

二进对称信道的最佳帧同步和性能

隋厚棠

(中国科学院空间科学与应用研究中心, 北京 100080)

摘要 本文论证了固定帧长度相关法是二进对称信道(BSC)的最佳帧同步算法。并用 Poisson 分布和 Markov 链导出了一次通过帧同步捕获概率, 锁定概率以及进入锁定的平均时间, 还给出了计算机模拟结果。与传统的门限法比较, 本文给出的算法性能好, 实现容易, 有很大的应用价值。

关键词 信道; 相关; 门限; 同步捕获; 吸收概率

一、引言

广泛采用的帧同步算法是在随机数据流中周期地插入同步码(或同步图样), 在收端确定这些同步码的位置来实现的。目前, 二进对称信道(BSC, Binary Symmetric Channel)中所用的帧同步捕获算法为相关门限法^[1-3]。从搜索一帧数据检测到同步码的最大概率来看, 这种算法不是最佳的^[4]。由于门限的选择受到多种因素限制, 很难实现最佳门限工作状态^[3]。1972年, Massey^[6]导出了加性白高斯噪声信道(AWGN)中的最佳帧同步判决准则; 1973年, Nielsen^[7]通过模拟实验证实了 Massey 算法的优越性。1984年文献[8]平行地导出了适合于空间光通信的类似最佳帧同步算法。AWGN 信道中的最佳算法在实践中有一定难度, 需要采用软判译码技术^{*[9]}, 这在许多现有设备中是不易实现的。

本文根据 Massey 最佳判决准则, 首先论证了固定帧长度的相关法是 BSC 信道中的最佳帧同步判决准则, 并给出了计算算法。接着用 Poisson 分布和 Markov 链理论导出了一次通过的捕获概率和锁定概率, 以及进入锁定状态的平均时间。

二、BSC 信道中的最佳帧同步判决准则和算法

1. BSC 信道中的最佳帧同步判决准则

当 $E/N_0 \gg 1$ 时, Massey 给出的 AWGN 信道中的最佳帧同步判决准则为^[6]

$$S_t = \sum_{i=0}^{n-1} s_i \rho_{i+t} - \sum_{i=0}^{n-1} |\rho_{i+t}|, \quad 0 \leq t < N \quad (1)$$

1991.03.19 收到, 1991.07.26 定稿。

* 对于二进编码系统, 解调器输出未经量化或量化 $Q > 1\text{bit}$ 时, 称为软判译码。

选择 t 使 S_t 最大. 上式中 N, n 分别为帧长度和同步码长度, s_i 表示本地同步码第 i 位上的值, ρ_{i+t} 表示第 $i+t$ 位码元模拟值. (1) 式右边第一项表示相关算法; 第二项为修正量, 补偿同步码周围随机数据造成的影响. 不难看出 Massey 准则实际上是相关法加动态参考门限. 参考门限的大小与信道干扰、量化层数和信源的统计特性有关. 在实践中, Massey 法是采用 $Q=3$ 或 4 bit 量化的软判决来近似 AWGN 信道的^[6]. 对于 BSC 信道 $Q=1$ (硬判决) 可看成是一特例. 这时, 进入帧同步识别器或算法的输入序列为 $1, -1, |\rho_{i+t}|=1, 0 \leq t < N$. 因此 (1) 式可以简化为

$$S_t = \sum_{i=0}^{n-1} s_i \rho_{i+t} - n, \quad 0 \leq t < N \quad (2)$$

选择 t 使 (2) 式最大, 相当于选择 t 使

$$S_t = \sum_{i=0}^{n-1} s_i \rho_{i+t}, \quad 0 \leq t < N \quad (3)$$

最大. 因此, 能够以 N 为固定长度, 选择最大 S_t 的算法为 BSC 信道中的最佳帧同步判决准则, 用数学语言表示为

$$S_m = \max_{0 \leq t < N} (S_t) \quad (4)$$

对于未加限制的随机数据, 传输中会产生假的同步码, 所以由 (4) 式只能得到 m 的估值 $\hat{m}$. $\hat{m}$ 做为同步点的可信度将在下面用概率表示.

2. BSC 信道中最佳帧同步捕获算法

设接收的二进序列为 $r_0 r_1 \cdots$, 定义一个由 l 个元素组成的数组为 $r_l(t) = r_t r_{t+1} \cdots r_{t+l-1}$, t 表示时间. 同样同步码定义为 $S_n = s_0 s_1 \cdots s_{n-1}$. 首先考虑计算机处理 $r_{N+n-1}(t)$ 个元素的数组, 对于 $(N-n)$ bit 随机数据不加限制. 设 m 是真正的同步点, $0 \leq m < N$, m 的出现是均等的, 即 $P(t=m) = 1/N$. 定义矢量 a, b 的汉明距离为 $H(a \cdot b)$, 这时 BSC 信道的最佳帧同步捕获算法为

- (1) 初始化 $t=1, h=+\infty$.
- (2) 如果 $H(r_n(t) \cdot S_n) = J_t < h$, 则 $h = J_t, \hat{m} = t$.
- (3) $t = t + 1$.
- (4) 如果 $t < N$, 返回 (2).
- (5) 输出 $\hat{m}$.

本算法只与 N, n 和 S_n 有关, 而与门限无关, 输出 m 的估值 $\hat{m}$.

三、帧同步性能

1. 最佳一次捕获概率

已知 $H(r_n(t) \cdot S_n)$ 输出的误差值为 $J_t, 0 \leq J_t \leq n, 0 \leq t < N$, 则相关值为 $A_t = n - J_t$, 因此, $H(\cdot)$ 也可看成为相关器. 考虑到处理 $r_{N+n-1}(t)$ bit 数据段, 设同步点为 m , 结果满足 $J_m < \min_{0 \leq t < m} (J_t)$ 和 $J_m \leq \min_{m < t \leq N-1} (J_t)$ 则捕获成功. 因为 $r_n(t), 0 \leq t < m, m < t \leq N-1$ 中出现 J_t 个不一致位和 $r_n(m)$ 中出现 J_m 个不一致位

均可近似看成独立事件, 因此得一次捕获概率为

$$P_m = \prod_{i=0}^{m-1} P(J_i > J_m) \prod_{i=m+1}^{N-1} P(J_i \geq J_m) P(J_m), \quad 0 \leq m < N \quad (5)$$

由上式不难看出 $P_m > P_{m+1}$, 因此有 $P_0 > P_1 > \dots > P_{N-1}$, P_{N-1} 表示一次捕获概率的下界。为了分析方便, 下面只考虑 $m = N - 1$, 这时 $J_m = J_{N-1}$, 如果

$$J_{\min} = \min_{0 \leq i < N-1} (J_i)$$

$J_{N-1} < J_{\min}$, 同步捕获成功。这时的一次捕获概率为

$$P_{N-1}(J_{N-1}) = P(J_{\min} > J_{N-1}) P(J_{N-1}) = \prod_{i=0}^{N-2} P(J_i / J_{N-1}) P(J_{N-1}) \quad (6)$$

由于 $m = N - 1$, 所以有 $H(r_n(N-1) \cdot S_n) = H(\hat{S}_n \cdot S_n) = J_{N-1}$, $0 \leq J_{N-1} \leq n$, $\hat{S}_n = r_{i+N-1}, r_{i+N}, \dots, r_{i+N+n-2}$, 表示收到的同步码。当 $J_{N-1} = 0$ 时, $\hat{S}_n = S_n$ 表示无错。当 $J_{N-1} \neq 0$ 时, 有错, $\hat{S}_n \neq S_n$ 。为了方便, 记 $J_{N-1} = j$, 则 $P(J_{N-1}) = P(j)$ 。由二项式分布可知, $\hat{S}_n$ 中出现 j 个错误的概率为

$$P(j) = \binom{n}{j} (1 - p_e)^{n-j} p_e^j, \quad 0 \leq j \leq n \quad (7)$$

p_e 表示误码率。当 $j \geq J_{\min}$ 时, 表明随机数据, 忽略边缘效应, 记为 $D_{N-1} = (d_0, d_1, \dots, d_{N-2})$ 中出现了符合 Poisson 分布^[3]的假同步指示, 其过程强度为

$$\lambda(j) = N \left(\frac{1}{2} \right)^n \sum_{i=0}^j \binom{n}{i} \quad (8)$$

由 (8) 式可得到在 D_{N-1} 中, $r_n(t)$, $0 \leq t < N - 1$, 未构成假同步指示的概率为

$$P(J_{\min} > j) = \exp(-\lambda(j))$$

由 (6)、(7) 和 (9) 式可得

$$P_{N-1}(j) = \exp(-\lambda(j)) \cdot P(j) \quad (10)$$

由于 $P_{N-1}(j_1)$ 和 $P_{N-1}(j_2)$, $0 \leq j_1, j_2 \leq n$, $j_1 \neq j_2$ 时, 表示为互斥事件的概率。因此得一次通过(一帧数据)的捕获概率为

$$P_i = \sum_{j=0}^n \exp(-\lambda(j)) \cdot P(j) \quad (11)$$

一次通过的假同步捕获概率为

$$P_i' = 1 - P_i \quad (12)$$

图 1 给出了由 (11) 式计算的结果, 可以看出 P_i 是 n 的单调上升函数。上升的速度随 p_e 的减小而增大。给定 p_e (通常空间环境可用的最坏数据误码率为 $p_e = 0.1$) 和 p_e , 就可选定 n 和 N 。图中还给出了计算机的模拟结果, 二者完全一致。在模拟实验中, 每个实验点都是由 1000 帧, 每帧 1000 bit 数据运算得到的。门限相关法^[1], 选择不同的门限有不同的极值, 但仍小于最佳法的捕获概率值。

2. Markov 链表示的帧同步过程

早期的帧同步过程只有搜索和锁定。这种两态同步过程有很大的假锁概率。目前采用的均为三态过程: 即搜索、验证和锁定。图 2 给出了用 Markov 链表示的三态过渡图。

图中 0 状态(记为①)表示逐位搜索的捕获过程。①和②表示一帧验证状态,并设有 1 bit 窗口。锁定态②和②可采用多 bit 窗口^[4]和可逆计数器工作方式^[10]。图中参数 a, b 可以分别由(11)和(12)式算出。 c, a', c' 和 b' 可由下式求得

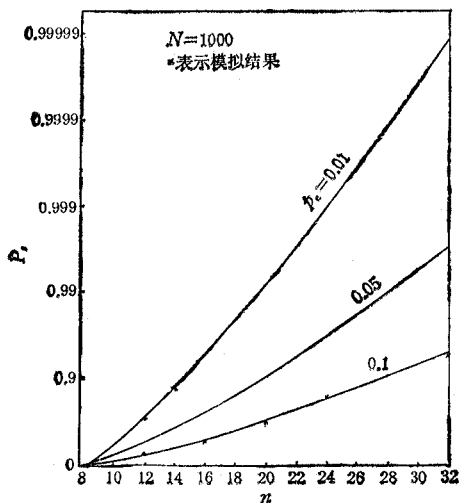


图 1 最佳帧同步一次通过的捕获概率

$$c = \sum_{i=0}^E \binom{n}{i} (1 - p_e)^{n-i} p_e^i \quad (13)$$

$$a' = 1 - c \quad (14)$$

$$c' = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=0}^E \binom{n}{i} \quad (15)$$

$$b' = 1 - c' \quad (16)$$

其中 E 表示容错个数。下面给出由①到

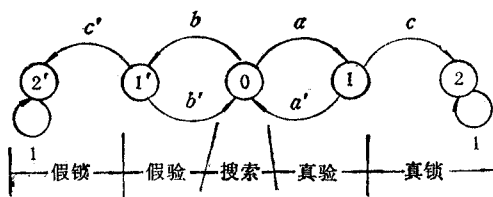


图 2 帧同步状态过渡图

$$a = P_s, \quad b = P'_s = 1 - P_s$$

②的过渡概率以及平均进入锁定的时间*。这是帧同步系统性能的基本指标。

图 2 给出的状态链图可用两种方法求解。一种是通用的矩阵法^[11],另一种是直接法,两种方法计算的结果是完全一样的。由于直接法可以给出中间结果,所以下面只给出直接

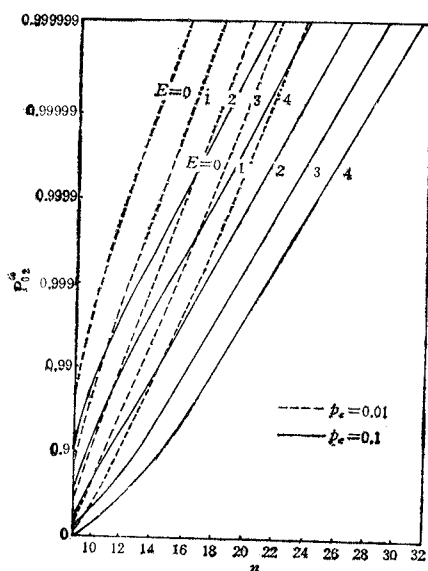


图 3 $N = 1000$ 时的帧同步真锁概率

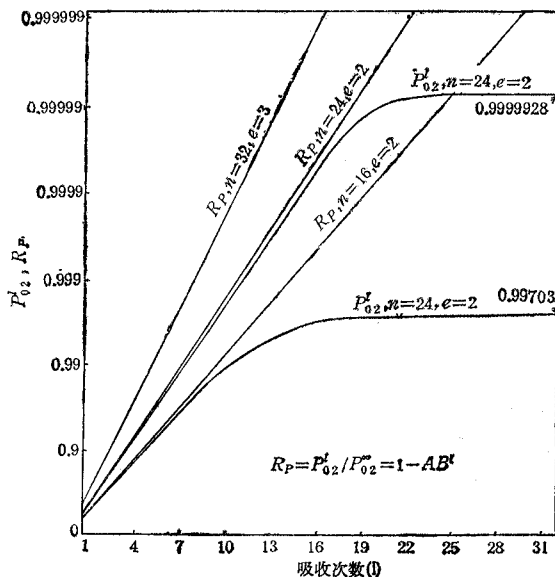


图 4 $p_e = 0.1, N = 1000$ 时的 P_{02}^t 和 R_P 曲线

* 系统每次启动进入锁定态的时间是随机事件,所以采用平均时间来表征系统性能。

法的公式推导和计算结果。

3. 进入锁定状态的概率

图 2 中的②和②'是两个吸收态。这时的过渡概率为 $P_{22} = P_{2'2'} = 1$, 是封闭的。如果进入②, 表示真锁, 同步成功; 进入②'表示假锁。下面分别给出进入②或②'的概率。

设 $P_{02}^{(k)}$ 表示从①到②的第 K 次过渡概率, 不难发现, 奇次过渡概率 $P_{02}^{(2k+1)} = 0$, 偶次过渡概率为

$$P_{02}^{(2k)} = (aa' + bb')^{k-1}ac \quad (17)$$

前 l 次吸收概率之和为

$$P_{02}^l = \sum_{k=1}^l P_{02}^{(2k)} = \sum_{k=1}^l (aa' + bb')^{k-1}ac = \frac{ac(1-(AB)^l)}{1-AB} \quad (18)$$

其中 $AB = aa' + bb'$ 。当 $l=1$ 时, 可得到一次通过(两次过渡)的真锁和假锁概率, 分别为

$$P_{02}^1 = P_{02}^{(2)} = ac \quad (19)$$

$$P_{02'}^1 = P_{02'}^{(2)} = bc' \quad (20)$$

无限次过渡时, ②的吸收概率之和为

$$P_{02}^\infty = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^l P_{02}^{(2k)} = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^l (AB)^{k-1}ac = ac/(1-AB), \quad |AB| < 1 \quad (21)$$

由(18)和(21)式同样可得②'的吸收概率为

$$P_{02'}^l = bc'[1-(AB)^l]/(1-AB) \quad (22)$$

$$P_{02'}^\infty = bc'/(1-AB), \quad |AB| < 1 \quad (23)$$

由于 $P_{02}^\infty + P_{02'}^\infty = 1$ (可以验证), 因此(21)式可以改写成

$$P_{02}^\infty = ac/(bc' + ac) \quad (24)$$

(24) 式表示真假吸收或锁定概率之比。为了增大 P_{02}^∞ , 应增大 a 和 c 或减小 b 和 c' 。由(19)和(20)式可知, P_{02}^∞ 也可直接由一次通过的锁定概率求得, 这是可以预料的。

图 3 给出了由(24)式计算的结果, P_{02}^∞ 是 n 的单调递增函数, 并随着 E 的增加而减小。这表明 E 越大, 出现假锁的概率越大, 进入状态②增大。由图 3 可以看出, 当 n 不变, P_{02}^∞ 随 p_e 的减少而增大。图 4 给出了由(18)式计算的结果, 随着过渡次数增加, P_{02}^l 增加, 并渐趋于饱和, 最终等于 P_{02}^∞ 。另外图中还给出了 $R_p = P_{02}^l/P_{02}^\infty = 1 - (AB)^l$ 的计算曲线, 表明趋向饱和吸收的速度。

表 1 $N=1000$

p_e	n	E	P_{02}^∞
0.1	16~20	2	0.99~0.99999
	25~32	3	>0.9999
0.01	16~24	1	0.999~0.999999
	25~32	2	>0.99999

4. 进入锁定的平均时间

由图 2 可知, 状态②和②构成一个封闭集。系统每次起动工作从①到②或②的锁定

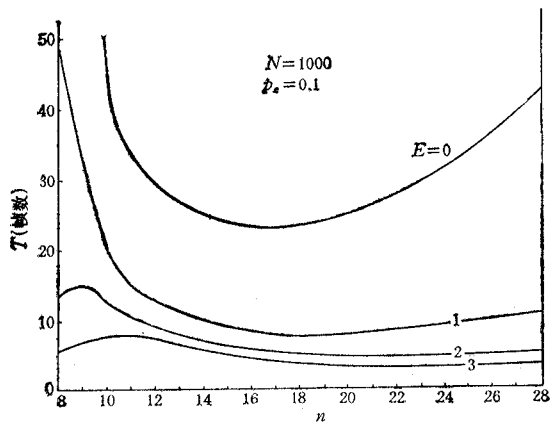


图 5 以帧为单位的平均吸收时间

无限次过渡的平均吸收时间之和为

$$\begin{aligned}
 T &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^l 2acK(AB)^{k-1} + \sum_{k=1}^l 2bc'K(AB)^{k-1} \right] \\
 &= 2(ac + bc') \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^l K(AB)^{k-1} \\
 &= 2(ac + bc') [1/(1 - AB) + AB/(1 - AB)^2], \quad |AB| < 1 \quad (26)
 \end{aligned}$$

图 5 给出了由 (26) 式计算的结果。不难看出, E 增大, T 减小, P_{02}^{∞} 也减小, 说明假锁概率增大。 T 的最小区域为 $n = 16 \sim 24$ 。当 n 较大时, E 增大, 对 T 的减小影响变小。从实践考虑, 可按表 1 选择参数。但不论参数如何选择, 从 (26) 式计算的 T 都不会小于 2 帧, 这从图 5 可以看出。

5. 几点说明

从设计合理的帧同步器考虑, 以上性能分析中, 未考虑假锁和失锁造成的额外开销, 这是因为 S_n 足够长, 选择 E 可忽略假锁概率 P_{02}^{∞} 。如要求 $P_{02}^{\infty} < 10^{-5}$, 当 $p_e = 0.1$ 时, 由图 3 可知, $n > 24$, $E = 0, 1, \dots, 4$, 均可满足要求。设选 $E = 3$, 由图 5 可知平均 3 帧 ($T = 3$) 就可进入锁态。关于失锁, 对于 BSC 信道采用 $W = 3$ 的窗口观察^[4]和记忆跟踪(可逆计数器方式^[9]), 失锁也是可以忽略的。

四、结 束 语

由于本文给出的 BSC 信道中的最佳同步捕获算法性能优良, 不论信道质量有何变化, 如变参信道, 系统也能始终保持最佳同步捕获状态。由于与门限无关, 大大地方便了操作运行, 因此具有很大的应用价值, 可完全代替现用的相关门限法。

参 考 文 献

- [1] R. A. Scholtz, *IEEE Trans. on COM.* COM-28 (1980)8, 1204—1213.

时间(吸收时间)是一个随机变量。因此只能用期望值来描述。

在保证 P_{02}^{∞} 足够大的条件下, 减小平均进入锁定时间是同步系统的基本要求。如果搜索和验证一样按一帧过渡时间考虑(可满足一般工程设计要求), 这时由 (17) 式并考虑 $P_{02}^{(2k)}$, 可得到第 $2K$ 次过渡的吸收时间为

$$\begin{aligned}
 T^{(2K)} &= 2K(P_{02}^{(2K)} + P_{02}^{(2K)}) \\
 &= 2K(ac + bc')(AB)^{K-1} \quad (25)
 \end{aligned}$$

- [2] S. S. Kamal, R. G. Lyons, *IEEE Trans. on COM*, **COM-32** (1984) 7, 804—817.
- [3] 隋厚棠, 电子科学学刊, **6**(1984)1, 1—12.
- [4] 隋厚棠等, 电子学报, **13** (1985) 6, 46—53.
- [5] Doowhan Choi, *IEEE Communications Magazine*, **28** (1990)2, 47—54.
- [6] J. L. Massey, *IEEE Trans. on COM*, **COM-20** (1972) 2, 115—119.
- [7] P. T. Nielsen, *IEEE Trans. on COM*, **COM-21** (1973) 6, 770—772.
- [8] C. N. Georghiades, D. L. Snyder, *IEEE Trans. on COM*, **COM-32** (1984) 2, 118—123.
- [9] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill Book Company, New York, (1983).
- [10] 隋厚棠, 陈小敏, 用 TP-86A 单板机实现最佳帧同步捕获, 中国科学院空间科学与应用研究中心内部资料, 1986 年 11 月.
- [11] D. L. Isaacs, R.W. Madsen, *Markov Chains: Theory and Applications*, John Wiley & sons, New York, (1976).

OPTIMUM FRAME SYNCHRONIZATION AND PERFORMANCE IN A BINARY SYMMETRIC CHANNEL

Sui Houtang

(Center for Space Science and Applied Research, Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract The fixed frame length maximum correlation method which is the optimum method in a binary symmetric channel has been proved. With Poisson distribution, the frame sync acquisition probability is obtained and followed by computer simulation. By Markov modeling techniques, the probability and the mean time into lock mode are given. Finally, it is shown that the optimum frame sync method is far superior to conventional, and it is very useful in practice.

Key words Channel; Correlation; Threshold; Synchronization acquisition; Absorption probability