

# 一种基于旋转矩阵单位四元数分解的运动估计算法<sup>1</sup>

黄 浴 袁保宗

(北方交通大学信息科学研究所 北京 100044)

**摘 要** 本文基于旋转矩阵单位四元数分解定理,提出一种由3D特征点空间位置估计运动参数的算法。单位四元数表示旋转矩阵时不存在奇异点,故基于单位四元数的运动估计方法具有更大的实用价值,而本文算法无需Horn(1987)和Su等人(1989)提出的单位四元数方法的迭代运算。本文给出了解的唯一性分析和模拟实验结果,可见其性能是令人满意的。

**关键词** 单位四元数分解,空间位置,运动参数估计,奇异点

**中图分类号** TP391.41

## 1 引 言

序列图象中恢复物体的运动信息一直是计算机视觉的重要问题。如果先由摄像机在同一时刻不同位置对物体所拍的立体图象得到其特征的深度信息即3D位置,然后再根据特征的3D位置信息计算出运动参数,那么比起单镜头序列图象的运动分析方法,其计算任务的复杂性已降低,并且得到了后者无法恢复的绝对平移值,故该运动分析途径目前颇受重视<sup>[1]</sup>。在立体视觉序列的图象分析中,主要是讨论旋转矩阵 $R$ 的求解,而平移分量随之可得。起初人们直接求解 $R$ ,即SVD分解<sup>[2]</sup>、正交分解<sup>[3]</sup>和RS分解<sup>[4]</sup>等,但 $R$ 自由度仅为3,故计算时会带来精度的损失,而且有时不能保证得到的是旋转矩阵。以后人们研究了由少量参数描述 $R$ 的运动参数估计算法,即旋转轴和角、反对称阵、欧拉角以及单位四元数等方法,其中单位四元数表示法具有重要的地位,因为其描述 $R$ 时不存在其它方法的奇异点现象,而且单位四元数表示下的旋转矩阵运算比较简洁。Horn等人<sup>[5]</sup>和Faugeras等人<sup>[6]</sup>研究了基于单位四元数的运动参数估计方法,其算法最终化为一个二次型最小化时求解最小特征值及其特征向量的迭代算法。本文基于旋转矩阵单位四元数分解(UQD)定理得到一个运动参数的线性最小二乘估计算法,无需复杂的迭代运算,计算速度较快,同时文中给出了算法解的唯一性分析和模拟实验结果。

## 2 旋转矩阵的单位四元数表示法

根据运动学理论,物体运动可分解为旋转和平移。设物体特征点 $t$ 时刻位置和运动后 $t + \delta t$ 时刻位置分别为 $p_i, p'_i, i = 1, 2, \dots, N$ ,则有如下运动方程成立。

$$p'_i = Rp_i + T + N_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

<sup>1</sup> 1995-01-06收到, 1995-06-28定稿  
国家863高技术计划资助课题

其中  $R$  为旋转正交矩阵,  $T$  为平移向量,  $N_i$  是干扰噪声.

$R$  是  $3 \times 3$  正交旋转矩阵, 故自由度为 3, 其可由欧拉角 (按右手定则绕  $x, y, z$  轴的方向角), 旋转轴和旋转角, Carley 向量对应的反对称矩阵, 以及单位四元数来描述. 但是, 欧拉角中有一个为  $90^\circ$  时, 另外两个无法确定; 旋转角为  $0^\circ$  时, 旋转轴为任意方向; 反对称矩阵在旋转角为  $180^\circ$  时不存在; 故这三种表示均存在奇异点 (Singular points), 而单位四元数表示没有奇异点存在, 现分析如下:

设单位四元数  $\text{Quater}=(\mathbf{n}^T, q)^T$ , 其中  $\mathbf{n}$  为  $3 \times 1$  向量,  $q$  为标量, 且  $\|\mathbf{n}\|^2 + q^2 = 1$ , 那么有如下引理成立, 即

**引理 1** 单位四元数  $\text{Quater}=(\mathbf{n}^T, q)^T$  所构成的四阶方阵  $Q$  为正交阵, 其中  $I$  为  $3 \times 3$  单位阵, 而  $S_{\mathbf{n}}$  为  $\mathbf{n}$  向量对应的反对称阵, 即  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ , 而

$$Q = \begin{bmatrix} qI + S_{\mathbf{n}} & \mathbf{n} \\ \mathbf{n}^T & -q \end{bmatrix}, S_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

**证明**<sup>[7]</sup>

$$QQ^T = \begin{bmatrix} q^2I - S_{\mathbf{n}}^2 + \mathbf{n}\mathbf{n}^T & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & \|\mathbf{n}\|^2 + q^2 \end{bmatrix}.$$

因为  $q^2I - S_{\mathbf{n}}^2 + \mathbf{n}\mathbf{n}^T = q^2I + \|\mathbf{n}\|^2I = I(\|\mathbf{n}\|^2 + q^2 = 1)$ , 故  $QQ^T = I_4$ . 证毕

**定理 1** 任意旋转阵  $R$ , 仅存在两个互为反号的单位四元数  $(\mathbf{n}^T, q)^T, (-\mathbf{n}^T, -q)^T$ . 使得下面分解成立:

$$\begin{bmatrix} R & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = Q^2. \quad (3)$$

**证明**<sup>[7]</sup> 用  $(\mathbf{n}^T, q)^T$  右乘 (3) 式得

$$\begin{bmatrix} R & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ q \end{bmatrix} = QQ \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ q \end{bmatrix}, \Rightarrow \begin{bmatrix} R - I & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ q \end{bmatrix} = 0_{4 \times 1}. \quad (4)$$

上式必有  $(\mathbf{n}^T, q)^T$  非零解, 故一定存在单位四元数满足 (3) 式.

现设有两个单位四元数  $(\mathbf{n}_1^T, q)^T$  和  $(\mathbf{n}_2^T, q)^T$  满足 (3) 式, 那么它们分别构成对应的  $Q_1, Q_2$ .

(1) 设  $\mathbf{n}_1 = 0_{3 \times 1}$ , 则  $q_1 = \pm 1$ . 此时  $R = I, Q_1 = \pm I_4, Q_2 Q_2 = I_4$ . 由此知  $Q_2 = Q_2^T$ . 则得  $\mathbf{n}_2 = 0_{3 \times 1}, q_2 = \pm 1$ .

(2) 设  $\mathbf{n}_1 \neq 0_{3 \times 1}$ , 则  $Q_1 Q_1 [\mathbf{n}_2^T, q]^T = [\mathbf{n}_2^T, q]^T$ , 故  $S_{\mathbf{n}_1}^T \cdot \mathbf{n}_2 = 0_{3 \times 1}$ . 那么  $\mathbf{n}_2 = k\mathbf{n}_1 (k \neq 0)$ , 代入 (3) 式可得  $k = \pm 1$ . 由此  $q_2 = \pm q_1, \mathbf{n}_2 = \pm \mathbf{n}_1$ . 证毕

**定理 1** 称为旋转矩阵的单位四元数分解 (UQD). 由 UQD 可得  $R$  与单位四元数的关系如下:

引理 2 单位四元数  $\text{Quater}=(\mathbf{n}^T, q)^T = (n_1, n_2, n_3, q)^T$  构成的  $R$  为

$$R = \begin{bmatrix} q^2 + n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 & 2(n_1n_2 - qn_3) & 2(n_1n_3 + qn_2) \\ 2(n_1n_2 + qn_3) & q^2 + n_2^2 - n_1^2 - n_3^2 & 2(n_2n_3 - qn_1) \\ 2(n_1n_3 - qn_2) & 2(n_2n_3 + qn_3) & q^2 + n_3^2 - n_2^2 - n_1^2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

证明<sup>[7]</sup> 由 (3) 式得  $R = (qI + S_{\mathbf{n}})^2 + \mathbf{n}\mathbf{n}^T = (2q^2 - I)I + 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T + 2qS_{\mathbf{n}}$ . 证毕

单位四元数表示法实际上可代表旋转轴和角  $(\mathbf{r}, \theta)$ , 以及与  $(a, b, c)^T$  对应的反对称矩阵表示法, 见如下关系:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{n} = \mathbf{r} \sin \frac{\theta}{2}, \\ q = \cos \frac{\theta}{2}, \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathbf{n} = \frac{[a, b, c]^T}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}}, \\ q = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}}. \end{array} \right\} \quad (6)$$

从上面 (6) 式可见奇异点现象:  $q=0$  时,  $(a, b, c)^T$  不存在;  $n=0$  时, 则  $\mathbf{r}$  不确定.

### 3 基于单位四元数表示的旋转矩阵估计法

由于单位四元数是一种无奇异点的旋转矩阵表示法, 故研究旋转矩阵的单位四元数估计算法具有重要的意义. Horn<sup>[5]</sup> 和 Faugeras<sup>[6]</sup> 分别提出了基于单位四元数的旋转矩阵估计算法, 二者共同的特点是将问题转化为求二次型最小特征值对应的单位特征向量 (即单位四元数), 在此仅介绍文献 [6] 的方法: 首先问题是求出  $R, T$  使得 (1) 式的残差平方和最小, 即

$$\min J_1 = \sum_{i=1}^N \|p'_i - Rp_i - T\|^2. \quad (7)$$

若取  $\bar{p} = \sum_i p_i / N$ ,  $\bar{p}' = \sum_i p'_i / N$ ,  $q_i = p_i - \bar{p}$ ,  $q'_i = p'_i - \bar{p}'$ , 则 (7) 式化为

$$\min J_2 = \sum_{i=1}^N \|q'_i - Rq_i\|^2. \quad (8)$$

而  $R$  得到后,  $T$  可由下式得到, 即

$$T = \bar{p}' - R\bar{p}. \quad (9)$$

如果做如下定义<sup>[8]</sup>:

$$\begin{aligned} P &= [q_1, q_2, \dots, q_N], & P' &= [q'_1, q'_2, \dots, q'_N], & M &= PP^T, \\ S &= M + M^T, & \beta &= \|P\|^2 + \|P'\|^2, & \gamma &= \text{tr}(M), \\ \omega &= (m_{32} - m_{23}, m_{13} - m_{31}, m_{21} - m_{12})^T. \end{aligned} \quad (10)$$

这里  $m_{ij}$  是  $M$  的元素,  $\text{tr}$  为矩阵的迹. 进一步定义对称矩阵

$$H = \begin{bmatrix} \beta - \gamma & \omega^T \\ \omega & (\beta + \gamma)I - S \end{bmatrix},$$

那么 (8) 式问题可化为<sup>[6]</sup> 如下问题, 即

$$\min J_3 = Q_u^T H Q_u \quad (11)$$

因此求  $R$  的问题转化为求一个单位向量  $Q_u$  使二次型  $Q_u^T H Q_u$  最小, 即对应于  $H$  最小特征值的单位特征向量.

求解特征向量是一个迭代计算过程, 而我们将基于 UQD 使 (8) 式化为一个线性最小二乘问题, 由此推导出一个非迭代线性算法, 步骤如下:

将 (3) 式代入 (8) 式可得

$$\min J_4 = \sum_{i=1}^N \|Q^T(q_i^T, 0)^T, -Q(q_i^T, 0)^T\|^2. \quad (12)$$

经整理后得到简化的形式, 即

$$\min J_5 = \sum_{i=1}^N (\|qv_i - S_{u_i} \mathbf{n}\|^2 + \|v_i \mathbf{n}\|^2), \quad (13)$$

其中  $v_i = q'_i - q_i$ ,  $S_{u_i}$  是  $u_i$  对应的反对称矩阵, 而  $u_i = q'_i + q_i$ . 对 (13) 式的求解方法讨论如下:

(1)  $q \neq 0$ , 则 (13) 式化为

$$\min J_5 = \sum_{i=1}^N (\|v_i - S_{u_i} \mathbf{n}/q\|^2 + \|v_i^T \mathbf{n}/q\|^2), \quad (14)$$

(14) 式等价于一个正则方程组的求解:

$$A \cdot \mathbf{n}/q = b, \quad (15)$$

其中  $A = \sum_i (S_{u_i}^T S_{u_i} + v_i v_i^T)$ ,  $b = \sum_i S_{u_i}^T v_i$ . 一旦得到  $\mathbf{n}/q$ , 则可得两组互为反号的  $\mathbf{n}$ . ( $\|\mathbf{n}\|^2 + q^2 = 1$ ), 根据定理 1 任取一组即可对应唯一的旋转矩阵.

(2)  $q=0$ , 则 (13) 式化为

$$\min J_5 = \sum_{i=1}^N (\|S_{u_i} \mathbf{n}\|^2 + \|v_i^T \mathbf{n}\|^2), \quad (16)$$

这里  $\|\mathbf{n}\|^2 = 1$ . 同样 (16) 式等价于如下方程组的求解:

$$A \cdot \mathbf{n} = 0_{3 \times 1}, \|\mathbf{n}\|^2 = 1. \quad (17)$$

若(平行)立体视觉系统取光轴方向为坐标系的 $z$ 轴,且约束物体在运动前后总是位于摄像镜头的前方,而(1)式运动方程中旋转中心默认为坐标系的原点,那么完全可以假设旋转轴 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ 中的 $z$ 分量 $n_3 \neq 0$ ,即旋转轴与 $x-y$ 平面相交.现设 $A = [A_1, A_2, A_3]$ ,可将(17)式化为

$$[A_1 \ A_2] \begin{bmatrix} n_1/n_3 \\ n_2/n_3 \end{bmatrix} = -A_3. \quad (18)$$

求出 $n_1/n_3, n_2/n_3$ ,即可得到两个互为反向的 $\mathbf{n}$ 向量( $\|\mathbf{n}\|^2 = 1$ ),由于旋转轴并无正负之分,所以任取其中一个即可.关于(15)式和(18)式解的唯一性分析如下:首先令

$$\left. \begin{aligned} V &= [v_1, v_2, \dots, v_N] = P' - P, \quad U = [u_1, u_2, \dots, u_N] = P' + P, \\ U_s &= [S_{u_1}^T, S_{u_2}^T, \dots, S_{u_N}^T], \quad X = [U_s, V], \quad \alpha = \text{tr}(UU^T), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

而 $A = XX^T = U_s U_s^T + VV^T = \alpha I - UU^T + VV^T$ .另外,若所求的解,即单位四元数 $(\mathbf{n}^T, q)^T$ 对应的旋转矩阵为 $R$ ,那么由引理2可知:

$$\text{rank}(R + I) = \begin{cases} 3, & q \neq 0; \\ 1, & q = 0; \end{cases} \quad \text{rank}(R - I) = \begin{cases} 2, & q \neq \pm 1; \\ 0, & q = \pm 1; \end{cases}$$

而 $U = (R + I)P, V = (R - I)P$ .

(1) 当 $q \neq 0$ 时讨论(15)式的解:首先有

**引理3**  $\text{rank}(U) \geq 2 \Leftrightarrow \text{rank}(U_s) = 3$ .

**证明**  $UU^T$ 半正定, $\lambda_i$ 是它的特征值, $\lambda_i \geq 0$ ,而 $\sum_i \lambda_i = \alpha$ .则 $\text{rank}(U) \geq 2 \Leftrightarrow \text{rank}(UU^T) \geq 2 \Leftrightarrow \lambda_i < \alpha \Leftrightarrow \text{rank}(U_s U_s^T) = 3 \Leftrightarrow \text{rank}(U_s) = 3$ . 证毕

**定理2** 若 $\text{rank}(P) \geq 2$ ,则(15)式必得到唯一的旋转矩阵解.

**证明** 当 $q \neq 0$ 时 $\text{rank}(U) = \text{rank}(P)$ ,而 $\text{rank}(A) = \text{rank}[U_s, V] \geq \text{rank}(U_s)$ .根据引理3, $\text{rank}(P) \geq 2$ ,则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(U_s) = 3$ .这样保证得到唯一的 $\mathbf{n}/q$ 解.那么由约束 $\|\mathbf{n}\|^2 = 1$ 可得到两个互为反向的单位四元数,即得到唯一的旋转矩阵. 证毕

(2) 当 $q=0$ 时讨论(18)式的解:

**定理3**  $N \geq 2$ 时(18)式可得到唯一的旋转矩阵解.

**证明**  $\text{rank}(A) = \text{rank}[U_s, V] \geq \text{rank}(U_s) \geq 2$ ,那么当 $\text{rank}(A) = 2$ 时,(17)式求解可得到两个互为反向的旋转轴,取其中任意一个为所求的旋转轴即可;而当 $\text{rank}(A) = 3$ 时,则由(18)式也可得到 $n_1/n_3, n_2/n_3$ 最小二乘意义上的唯一解,由约束 $\|\mathbf{n}\|^2 = 1$ 得到两个互为反向的旋转轴,即对应唯一的旋转矩阵. 证毕

最终求解 $R$ 时,可对(15)和(18)分别计算,然后将所求的 $R$ 代入(8)式,取令其最小的一个为所求解.

#### 4 模拟实验结果

模拟数据产生如下:首先在  $(-2,-2,2)$  到  $(2,2,4)$  之间得到 3D 随机点集  $\{p_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , 旋转轴  $n$  取为  $(0,0,1)$ , 而旋转角  $\theta$  任取自  $[0^\circ, 180^\circ]$ ; 平移向量的三分量均取  $1 \sim 3$  之间的实数, 根据 (1) 式可得运动后的 3D 点集  $\{p'_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ . 立体视觉系统构造为: 两镜头中心位于  $x$  轴上, 且它们的中点是镜头坐标系的原点; 两个镜头的光轴均平行于  $z$  轴, 而成象平面平行于  $x-y$  平面. 焦距  $f=1$ , 基线长度  $B=5$ . 3D 点集  $\{p'_i\}$  按透视投影模型在左右镜头的成象 2D 点集为  $\{P_i^l, P_i^r\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ . 然后对其附加高斯噪声, 最后再根据立体视觉三角测量原理得到运动后的含噪 3D 点集.

文献 [9] 提出的基于 Carley 定理的旋转参数估计算法与本文方法有相似之处, 在此我们将两种算法的估计结果进行比较, 信噪比从 20dB 到 50dB 变化, 取 40 次模拟结果的均值为估计值, 相应的估计精度见图 1 和图 2. 图 1 为平移向量的误差曲线,  $dT = \|T - T_0\|$ . 图 2 为旋转角的误差曲线 (单位  $1^\circ$ ),  $d\theta = |\theta - \theta_0|$ . 从中可发现二者的计算精度十分接近, 有时本文方法稍好一些 (其原因在于四元数分量的归一化处理有利于数值计算, 尤其是旋转角远小于或远大于  $90^\circ$  时), 更重要的是文献 [9] 方法存在旋转矩阵表示上奇异点 (见第 2 节分析) 的不足之处.

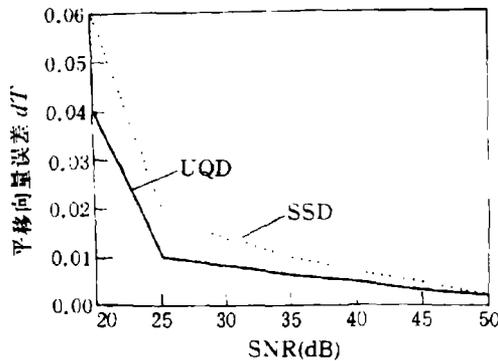


图 1 平移向量估计误差

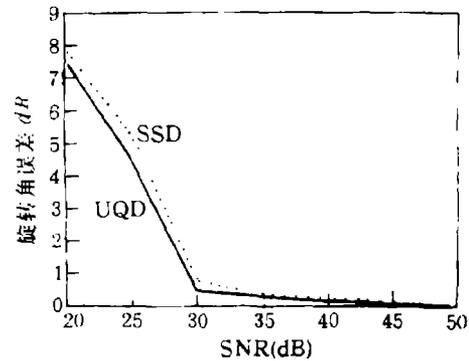


图 2 旋转角估计误差

#### 5 结束语

本文基于单位四元数分解 (UQD) 定理得到一个无需迭代运算的线性运动估计算法, 它比文献 [5,6] 的方法简单快速; 另外由于旋转矩阵的单位四元数表示不存在奇异点, 故比其它表示方法 (如反对称矩阵, 欧拉角, 旋转轴和角等) 优越. 文中还给出算法的唯一性分析和模拟实验结果.

## 参 考 文 献

- [1] Sabata B, Aggarwal J K, CVGIP: Image Understanding, 1991, 54(3): 309-324.
- [2] Arun K, *et al.* IEEE Trans. on PAMI, 1987, PAMI-9(5): 698-700
- [3] Horn B, *et al.* J. Opt. Soc. Am. (A), 1988, 5(7): 1127-1135.
- [4] Su R J, *et al.* Matrix decomposition and optimal estimation of rigid -body displacement, Proc. of the Int. Symp. MTNS-89, Netherlands: 1989, 513-520.
- [5] Horn B, J. Opt. Soc. Am. (A), 1987, 4(4): 629-642.
- [6] Faugeras O D, *et al.* Motion and structure from motion from point and line matches, Proc. of IEEE Int. Conf. on Computer Vision. England: 1987, 25-34.
- [7] 范 洪, 3-D 计算机视觉系统的高精度定标和 3-D 运动信息的准确获取: [博士论文]. 北方交通大学 北京: 1992, 9.
- [8] 徐文立, 刘文煌. 自动化学报, 1992, 18(4): 441-447.

AN ALGORITHM OF MOTION ESTIMATION BASED ON UNIT QUATERNION  
DECOMPOSITION OF THE ROTATION MATRIX

Huang Yu Yuan Baozong

*(Institute of Information Science, Northern Jiaotong University, Beijing 100044)*

**Abstract** Based on the unit quaternion decomposition of rotation matrix, this paper puts forward an algorithm to estimate motion parameters from the space position vectors of 3D feature points. Rotation matrix's representation with the unit quaternion has no singular points, so the unit quaternion-based estimation method is of more practical importance, and the algorithm in this paper does not need iteration computation compared to those unit quaternion-based method proposed by Horn(1987) and Su, et al.(1989). Solution's uniqueness analysis of the algorithm and simulation experiment results are also presented, it can be seen that performance of the proposed method is satisfactory.

**Key words** Unit quaternion decomposition, Space position vectors, Estimation of motion parameters, Singular points

黄 浴： 男，1967 年生，博士生，研究方向是图象 3D 运动分析和主动视觉。

袁保宗： 男，1932 年生，教授，博士生导师，中国电子学会理事，研究方向有计算机视觉和图形学，语音和图象处理，多媒体信息技术。