  $R_1 = 100\Omega, R_2 = R_3 = R_4 = 50\Omega, L_1 = 10\text{nH}, C_1 = 2\text{pF}$ ; 利用本方法, 在 (22)-(24) 式中取  $N = 2$ , (20) 式中取  $n = 1$ , 计算结果如图 2 所示。同时示出的是文献 [7] 中 FFT 和文献 [10] 中微分求积法 (Differential Quadrature Method, DQM) 的计算结果。DQM 是一种类似于差分法的数值方法, 在取大量分点的情况下可以得到较精确的结果, 从图中可见, 本方法结果的精度可与之比拟; 而 FFT 由于混叠效应在某些时间点存在较大误差。分析表明, (22)-(24) 式中的  $N$  和 (20)-(21) 式中的  $n$  值越大, 计算结果越精确, 但计算效率也因此而降低。因此,

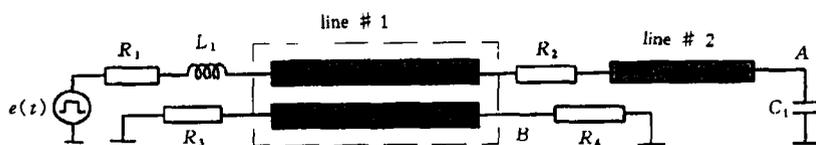
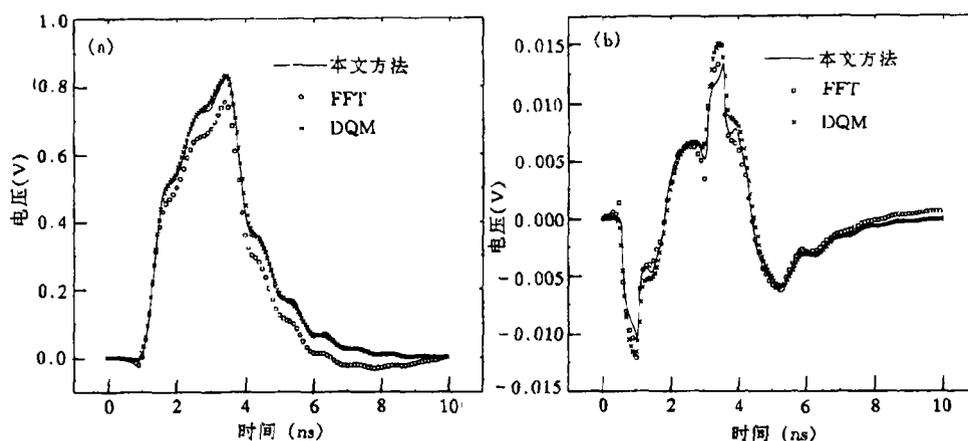


图 1 高速互连电路



(a) A 点电压的时域波形

(b) B 点电压的时域波形

图 2 计算结果

为了在计算效率和计算精度之间取一个折衷， $N = 2$  和  $n = 1$  是较好的选择，这种情况下本方法的计算效率约是 DQM 的  $(14/6)^2$  倍。

由图 2 的结果可以看出，由于互连线效应，信号传输到 A 点时产生了较大的畸变，同时在 B 点出现了感应信号。

## 4 结 论

本文提出了一种求解高速 VLSI 和 MCM 中均匀有耗传输线瞬态响应的递归算法。在频域内利用 Taylor 级数进行逼近，通过逆拉氏变换得到一组时域内的递归公式。采用适当的时间步长，瞬态响应可以递归求得，有利于编程计算。在递归过程中只涉及到传输线两端电压电流的计算，因而该方法可以保持较高的效率；递归卷积只与已经计算出的数值有关，不涉及任何未知量；本方法利用 Taylor 逼近，避免了有理逼近所导致的不稳定问题。数值实验结果表明，本文方法可以达到较高的精度。

## 参 考 文 献

- [1] 李征帆. 大规模集成电路中的互连问题和微波技术. 电子学报, 1992, 20(5): 67-73.
- [2] Djordjevic A R, Sarkar T K, Harrington R F. Time-domain response of multiconductor transmission lines. IEEE Proc. 1987, 75(6): 743-764.
- [3] Liu Y K. Transient analysis of TEM transmission lines. Proc. IEEE(letters), 1968, 56(6): 1090-1092.
- [4] Romeo F, Santomauro M. Time domain simulation of n coupled transmission lines. IEEE Trans. on MTT, 1987, MTT-35(2): 131-137.

- [5] Chang F-Y. The generalized method of characteristics for waveform relaxation analysis of lossy coupled transmission lines. *IEEE Trans. on MTT*, 1989, MTT-37(12): 2028-2038.
- [6] Mao J-F, Li Z-F. Analysis of the time response of transmission lines with frequency-dependent losses by the method of convolution characteristic. *IEEE Trans. on MTT*, 1992, MTT-40(4): 637-645.
- [7] Mao J-F, Kuh E S. Fast simulation and sensitivity analysis of lossy transmission lines by the method of characteristics. *IEEE Trans. on CAS*, 1997, CAS-44(5): 391-401.
- [8] Pillage L T, Rohrer R A. Asymptotic waveform evaluation for timing analysis. *IEEE Trans. on CAD*, 1990, CAD-9(4): 352-377.
- [9] Lin S, Kuh E S. Transient simulation of lossy interconnects based on the recursive convolution formulation. *IEEE Trans. on CAS*, 1992, CAS-39(11): 879-892.
- [10] 徐勤卫, 李征帆, 陈 文. 微分求积法求解高速大规模集成电路互连线的瞬态响应. *电路与系统学报*, 1998, 3(2): 76-81.

## STABLE RECURSIVE ALGORITHM FOR THE TRANSIENT SIMULATION OF LOSSY INTERCONNECTS

Xu Qinwei    Li Zhengfan    Mao Jifeng    Wang Juan

*(Department of Electronic Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)*

**Abstract** A stable recursive algorithm is presented for the transient simulation of interconnect systems in the high-speed VLSI and multichip modules (MCMs). The Taylor approximation is employed in the frequency domain, then a set of recursive formulas is derived by the inverse Laplace transform. The recursive convolution includes no unknowns, it is only related with the computed quantities. The algorithm concerns only the quantities at two ends of the lines, so it consumes less computer time and less memory in comparison with other methods. The algorithm is useful for both delay and crosstalk estimation and can be used to evaluate transient responses of high-speed interconnect circuits. Applications show that the method gives high accuracy.

**Key words** High-speed VLSI, MCMs, Interconnect, Transient response, Taylor approximation, Recursive algorithm

徐勤卫: 男, 1970年生, 博士, 研究领域包括: 高速 VLSI 和 MCM 中互连电路的时域模拟, 电子封装技术, 集成电路的电磁场与微波特性分析. 已在该领域发表论文十余篇.

李征帆: 男, 1936年生, 教授, 博士生导师. 主要在微波集成电路和高速大规模集成电路领域从事教学和研究工作, 在国内外核心刊物上发表论文 50 余篇.

毛吉峰: 男, 1974年生, 硕士生, 研究领域为高速大规模集成电路布线设计与电路分析.

王 隽: 男, 1975年生, 硕士生, 研究领域为高速集成电路的瞬态分析.