

动态分布参数神经网络时空稳定性分析¹

冯大政 保 铮 焦李成

(西安电子科技大学电子工程研究所 西安 710071)

摘 要 本文将 Hopfield 自联想神经网络和 Kosko 异联想神经网络推广到无穷维状态空间动态神经网络, 即动态分布参数神经网络, 并给出了它们的有界性和稳定性。尤其是还研究了带微分算子的多维分布参数神经网络的时空稳定性以及保证稳定情况下所应满足的边界条件。最后, 还给出了一个应用实例。

关键词 联想记忆, 动态神经网络, 分布参数神经网络, 线性算子, 时空稳定性, 能量泛函

中图号 TN-052

1 引 言

Hopfield^[1] 提出了如下动态神经网络模型

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= -\alpha_i u_i + \sum_{j=1}^n W_{ij} + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ v_i &= g_i(u_i), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 I_i 为外加输入, W_{ij} 是联接权, u_i 是第 i 个神经元的内部状态, v_i 是输出。当 $g'_i(u_i) > 0$ 且 $W_{ij} = W_{ji}$ 时, Hopfield 对 (1) 式构造了用于证明稳定性的能量函数如下:

$$E(t) = \sum_i \alpha_i \int_0^{v_i} g_i^{-1}(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij} v_i v_j - \sum_{i=1}^n I_i v_i; \quad (2)$$

其中 $g_i^{-1}(x)$ 是 $g_i(x)$ 的反函数。沿着 (1) 式的轨迹对 $E(t)$ 求导, 有

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \sum_{i=1}^n g'_i(u_i) \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 \leq 0. \quad (3)$$

当 $g_i(u_i)$ 是有界 Sigmoid 函数时, 则根据 LaSalle 不变原理^[2] 可知动态系统 (1) 式渐近稳定。

Kosko^[3] 提出了如下双向联想记忆神经网络:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -x_i + \sum_{j=1}^m W_{ij} g(y_j) + I_i, \\ \frac{dy_j}{dt} &= -y_j + \sum_{i=1}^n W_{ij} g(x_i) + J_j, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

¹ 1995-05-29 收到, 1997-01-08 定稿

国家自然科学基金和国防预研基金资助课题

其中 $W = [W_{ij}]_{n \times m}$. 定义 (4) 式的能量函数如下:

$$E(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} \xi g'(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(x_i) g(y_j) W_{ij} + \sum_{j=1}^m \int_0^{y_j} \eta g'(\eta) d\eta - \sum_{i=1}^n g(x_i) I_i - \sum_{j=1}^m g(y_j) J_j. \quad (5)$$

沿着 (4) 式的轨迹微分 (5) 式得

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \sum_{i=1}^n g'(x_i) \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 - \sum_{j=1}^m g'(y_j) \left(\frac{dy_j}{dt} \right)^2 \leq 0. \quad (6)$$

由于 $E(t)$ 有界, 当 $dx_i/dt = 0$ 和 $dy_j/dt = 0$ 时, $E(t)$ 达到局部极小点.

(1) 式和 (4) 式都是基本的神经网络, 已有许多应用. 它们都是有限状态的, 是一类集中参数神经网络. 它们的状态在每一时刻都是一个有限维向量, 因此它们适合实时求解线性代数问题. 本文把这两种神经网络推广到无限维状态空间, 即分布参数神经网络 (DPNN). DPNN 的状态在每一时刻是一个无穷维向量或者是一个空间连续函数. 因此, DPNN 适合求解积分方程和偏积分方程等许多场问题. 在理论上, DPNN 有许多特殊问题需要考虑, 如要考虑边界条件对神经网络稳定性的影响. 本文重点研究 DPNN 的时空稳定性.

2 动态神经网络的算子表示

2.1 有界性与稳定性的定义和 LaSalle 不变原理

考虑动力系统

$$dx/dt = f(x, t), \quad (7)$$

其中 $x \in R^n$, $f(x, t): R^n \times R^+ \rightarrow R^n$. 假设 (7) 式在给定初始条件下有唯一解, 且解对初始条件有连续的依赖性, 并为 $\varphi(t; x_0, t_0)$; 其中 x_0 为 (7) 式在 t_0 时的初态, t 为观测时刻, 显然有 $\varphi(t_0; x_0, t_0) = x_0$. $\varphi(t; x_0, t_0)$ 表示状态空间中由初态 x_0 出发的一条轨迹.

定义 1 (有界性) 系统 (7) 式是有界的, 如果存在两个正常数 c_1 和 c_2 , 当 $\|x_0\| \leq c_1$, 恒有 $\|\varphi(t; x_0, t)\| \leq c_2$.

定义 2 (平衡态) 定义 x_e 为动力系统的平衡态, 如果 x_e 满足

$$f(x_e, t) = 0, \quad \text{对所有 } t \geq t_0. \quad (8)$$

定义 3 (稳定性) 动力系统 (7) 的平衡态 x_e 称为 Lyapunov 意义下稳定, 如果对每个实数 $\varepsilon > 0$, 存在一实数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 使得当 $\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ 时, 满足 $\|\varphi(t; x_0, t_0)\| \leq \varepsilon, t \geq t_0$.

定义 4 (7) 式的平衡态 x_e 称之为渐近稳定的, 如果 (1) 它是稳定的; (2) 存在一个包括平衡态 x_e 的区域 Ω , 从 Ω 内的任意初态 x_0 出发, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(t; x_0, t_0) \rightarrow x_e$.

定义 5 集合 $M \in R^n$ 称为 (7) 式定义的轨线的正向不变集, 若 $\forall x_0 \in M, \varphi(t; t_0, x_0) \subset M, (t \geq t_0)$; 称当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(t; t_0, x_0) \rightarrow M$, 若存在 $P \in M$ 和 $t_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 使 $\|\varphi(t_n; t_0, x_0) - P\| \rightarrow 0$.

定理 1 (LaSalle 不变原理)^[2] 设 Ω 是一有界闭集, 从 D 内出发的 (7) 式的解 $\varphi(t; x_0, t_0) \subset \Omega$, 若存在 $v(x): \Omega \rightarrow R$, 具有连续一阶偏导数, 使

$$dv/dt = \partial v / \partial x \cdot dx/dt = \partial v(x) / \partial x \cdot f(x, t) \leq 0. \quad (9)$$

又设 $E = \{x | dv/dt = 0, x \in \Omega\}$, $M \subset E$ 是最大不变集, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\varphi(t; x_0, t_0) \rightarrow M. \quad (10)$$

显然有如下推论。

推论 1 设动力系统 (7) 式从某有界闭集 D 内出发的解 $\varphi(t, x_0, t_0) \subset D (t \geq t_0)$, 且 (7) 式在 D 内存在唯一平衡位置 x_e , 若存在 $v(x): D \rightarrow R$, 且存在连续一阶偏导数, 使 (9) 式成立, 则 (7) 式的平衡位置 x_e 渐近稳定。

2.2 自联想神经网络的算子表示

定义 6 令线性时不变算子 T_α 和 $T(R^n \rightarrow R^n)$ 为

$$T_\alpha u = Au, \quad (11)$$

$$Tv = Wv, \quad (12)$$

其中 $A = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $W = (W_{ij})$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ 。

定义 7 令非线性算子 F 为

$$Fu = (f_1(u_1, \dots, f_n(u_n))^T. \quad (13)$$

定义 8 (Hilbert 伴随算子 T^*) 设 H_1 和 H_2 是 Hilbert 空间, $T: H_1 \rightarrow H_2$ 是一个有界线性算子, 则使对所有 $x \in H_1$ 和 $y \in H_2$ 满足

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad (14)$$

的算子 $T^*: H_2 \rightarrow H_1$, 叫做 T 的 Hilbert 伴随算子 T^* 。当 $H_1 = H_2$ 和 $T^* = T$ 时, 称 T 为自伴随算子。进一步, 若

$$\langle Tx, x \rangle \geq \alpha \langle x, x \rangle = \alpha \|x\|^2, \quad (15)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积, $\|x\|$ 是 x 的模, α 是正常数, 则 T 称为正定算子。

显然, T_α 是正定算子, T 是自伴算子。利用 T_α , T 和 F , (1) 式还可以表示为

$$\left. \begin{aligned} du(t)/dt &= -T_\alpha u(t) + Tv(t) + I, \\ v &= Fu, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 $I = [I_1, I_2, \dots, I_n]^T$ 。

定理 2 如果算子 T_α 是正定的, $T(R^n \rightarrow R^n)$ 是自伴随算子, 且 F 是单调不降非线性有界算子, 那么 (10) 式是渐近稳定的。

证明 定义能量函数如下:

$$E(t) = \int_{D_n} \langle T_\alpha F^{-1}(x), dx \rangle - \frac{1}{2} \langle Tv, v \rangle - \langle I, v \rangle, \quad (17)$$

其中积分区域是 $D_n = \{[0, v_1], \dots, [0, v_n]\}$, F^{-1} 为 F 的逆算子. 沿 (16) 式的轨迹对 (17) 式微分, 应有

$$dE(t)/dt = \partial E(t)/\partial v(t) \cdot dv(t)/dt = - \langle du(t)/dt, \partial v/\partial u \cdot du/dt \rangle. \quad (18)$$

从 $v = Fu$ 的单调性可知, $\partial v/\partial u > 0$, 所以有

$$dE(t)/dt \leq 0 \quad (19)$$

由 LaSalle 不变原理可知, (10) 式是渐近稳定的.

2.3 异联想神经网络的算子表示

定义 9 单位算子记为 $T_m(R^m \rightarrow R^m)$, 算子 $T(R^n \rightarrow R^m)$ 为

$$Tu = Wu \quad (20)$$

和 T 的伴随算子 $T^*(R^m \rightarrow R^n)$ 表示为

$$T^*v = W^T v, \quad (21)$$

则 (4) 式还可以表示为

$$\left. \begin{aligned} du(t)/dt &= -T_n u(t) + T(Fv) + I, \\ dv(t)/dt &= -T_m v(t) + T^*(Fu) + J, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中 $I = [I_1, I_2, \dots, I_n]^T$, $J = [J_1, J_2, \dots, J_m]^T$.

定理 3 如果算子 T_n 和 T_m 是正定的, T 存在伴随算子 T^* , F 是非线性单调上升有界算子, 那么 (22) 式是渐近稳定的.

证明 定义能量函数如下:

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{D_n} \langle T_n F^{-1}(x), dx \rangle - \frac{1}{2} \langle T(Fu), Fv \rangle \\ &\quad + \int_{D_m} \langle T_m F^{-1}(x), dx \rangle - \langle Fu, I \rangle - \langle Fv, J \rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $D_n = \{[0, f(u_1)], \dots, [0, f(u_m)]\}$, $D_m = \{[0, f(v_1)], \dots, [0, f(v_m)]\}$. 沿着 (22) 式的轨迹微分 $E(t)$ 可以得到条件:

$$dE(t)/dt \leq 0, \quad (24)$$

因而 (22) 式是渐近稳定的.

3 H 空间上的神经网络

H 空间 (Hilbert Space) 是一个完备内积空间.

3.1 自联想情况

定义 10 L_α 是 H 空间上的正定算子, L 是 H 空间上的自伴随算子, 即

$$L^* = L, \quad (25)$$

其中 L^* 是 L 的伴随算子, F 是单调不减非线性有界算子.

直接推广 (16) 式, 可得一种 DPNN 如下:

$$\partial u / \partial t = -L_{\alpha} u + L(Fu) + I, \quad (26)$$

其中 u 是时间和其它变量的函数, 或者 u 是一个无穷维时变向量, I 是一个非时变函数或者是一个无穷维向量.

定理 4 如果 L_{α} 是 H 空间上有界正定算子, L 是有界自伴随算子, F 是单调不减非线性有界算子, 那么 (26) 式的状态是有界的且 (26) 式是渐近稳定的.

证明 先证有界性. 将 (26) 式写成积分方程形式如下:

$$u(t) = e^{-L_{\alpha} t} u(0) + \int_0^t e^{-L_{\alpha}(t-\tau)} L(F(u)) d\tau + L_{\alpha}^{-1} (1 - e^{-L_{\alpha} t}) I, \quad (27)$$

其中指数算子 $e^{-L_{\alpha} t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-L_{\alpha} t)^n$, 1 为单位算子, L_{α}^{-1} 为 L_{α} 的逆算子. 对上式两边取模, 利用三角不等式, 有

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|e^{-L_{\alpha} t} u(0)\| + \left\| \int_0^t e^{-L_{\alpha}(t-\tau)} L(F(u)) d\tau \right\| + \frac{\|I\|}{\|L_{\alpha}\|} \\ &\leq \|u(0)\| e^{-\|L_{\alpha}\| t} + \int_0^t e^{-\|L_{\alpha}\|(t-\tau)} \|L\| \cdot \|F(u)\|_{\max} d\tau + \frac{\|I\|}{\|L_{\alpha}\|} \\ &\leq \|u(0)\| + \frac{\|L\|}{\|L_{\alpha}\|} M + \frac{\|I\|}{\|L_{\alpha}\|}, \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $M = \|F(u)\|_{\max}$. 从上式可知, $u(t)$ 是有界的.

现在证明 (26) 式是稳定的. 引入一能量泛函:

$$E(t) = \int_D \langle L_{\alpha} F^{-1}, dx \rangle - \frac{1}{2} \langle LF(u), F(u) \rangle - \langle I, F(u) \rangle, \quad (29)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 H 空间上的内积, $D = \{[0, F(u)], u \in H\}$, F^{-1} 是 F 的逆算子, $E(t)$ 沿 (26) 式的轨迹微分可得

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \langle L_{\alpha} u, \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \rangle - \frac{1}{2} \left[\langle LF(u), \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle L \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}, F(u) \rangle \right] - \langle I, \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

因为 L 是自伴随算子, 则应有

$$\langle L \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}, F(u) \rangle = \langle LF(u), \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \rangle. \quad (31)$$

将 (31) 式代入 (30) 式得

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \langle -L_{\alpha} u + LF(u) + I, \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \rangle. \quad (32)$$

又因为 $\partial F / \partial u$ 是半正定的, 所以有

$$dE(t)/dt \leq 0. \quad (33)$$

证毕

由于 L_α 和 L 可以是微分算子, 或者是积分算子, 或者是其它线性算子, 所以基本 Hopfield 神经网络仅是分布参数神经网络的一个特例。通过选择不同的算子 L_α 和 L 可以得到不同的分布参数神经网络。

3.2 异联想情况

定义 11 令 L_α 和 L_β 是 H 空间上的正定算子, L 是 H 空间上的有界线性算子, L^* 是 L 的伴随算子, F_α 和 F_β 是 H 空间上的单调不减非线性有界算子。

将 (22) 式扩展到 H 空间, 得一分布参数神经网络如下:

$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial t &= -L_\alpha u + L(F_\beta v) + I, \\ \partial v / \partial t &= -L_\beta v + L^*(F_\alpha u) + J. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

定理 5 如果 L_α 和 L_β 是有界线性正定算子, L 和它的伴随算子 L^* 是线性有界算子, F_α 和 F_β 是有界单调不减非线性算子, 那么系统 (34) 式是有界的, 且是稳定的。

证明 将 (34) 式写成积分方程形式

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= e^{-L_\alpha t} u(0) + \int_0^t e^{-L_\alpha(t-\tau)} L(F_\beta v) d\tau + L_\alpha^{-1}(1 - e^{-L_\alpha t}) I, \\ v(t) &= e^{-L_\beta t} v(0) + \int_0^t e^{-L_\beta(t-\tau)} L^*(F_\alpha u) d\tau + L_\beta^{-1}(1 - e^{-L_\beta t}) J. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

对上式两边取模, 并利用三角不等式得

$$\left. \begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|u(0)\| + \frac{\|L\|}{\|L_\alpha\|} M_\beta + \frac{\|I\|}{\|L_\alpha\|}, \\ \|v(t)\| &\leq \|v(0)\| + \frac{\|L^*\|}{\|L_\beta\|} M_\alpha + \frac{\|J\|}{\|L_\beta\|}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

其中 $M_\alpha = \|F_\alpha(u)\|_{\max}$, $M_\beta = \|F_\beta(v)\|_{\max}$ 。从上式可知, $u(t)$ 是有界的。

引入一能量泛函如下:

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{D_\alpha} \langle L_\alpha F_\alpha^{-1}(x), dx \rangle - \langle L F_\beta(v), F_\alpha(u) \rangle - \langle I, F_\alpha(u) \rangle \\ &\quad + \int_{D_\beta} \langle L_\beta F_\beta^{-1}(x), dx \rangle - \langle J, F_\beta(v) \rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

其中 $D_\alpha = \{[0, F_\alpha(u)], u \in H\}$, $D_\beta = \{[0, F_\beta(v)], v \in H\}$, F_α^{-1} 和 F_β^{-1} 分别是 F_α 和 F_β 的逆。沿着 (34) 式微分 (37) 式可得

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial F_\alpha}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial F_\beta}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle \leq 0, \quad (38)$$

所以系统 (34) 式是稳定的。

系统 (34) 式比系统 (26) 式对算子 L 要求要低得多, (26) 式要求 L 是自伴随算子, 只有少数的线性算子能满足这个条件, (34) 式要求 L 存在伴随算子, 有许多线性算子能满足这个条件。

4 时空稳定性

对于时空连续变化的分布参数神经网络, 它们的稳定性是一种时空联合稳定性, 简称时空稳定性。分布式联接算子的不同空间结构对分布参数神经网络的稳定性有着重要影响。例如对于微分算子, 需满足一定的形式和边界条件才能成为自伴随算子。在这里, 我们就以微分算子为例来研究分布参数神经网络的时空稳定性。

定义 1.2 令 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 是时空状态变量, ∇ 是如下梯度算子:

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \partial u(x, t) / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial u(x, t) / \partial x_n \end{bmatrix}, \quad (39)$$

其中 $x \in R^n$, ∇^2 是拉普拉斯微分算子, 定义为

$$\nabla^2 u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} = \nabla \cdot \nabla u(x, t). \quad (40)$$

假设 (26) 式中, 算子 L_α 和 F 定义为

$$L_\alpha u(x, t) = \alpha(x)u(x, t), \quad (41)$$

$$Fu(x, t) = f(u(x, t)), \quad (42)$$

其中 $f(\cdot)$ 是 Sigmoid 函数, 算子 L 取微分算子, 因为系统 (26) 式的稳定性要求 L 须满足自伴随性, 显然, 算子 ∇ 及其奇次方都是非自伴随算子。众所周知, 微分算子 ∇^2 及其各次方, 在满足一定边界条件情况下可以成为自伴随算子。

不失一般性, 取如下线性算子:

$$L = (\nabla^2)^p, \quad p = 1, 2, \dots \quad (43)$$

将 L_α , L 和 F 代入 (26) 式得

$$\left. \begin{aligned} \partial u(x, t) / \partial t &= -\alpha(x)u(x, t) + (\nabla^2)^p v(x, t) + I(x), \\ v(x, t) &= f(u(x, t)). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

在函数空间上, 内积可以表示为

$$\langle u(x, t), v(x, t) \rangle = \int_D u(x, t)v(x, t)dx, \quad (45)$$

其中 D 是 x 的定义域。从定理 4 可知, 当 L 是自伴随算子时, 系统 (44) 式是稳定的。从如下条件:

$$\langle Lu(x, t), v(x, t) \rangle = \langle u(x, t), Lv(x, t) \rangle, \quad (46)$$

可以推得在 L 是自伴随的情况下, $u(x, t)$ 应满足的边界条件。

已知格林公式如下:

$$\int_D [\varphi(x, t)\nabla^2 \psi(x, t) - \psi(x, t)\nabla^2 \varphi(x, t)]dx = \int_S \left[\varphi[(x, t)\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial n} - \psi(x, t)\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial n}] \right] ds, \quad (47)$$

其中 S 是 D 的边界面, $\partial/\partial n$ 表示沿边界法向导数. 对于 (46) 式左边反复使用格林公式, 并整理得

$$\begin{aligned} \langle Lu(x, t), v(x, t) \rangle = & \langle u(x, t), Lv(x, t) \rangle + \sum_{i=1}^p \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial n} [(\nabla^2)^{p-i} u(x, t)] [(\nabla^2)^{i-1} v(x, t)] \right. \\ & \left. - [(\nabla^2)^{p-i} u(x, t)] \frac{\partial}{\partial n} [(\nabla^2)^{i-1} v(x, t)] \right\} ds, \end{aligned} \quad (48)$$

所以当上式右边第二项为零时, L 即可满足自伴随性. 因此, 在 L 自伴随情况下 $u(x, t)$ 应满足的边界条件是

$$\sum_{i=1}^p \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial n} [(\nabla^2)^{p-i} u(x, t)] [(\nabla^2)^{i-1} v(x, t)] - [(\nabla^2)^{p-i} u(x, t)] \frac{\partial}{\partial n} [(\nabla^2)^{i-1} v(x, t)] \right\} ds = 0, \quad (49)$$

边界条件 (49) 式给出的是一般情况, 下面给出它的具体形式.

定理 6 如果 $f(\cdot)$ 是 $u(x, t)$ 的单调非降非线性有界函数, 且关于 x 是 $2p$ 次可微, 当 $v(x, t)$ 满足如下边界条件时,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left[(\nabla^2)^{p-i} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right] [(\nabla^2)^{i-1} v(x, t)] ds \\ & - \sum_{i=1}^p \int_S \left[(\nabla^2)^{p-i} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial n} [(\nabla^2)^{i-1} v(x, t)] ds = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

则系统 (44) 式是稳定的.

证明 取一能量泛函如下:

$$\begin{aligned} E(t) = & \int_D \alpha(x) \left[\int_0^{v(x, t)} f^{-1}(\xi) d\xi \right] dx \\ & - \frac{1}{2} \int_D v(x, t) [(\nabla^2)^p v(x, t)] dx - \int_D v(x, t) I(x) dx. \end{aligned} \quad (51)$$

沿着 (44) 式的轨迹微分 $E(t)$ 得

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} = & \int_D \left[\alpha(x) u(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right] dx - \frac{1}{2} \int_D [(\nabla^2)^p v(x, t)] \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_D \left[(\nabla^2)^p \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right] v(x, t) dx - \int_D \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} I(x) dx. \end{aligned} \quad (52)$$

对上式右边第三项反复利用格林公式, 可得

$$\begin{aligned} & \int_D \left[(\nabla^2)^p \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right] v(x, t) dx = \int_D [(\nabla^2)^p v(x, t)] \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} dx \\ & + \sum_{i=1}^p \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left[(\nabla^2)^{p-i} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right] [(\nabla^2)^{i-1} v(x, t)] dx \\ & - \sum_{i=1}^p \int_S \left[(\nabla^2)^{p-i} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial n} [(\nabla^2)^{i-1} v(x, t)] ds. \end{aligned} \quad (53)$$

从 (50), (52) 和 (53) 式可得

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} &= \int_D [-\alpha(x)u(x,t) + (\nabla^2)^p v(x,t) + I(x)] \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} dx \\ &= - \int_D \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dx \leq 0,\end{aligned}\quad (54)$$

所以, 系统 (44) 式是稳定的。

证毕

值得注意的是当在边界上 $v(x,t)$ 或 $\partial v(x,t)/\partial n$ 不随时间变化时, 边界条件 (50) 式会自动满足。对于异联想情况, 因为有类似的结论, 这里从略。

5 举 例

给定一边值问题

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} &= 1, \quad x \in [0, 1], \\ \varphi(0) &= \varphi(1) = 0, \end{aligned} \right\} x \in [0, 1], \quad (55)$$

可以用 Hopfield 型分布参数神经网络予以求解。

将 (26) 式中的有关算子取成

$$\left. \begin{aligned} L_\alpha u(x,t) &= \alpha u(x,t), \\ Lv(x,t) &= \partial^2 v(x,t)/\partial x^2, \\ Fu(x,t) &= f(u(x,t)), \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

其中 α 为正常数, $f(x)$ 为如下 Sigmoid 函数:

$$f(x) = (1 - e^{-\beta x}) / (1 + e^{-\beta x}), \quad (57)$$

其中 β 为正常数。将 (56) 和 (57) 式代入 (26) 式有

$$\left. \begin{aligned} \partial u(x,t)/\partial t &= -\alpha u(x,t) + \partial^2 v(x,t)/\partial x^2 + 1, \\ v(x_1,t) &= f(u(x_1,t)). \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

这是一个典型的分布参数神经网络。对应于 (58) 式的能量泛函是

$$E(t) = \int_0^1 \left[\alpha \int_0^{v(x,t)} f^{-1}(\eta) d\eta \right] dx - \int_0^1 v(x,t) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} dx - \int_0^1 v(x,t) dx. \quad (59)$$

当 α 较小, β 很大时, 上式近似表示成

$$E(t) = - \int_0^1 v(x,t) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} dx - \int_0^1 v(x,t) dx. \quad (60)$$

显然 (60) 式是边值问题 (55) 式的等价能量泛函。将 (58) 式的空间变量用有限差分法进行离散化, 然后用 Ronge-Kutta 法求解, 可得如图 1 所示结果。可见 (58) 式可以求解边值问题 (55) 式。

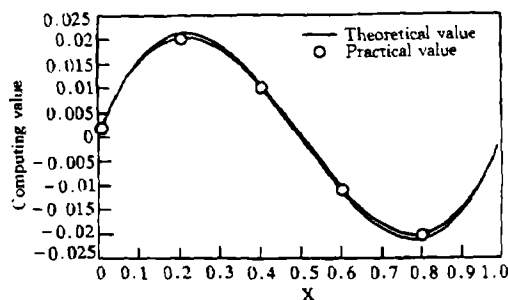


图 1 分布参数神经网络求边值问题

参 考 文 献

- [1] Hopfield J J, Tank D W. Science, 1986, 233(8): 625-633.
- [2] Kosko B. Bidirectional associative memories. IEEE Trans. on SMC, 1988, SMC-18(1): 49-60.
- [3] 焦李成著. 神经网络系统理论. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1990, 12, 52-79.
- [4] 冯大政, 焦李成, 保铮. 动态分布参数神经网络及其稳定性分析. 1994 年中国神经网络大会论文集, 武汉: 1-4.
- [5] 廖晓昕著. 稳定性的数学理论及应用. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988, 7, 79-83.

SPATIO-TEMPORAL STABILITY ANALYSIS FOR
DYNAMIC DISTRIBNTED PARAMETER NEURAL NETWORKS

Feng Dazheng Bao Zheng Jiao Licheng

(Institute of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract This paper extends the Hopfield's autoassociative neural networks and the Kosko's bidirectional neural networks to the dynamic neural networks with infinite state, namely the distributed parameter neural networks. Their boundedness and stability theorems are given and proved. Especially, their spatio-temporal stability is studied and their stability criteria about the boundary conditions are given. Finally, a simulation is given.

Key words Associative memory, Dynamic neural network, Distributed parameter neural network, Linear operator, Spatio-temporal stability, Energy functional

冯大政: 男, 1959 年生, 副教授, 博士, 主要研究方向为神经网络理论及其应用, 非线性系统理论, 自适应信号处理和神经信息处理原理的工程应用.

保 铮: 男, 1927 年生, 教授, 中国科学院院士, 博士生导师, 主要研究方向为阵列和多维信号处理, 雷达系统和雷达成像, 模式识别和神经网络.

焦李成: 男, 1959 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性系统理论, 人工神经网络, 智能信息处理.