生成符号网络函数的新方法*

张 晓 京
（南京邮电学院，南京）

摘要　本文提出一个生成符号网络函数的新方法：广义特征多项式法．该方法具有计算量小和精度高等优点，它优于现有的其它各种解决同类问题的方法．

关键词　电网络；符号网络函数；广义特征多项式法

1. 导言

符号网络函数在电网络的频率分析，灵敏度计算，容差分析，故障诊断和优化方面有着广泛的应用[1]．近十多年来，人们提出了许多生成符号网络函数的方法．其中主要的有参数抽取法[2]、插值法[3]、扰动法[4]、代数公式法[5]和网络拓展法[6]． 本文提出一个新方法，广义特征多项式法．它具有计算量小和精度高等优点，优于以上提到的各种方法．

2. 广义特征多项式法

图 1 表示一个具有 $n+1$ 个节点的线性时不变双口网络 N.

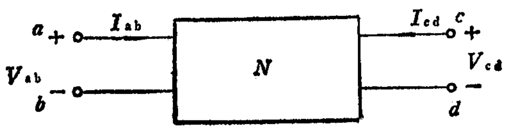

图 1

为方便起见，以下讨论都是在 N 的节点导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}_n$ 可以写出的条件下进行的．

一般来说 N 中的元件 λ 在 $\boldsymbol{Y}_n$ 中出现的位置如下：

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & k & & m & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \lambda & \cdots & -\lambda & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -\lambda & \cdots & \lambda & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{array}\right] \end{array} = \lambda \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'$$

这里，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_m$，$\boldsymbol{e}_i=[0\cdots0\ \overset{i}{1}\ 0\cdots]'$，$\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{0}$

因此，$\boldsymbol{Y}_n$ 的一般形式为

$$\boldsymbol{Y}_n=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_c s+\boldsymbol{A}_L\frac{1}{s}+\sum_{m=1}^{k}\lambda_m\boldsymbol{u}_m\boldsymbol{v}_m' \tag{1}$$

* 1986 年 12 月 30 日收到，1988 年 8 月 25 日修改定稿．

(1) 式中，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶数值方阵，$\boldsymbol{A}_c$ 和 $\boldsymbol{A}_L$ 分别为对应于符号 s 和 $1/s$ 的数值方阵。$\boldsymbol{u}_m$，$\boldsymbol{v}_m(m=1,2,\cdots,k)$ 形如 $\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j$

不难证明，N 的开路网络函数形如

$$Z(s,\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{v}'\boldsymbol{Y}_n^{-1}\boldsymbol{u} \tag{2}$$

(2)式中，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 形如 $\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1\cdots\lambda_k]'$

记 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{k+1}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{k+1}$

下面首先考虑生成

$$Z(\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{v}'_{k+1}Y_n^{-1}\boldsymbol{u}_{k+1}=\boldsymbol{v}'_{k+1}\left(\boldsymbol{A}+\sum_{m=1}^{k}\lambda_m\boldsymbol{u}_m\boldsymbol{v}'_m\right)^{-1}\boldsymbol{u}_{k+1} \tag{3}$$

定理 1 若 A 非奇异

记 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}_{(k+1)\times(k+1)}=\{\boldsymbol{v}'_i\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_j\}_{(k+1)\times(k+1)}$ 则

$$Z(\boldsymbol{\lambda})=\frac{b_0+\sum\limits_{m=1}^{k}\sum\limits_{i_1\cdots i_m}b_{i_1\cdots i_m}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m}}{1+\sum\limits_{m=1}^{k}\sum\limits_{i_1\cdots i_m}a_{i_1\cdots i_m}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m}} \tag{4}$$

(4)式中，$i_1\cdots i_m$ 为从 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中取出 m 个数的一个组合，$\sum\limits_{i_1\cdots i_m}$ 表示对所有这样的组合求和。(4)式中的系数为

$$a_{i_1\cdots i_m}=|\boldsymbol{P}(i_1,\cdots,i_m)|\,b_0=p_{k+1,k+1}$$
$$b_{i_1\cdots i_m}=|\boldsymbol{P}(i_1,\cdots,i_m,k+1)|$$

这里，$\boldsymbol{P}(i_1,\cdots,i_m)$ 为从 $\boldsymbol{P}$ 中分别取出第 $i_1\cdots i_m$ 行和列所形成的矩阵。

设 rank $\boldsymbol{A}_c=r$ 并设 $\boldsymbol{A}_c$ 的秩分解为

$$\boldsymbol{A}_c=\sum_{m=1}^{r}\boldsymbol{u}_m\boldsymbol{v}'_m \tag{5}$$

(5)式中，$\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{v}_m(m=1,2,\cdots,r)$ 是 n 维列向量。

记 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{r+k+1}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{r+k+1}$。现在考虑生成

$$Z(s,\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{v}'_{r+k+1}\left(\boldsymbol{A}+s\sum_{m=1}^{r}\boldsymbol{u}_m\boldsymbol{v}'_m+\sum_{m=1}^{k}\lambda_m\boldsymbol{u}_{r+m}\boldsymbol{v}'_{r+m}\right)^{-1}\boldsymbol{u}_{r+k+1} \tag{6}$$

定理 2 若 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，记

$$\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}_{(r+k+1)\times(r+k+1)}=\{\boldsymbol{v}'_i\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_j\}_{(r+k+1)\times(r+k+1)}$$

则

$$Z(s,\boldsymbol{\lambda})=\frac{b_0(s)+\sum\limits_{m=1}^{k}\sum\limits_{i_1\cdots i_m}b_{i_1\cdots i_m}(s)\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m}}{a_0(s)+\sum\limits_{m=1}^{k}\sum\limits_{i_1\cdots i_m}a_{i_1\cdots i_m}(s)\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m}} \tag{7}$$

(7)式中

$$a_0(s)=s^r\left|\boldsymbol{P}(1,\cdots,r)+\boldsymbol{I}_r\frac{1}{s}\right|$$

$$a_{i_1\cdots i_m}(s)=s^r\left|P(1,\cdots,r,r+i_1,\cdots,r+i_m)+\begin{bmatrix}I_r\frac{1}{s} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right|$$

$$b_0(s)=s^r\left|P(1,\cdots,r,r+k+1)+\begin{bmatrix}I_r\frac{1}{s} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right|$$

$$b_{i_1\cdots i_m}(s)=s^r\left|P(1,\cdots,r,r+i_1,\cdots,r+i_m,r+k+1)+\begin{bmatrix}I_r\frac{1}{s} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right|$$

由定理 2 可以看出，计算(7)式中的系数转为计算广义特征多项式（$1/s$ 的多项式）

$$\begin{vmatrix}A+I\frac{1}{s} & B\\ C & D\end{vmatrix}$$

用广义特征多项式法(简记为 GE 法)生成符号网络函数有两个显著的优点：(1) 生成符号网络函数所需要的所有运算都是实运算；(2)在整个计算过程中仅需分析网络N一次（即求出 A^{-1}）。算出(7)式中系数所需的计算量主要依赖 A_c 的秩 r 和符号变量个数 k。当 r 和 k 比 n 小得多时，GE 法的优点尤为明显。

在实际问题中，矩阵 A 可能是奇异的。在这种情况下，符号网络函数可按定理 3 生成。

定理 3　　若 A 奇异且 $\operatorname{rank} A=n-l$，$(0<l\leqslant n)$ A 的秩分解为 $A=P\Lambda Q$。这里 P, Q 为满秩方阵，$\Lambda=\begin{bmatrix}I_{n-l} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，记

$$\Lambda=\begin{bmatrix}I_{n-l} & 0\\ 0 & I_l\frac{1}{\sigma}\end{bmatrix},\quad A=P\Lambda Q$$

$$\tilde{Z}(s,\lambda,\sigma)=v'_{r+k+1}\left(A+s\sum_{m=1}^{r}u_m v'_m+\sum_{m=1}^{k}\lambda_m u_{r+m}v'_{rr+m}\right)^{-1}u_{r+k+1}$$

则

(1)　$$\tilde{Z}(s,\lambda,\sigma)=\frac{g_0(s,\lambda)+g_1(s,\lambda)\sigma+\cdots+g_l(s,\lambda)\sigma^l}{f_0(s,\lambda)+f_1(s,\lambda)\sigma+\cdots+f_l(s,\lambda)\sigma^l}$$

(2)　$$Z(s,\lambda)=\lim_{\sigma\to\infty}\tilde{Z}(s,\lambda,\sigma)=\frac{g_l(s,\lambda)}{f_l(s,\lambda)}$$

$g_l(s,\lambda)$ 和 $f_l(s,\lambda)$ 的计算也可以转为广义特征多项式的计算。

最后考虑 Y_n 中包含符号 $1/s$ 的情况。

定理 4　　若 $\operatorname{rank} A_L=r$ 且 A_L 的秩分解为 $A_L=PQ$，这里 P, Q 分别为 $n\times r$ 和 $r\times n$ 矩阵。令

$$\bar{Y}_n=\left[\begin{array}{c|c} A+A_c+\sum_{m=1}^{k}\lambda_m u_m v'_m & P \\ \hline -Q & I_s \end{array}\right]$$

记

$$\bar{Y}_n^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right]$$

则

$$Y_n^{-1}=\left(A+A_c s+A_L\frac{1}{s}+\sum_{m=1}^{k}\lambda_m u_m v'_m\right)^{-1}=X$$

利用定理 4 就可以把定理 2 和定理 3 的结果用到 Y_n 中含符号 $1/s$ 的网络上去，因为这时 $\bar{Y}_n$ 中已不含符号 $1/s$。

定理 1 的证明见文献[4]。定理 2、定理 3 和定理 4 的证明这里从略。

3. 举例

按广义特征多项式法编制的生成符号网络函数的程序已成功地在微机上通过运行，结果是令人满意的。下面给出一个计算实例。

例　求出图 2(a) 所示有源滤波器的转移阻抗 V_0/I_i。该例取自文献[2]。

图 2(a) 中晶体管 2N2484 和 2N1132 的模型见图 2(b) 和图 2(c)。图 2(a)，(b)，(c) 中电阻的单位为 kΩ，电容的单位为 mF。符号 $1/R$ 和 β 的编号分别为 1 和 2。

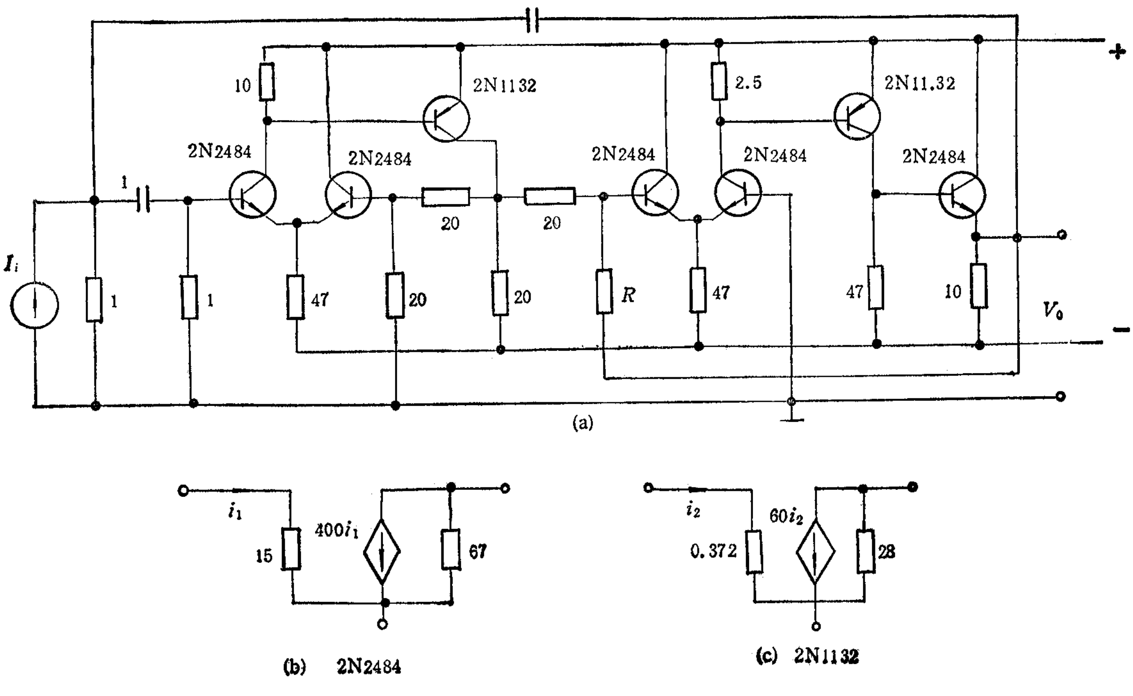

图　2

计算机算出的结果见表 1

表 1

$D(S)$	$S**2$	$S**1$	$S**0$
	3.10E+03	9.87E+00	1.00E+00
1	3.10E+04	9.27E+04	3.09E+04
2	3.09E+03	6.33E−01	2.11E−01
12	3.09E+04	9.26E+04	3.09E+04
$N(S)$			
	6.87E+00	−3.08E+03	
1	8.25E+01	9.00E+01	
2	0.00E+00	−3.09E+03	
12			

表 1 中 $D(s)$ 和 $N(s)$ 分别表示符号网络函数中的分母和分子. 左边的数字表示某种符号组合,表上 $s**2$, $s**1$ 和 $s**0$ 分别表示 s^2, s 和 $s^0=1$. 例如, 对应于分母中 $(\beta/R)s^2$ 的系数为 3.09×10^4 等等. 这样就得到

$$\frac{V_0}{I_i}=\left[-3.08\times10^3 s+6.87s^2+\frac{1}{R}(9.00\times10s+8.25\times10s^2)-3.09\times10^3\beta s\right]\Big/$$

$$\Big[1.00+9.875s+3.10\times10^3s^2+\frac{1}{R}(3.09\times10^4+9.27\times10^4s+3.10\times10^4s^2)$$

$$+\beta(2.11\times10^{-1}+6.33\times10^{-1}s+3.09\times10^3s^2)+\frac{\beta}{R}(3.09\times10^4$$

$$+9.26\times10^4s+3.09\times10^4s^2)\Big]$$

可以看出这一结果比文献[2]的结果精确

4. 比较

以下讨论中设节点导纳矩阵的阶数为 n, 独立的动态元件数为 r, 符号变量个数为 k, 元件的总数为 b. 这里仅考虑乘法量. 各种方法需要的乘法量见表 2

表 2

扰动法	$(r+1)\left[n^3+\frac{2^{k-2}}{3}k(k+1)(k+5)+(r+1)^2 2^{k+1}\right]$	722496
代数公式法	$(b-k-r-1)^3+\frac{2^{r+k-2}}{3}(k+r)(k+r+1)(k+r+5)$	402944
网络拓展法	$[(1.5n-k)(1.86r^2+17.62r+45.5)+6.73n(r+1)]2^k$	269293
GE 法	$n^3+2^{k-2}(k+1)^2(k+4)+r2^{k-1}(k+1)(k+2)+r^2 2^k(k+1)+r^3 2^{k+1}$	45752

表 2 中最右边的数是把 $n=30$, $b=75$ 和 $k=r=5$ 代入各个公式而得到的. 这组数并不优惠于某种算法,例如在文献[6]中作者就是以这组数将其方法与别的方法加以比较. 扰动法需要复运算,所以它的乘法量要乘 4.

表 3 中给出各种方法所需要乘法量的一个粗略估计. 它表示了影响计算量的主要因素.

表 3

参数抽取法	$O(2^k n^3)$
扰动法	$O[(r+1)n^3]+O(2^k k^3)$
代数公式法	$O[(b-r-k-1)^3]+O[2^{r+k}(r+k)^3]$
GE 法	$O(n^3)+O[2^k(r+k)^3]$

由以上比较可以看出，GE 法计算量小于其它方法的主要原因是它仅需分析网络 N 一次。

参考文献

[1] P. M. Lin, *IEEE Trans. on CT*, CT-20(1973)11, 732—737.
[2] G. E. Alderson, P. M. Lin, *IEEE Trans. on CT* CT-20(1973)1, 48—55.
[3] K. Singhal, J. Vlach, *IEEE Trans. on CAS*, CAS-24(1977)11, 598—609.
[4] K. Singhal, J. Vlach, *Proc. IEE, Pt. G*, 128(1981)2, 81—86.
[5] P. Sannuti, N. N. Puri, *IEEE Trans. on CAS*, CAS-27(1980)8, 679—687.
[6] Zou Mou-Yan, A Network Extension Algorithm for Generating Symbolic Network Functions, Proc. IEEE ISCAS'83, 641—644.

A NEW METHOD OF GENERATING SYMBOLIC NETWORK FUNCTION

Zhang Xiaojing

(Nanjing Institute of Posts & Telecommunications, Nanjing)

Abstract A new method of generating symbolic network functions——generalized eigenpolynomial method is developed. With the advantages of small computational requirements and high accuracy, the method is superior to all other existing methods used to solve the same problem.

Key words Electric network; Symbolic network function; Generalized eigenpolynomial method