

M 带正交子波包理论¹

张建康 保 铮 焦李成

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

摘 要 M 带正交子波基由于所具有的优良特性得到了广泛关注。2 带子波包具有划分较高频率倍频程的能力, 可用于改善子波对时间-频率局部化的性能, 推广了信号的适用范围。本文用类似于从 2 带正交子波基扩展到 2 带子波包的概念, 建立了 M 带子波包的的理论框架, 并把有关 2 带子波包的定义、概念和性质推广到一般的 M 带子波包, 给出了相应的证明。

关键词 2 带子波, M 带子波, 子波包

中图分类号 TN911.7

1 引 言

近年来, 人们分别从数学和信号处理的观点对正交子波进行了广泛的研究。2 带子波把一个信号在对数尺度上分解成具有相同带宽的频带, 克服了短时 Fourier 变换的一些缺陷。它在高频带, 具有较宽的频带, 而在低频带, 则具有较窄的带宽。这些特点非常适合于对慢起伏并混有瞬变信号的分析, 但是, 如果一个信号在高频端具有相当窄的带宽, 例如, 混有宽的高频脉冲, 2 带子波的分析效果就相当差, 几乎难以满足实际问题的需要。为了弥补这一不足, 需改用子波包^[1]。近年来, 为便于计算和其它的一些优点, 人们提出了 M 带子波理论, 并给出了一些应用^[2-6]。

我们知道, M 带紧支撑上的正交子波基构造方法已由文献 [2] 提出。人们可以将尺度向量、进而子波向量参数化, 使得所有 $M-1$ 个子波的伸缩和平移构成 $\{L^2(R)\}$ 的一个紧框架, 这样构造的紧框架几乎都是正交的。如果低通滤波器满足 Mallat 和 Daubechies^[7] 类型的充分条件, 那么 $\{\psi_{m,n}^{(i)}\}$ 即可形成 $\{L^2(R)\}$ 的正交基。正交性的充要条件已由 Cohen^[8] 和 Lawton^[9] 独立证明, M 带的推广, 已由 Peter Steffen^[10] 等给出。

可以说, M 带子波基的框架已经建立。 M 带子波有助于人们将信号进行对数尺度分解的同时, 检测窄带的高频分量, 而且它比 2 带子波具有更好的能量集中性。2 带子波与 M 带子波在构造性质上的重要差异在于: 2 带子波的正交基是由一个子波生成的, 子波向量由尺度向量唯一确定, 而 M 带子波的正交基则是由 $M-1$ 个子波生成的, 且子波向量不由尺度向量唯一确定。这对于优化选择子波基带来了灵活性。

为使信号分解具有更广泛的适应性, 足可将 M 带子波推广为 M 带子波包。本文的主要目的是要把 2 带子波包的概念和性质推广到 M 带正交子波包上, 以此建立起 M 带子波包的理论框架, 为子波包的全频带快速分解和实现奠定了理论基础。

2 M 带子波

在提出 M 带子波包的概念以前, 我们先来分析一下 M 带子波多分辨分析的构造。

设尺度向量的长度 $N = MK$, $p_{0,k} = p_0(Mn - k)$ 是 p_0 的多相位子列, 即

¹ 1996-06-20 收到, 1997-04-17 定稿

国家自然科学基金和国家教委跨世纪人才基金资助课题

$$P_0(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} P_{0,k}(z^M),$$

这里 $P_{0,k}(z)$ 是 $p_{0,k}$ 的 z 变换, 对于每一个 k , $P_{0,k}(z)$ 是 z^{-1} 的 $K-1$ 次多项式, 且

$$\begin{bmatrix} P_{0,0}(z) \\ P_{0,1}(z) \\ \vdots \\ P_{0,M-1}(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{M}} \prod_{i=1}^{K-1} [I - \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + z^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

这里 $\mathbf{v}_i (i = 1, 2, \dots, K-1)$ 是 M 维单位向量. 给定一个尺度向量, 一般情况下, 人们可以用 $\begin{bmatrix} M-1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 种方式通过 Gram-Schmidt 过程产生一个矩阵 $\mathbf{V}_0$: $\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_0^T = \mathbf{M} \mathbf{I}$, 使得它的第一列正好是上面给定的 $[1, 1, \dots, 1]^T$, 这样就可构成一个伪正交的多相位矩阵:

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{M}} \prod_{i=1}^{K-1} [I - \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + z^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T] \mathbf{V}_0$$

当尺度向量选定后, 有唯一的紧支撑函数 $\varphi \in L^2(R)$ 使得 $\text{supp} \varphi \subseteq [0, \frac{N-1}{M-1}]$ 满足

$$\varphi(t) = \sqrt{M} \sum_n p_n^{(0)} \varphi(Mt - n), \quad (1)$$

$$\psi^{(i)}(t) = \sqrt{M} \sum_n p_n^{(i)} \varphi^{(i)}(Mt - n), \quad (2)$$

$i = 1, 2, \dots, M-1$ 和二次约束条件:

$$\sum_{k=0}^{M-1} p_k^{(i)} p_{k+Ml}^{(j)} = \delta(l) \delta(i-j). \quad (3)$$

定义 $\varphi_{m,n}(t)$ 、 $\psi_{m,n}^{(i)}(t)$ 如下:

$$\varphi_{m,n}(t) = M^{m/2} \varphi(M^m t - n), \quad \psi_{m,n}^{(i)}(t) = M^{m/2} \psi(M^m t - n),$$

$i = 1, 2, \dots, M-1$. V_m 、 $W_m^{(i)}$ 分别是一系列由 $\varphi_{m,n}(t)$ 、 $\psi_{m,n}^{(i)}(t)$ 张成的子空间:

$$V_m = \overline{\text{span}\{\varphi_{m,n}(t) : n \in \mathbb{Z}\}}, \quad W_m^{(i)} = \overline{\text{span}\{\psi_{m,n}^{(i)}(t) : n \in \mathbb{Z}\}},$$

则相应的子波函数列 $\{\psi_{m,n}^{(i)}(t)\}$ 构成 $L^2(R)$ 的一个紧框架^[2]. 如果这里的尺度向量 $p_n^{(0)}$ 的自相关序列 $r(n)$ 构成的 Lawton 矩阵 $\mathbf{Q}$:

$$q_{i,j} = \begin{cases} r(M(i-1)), & j=1; \\ r(M(i-1+j-1)) + r(M(i-1)-j+1), & 2 \leq j \leq N \end{cases}$$

的特征值为 1 的特征子空间是一维的, 那么, $W_m^{(i)}$ 构成 $L^2(R)$ 的正交分解, 且

$$V_m = V_{m-1} \oplus \left[\oplus_{i=1}^{M-1} W_{m-1}^{(i)} \right], \quad \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots,$$

$$\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(R), \quad \cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\},$$

即 φ 生成 $L^2(R)$ 一个正交多分辨分析. 因此对于任一 $f(t) \in L^2(R)$, $f(t)$ 有下面的分解:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f(t), \psi_{m,n}^{(i)}(t) \rangle \psi_{m,n}^{(i)}(t). \quad (4)$$

以上我们对具有紧支撑的 M 带正交多分辨分析的概念及其构造作了一个简要的描述, 需要指出的是这里构造的尺度向量和子波向量具有相同的长度, 当然也可用状态空间的方法进行构造.

3 M 带子波包

首先我们定义 M 带正交尺度函数 φ 的“子波包”概念.

定义 设 φ , $\psi^{(i)}$ 是满足 (1)、(2) 式的正交尺度函数和子波函数, 定义函数 $\mu_n(x)$ 如下:

$$\mu_n(x) = \sum_k p_k^{(r)} \mu_l(Mx - k). \quad (5)$$

这里 $n \equiv r \pmod{M}$, $l = (n - r)/M$, $0 \leq r \leq M - 1$, $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, 当 $0 \leq n < M$ 时,

$$\mu_0(x) = \varphi(x), \quad \mu_n(x) = \psi^{(n)}(x).$$

这样构造的函数列 $\mu_n(x)$: $n \geq 0$ 成为 φ 的子波包.

由上述定义不难看出, 族 $\{\mu_n(x)\}$ 是 $\psi^{(i)} (1 \leq i < M)$ 一种推广. 为了讨论 $\mu_n(x)$ 的频域性质, 需要对非负整数 n 进行 M -adic 展开, 即

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j M^{j-1}, \quad \varepsilon_j \in \mathbb{Z} \text{ 且 } 0 \leq \varepsilon_j < M. \quad (6)$$

我们先建立起下面结果,

定理 1 设 n 是任一给定的非负整数, n 的 M -adic 展开由 (6) 式给定, 那么, 子波包 $\mu_n(x)$ 的 Fourier 变换为

$$\hat{\mu}_n(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} P_{\varepsilon_k}(e^{-j\omega/M^k}), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

证明 (5) 式两边取 Fourier 变换得

$$\hat{\mu}_n(\omega) = P_r(e^{-j\omega/M^k}) \hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{M}\right). \quad (7)$$

这里 $P_r(e^{-j\omega/M^k}) = \frac{1}{M} \sum_k p_k^{(r)} e^{-j\omega/M}$, $0 \leq r < M$. 由 (6) 式不难得到

$$\varepsilon_1 = r, \quad l = \left\lfloor \frac{n}{M} \right\rfloor \quad \text{且} \quad l = \frac{n - \varepsilon_1}{M} = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_{j+1} M^{j-1}. \quad (8)$$

因此重复利用 (7) 式和 (8) 式可导出

$$\hat{\mu}_n(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} P_{\varepsilon_k}(e^{-j\omega/M^k}), \quad \omega \in R.$$

于是完成定理 1 的证明。

证毕

定理 2 设 φ 是正交尺度函数, $\{\mu_n\}$ 是相应的子波包, 那么, 对于每个 $n \geq 0$, 我们有

$$\langle \mu_k(x-k), \mu_l(x-l) \rangle = \delta(l-k), \quad l, k \in Z.$$

证明 关于 n 用数学归纳法, 当 $n=0$ 时, $\mu_0 = \varphi$, 满足正交性. 假如当 $n < K$ 时成立, 那么, 当 $n=K$ 时,

$$\begin{aligned} \langle \mu_k(x-k), \mu_l(x-l) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\mu}_k(\omega)|^2 e^{j(l-k)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi M} |P_{\varepsilon_1}(e^{-j\omega/M})|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}_{\lfloor \frac{k}{M} \rfloor}(\frac{\omega}{M} + 2\pi m)|^2 e^{j(l-k)\omega} d\omega. \quad (9) \end{aligned}$$

这里用到定理 1, 利用归纳假设得

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\hat{\mu}_{\lfloor \frac{k}{M} \rfloor}(\frac{\omega}{M} + 2\pi m)|^2 = 1. \quad (10)$$

将 (10) 式代入 (9) 式并注意混叠矩阵 $P(z) = (p_{m,n}(z))_{M \times M}$, $p_{m,n}(z) = P_m(W^{n-1}z)$ 满足条件 $P(z)P^*(1/z^*) = MI$, 这里 $z = -j\omega/M$, $W = 2\pi/M$. 可推导出

$$\langle \mu_k(x-k), \mu_l(x-l) \rangle = \delta(l-k).$$

这说明 $n=k$ 时, 定理亦真, 于是由归纳法可得到定理的证明。

证毕

定理 2 说明正交尺度函数的子波包也是正交的。

定理 3 如果 $[m/M] = [n/M]$, 而且 M 不能整除 $m-n$, 那末

$$\langle \mu_k(x-k), \mu_l(x-l) \rangle = 0.$$

有了上面的那些定理, 我们现在就可以讨论小波级数的正交分解。

设 μ_n 是由正交尺度函数 φ 产生的小波包, 当 $n > 0$, $n \in Z$ 时, μ_n 的生成空间:

$$U_j^n = \text{clos}_{L^2(R)} \langle M^{j/2} \mu_n(M^j x - k) : k \in Z \rangle, \quad j \in Z.$$

注意到: $U_j^0 = V_j$, $U_j^1 = W_j$, $j \in Z$, 我们有下面的结果:

定理 4

$$U_{j+1}^n = \oplus_{r=0}^{M-1} U_j^{Mn+r}, \quad \forall n \leq 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

定理 5

$$W_j = \oplus_{r=0}^{M-1} U_{j-1}^{M+r} = \cdots = \oplus_{r=0}^{M^k-1} U_{j-k}^{M^k+r} = \cdots = \oplus_{r=0}^{M^j-1} U_0^{M^j+r},$$

而且对于每个 $m = 0, 1, 2, \dots, M^k - 1$, $k = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots$, $\{M^{(j-k)/2} \mu_{M^k+m}(M^{j-k}x - l) : l \in \mathbb{Z}\}$ 是 $U_{j-k}^{M^k+m}$ 的一个规范正交基。

上面三个定理的证明主要用到混叠矩阵的有关性质, 我们在此略去。由定理 5, 我们立即得到下面的推论。

推论

$$L^2(\mathbb{R}) = \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus U_0^M \oplus \cdots \oplus U_0^{2M-1} \oplus \cdots,$$

$\{\psi_{j,k}^{(i)}, \mu_n(x-k), j \leq -1, n \geq 2, 1 \leq i \leq M-1\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个规范正交基。

定理 1 到定理 5 不仅给出了 M 带子波包理论的基本框架, 而且为建立 M 带子波包的快速分解算法的构造方法奠定了基础。

图 1 给出了一个 4 带的长度为 32 的低通滤波器的前四个子波包, 子波系数取自文献 [5]。

4 结论和讨论

本文建立了 M 带子波包的概念, 并把 2 带子波包的有关性质推广到 M 带子波包。在定理 1 到定理 5 的证明中, 我们多次用到混叠矩阵的正交性条件。关于 M 带子波包与多速率网络的一些内在关系, 我们将在后续文章做进一步讨论。 $L^2(\mathbb{R})$ 中任一信号都可在 M 带子波包基下进行分解, 现在的问题是: 如何选择子波包基比较好? 能否直接将文献 [1, 11] 中关于 2 带子波包基选择准则扩展到 M 带子波包? 是需要继续研究的问题。

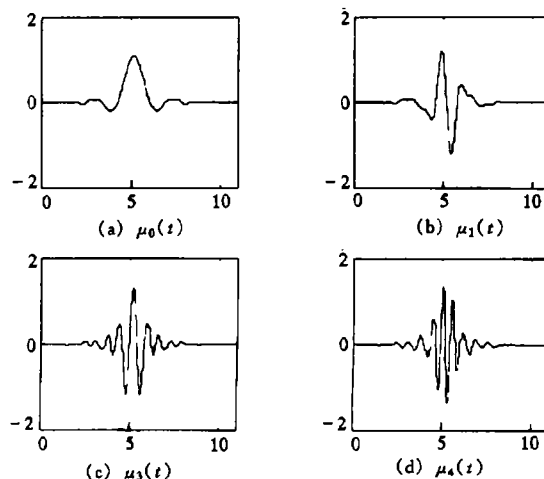


图 1

参 考 文 献

- [1] Coifman R R, Wickerhauser M. Entropy-based algorithms for best basis selection. IEEE Trans. on Information Theory, 1992, IT-38(2): 713-718.
- [2] Gopinath R A, Burrus C S. Wavelet filter banks. in C.K.Chui, Ed., Wavelets—A Tutorial in Theory and Applications. New York: Academic, 1992, 603-654.

- [3] Heller P, Resikoff H W, Wells R O. Wavelet matrices and the representation of discrete functions: in C. K. Chui, Ed., *Wavelets—A Tutorial in Theory and Applications*. New York: Academic, 1992, 15–51.
- [4] Zou H, Tewfik A H. Discrete orthogonal M -band wavelet decomposition. in *Proc. ICCSSP, San Francisco, CA: 1992*, IV-605–IV-608.
- [5] Alkin O, Caglar H. Design of efficient M -band coders with linear-phase and perfect reconstruction properties. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, SP-43(7): 1579–1590.
- [6] Tewfik A H. Wavelet domain bearing estimation in unknown correlated noise *IEEE ICASSP*, 1994, IV-109–IV-112.
- [7] Daubechies I, Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Applied Math.*, 1988, 41(3): 909–996.
- [8] Cohen A, *et al.* Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Applied Math.*, 1992, 45(2): 485–560.
- [9] Lawton W M. Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelets bases. *J. Math. Physics*, 1991, 32 (1): 57–61.
- [10] Steffen P, *et al.* Theory of regular M -band wavelet bases, *IEEE Trans. on SP*, 1993, SP-41(12): 3497–3510.
- [11] Herley C, *et al.* Tiling of the time-frequency plane: Construction of arbitrary orthogonal bases and fast tiling algorithms. *IEEE Trans. on SP*, 1993, 41(12): SP-3341–3359.

THEORY OF M -BAND WAVELET PACKETS

Zhang Jiankang Bao Zheng Jiao Licheng

(Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract In recent years, M -band orthonormal wavelet bases, due to their good characteristics, have attracted attention. The ability of 2-band wavelet packets to decompose high frequency channels can be employed to improve the property of wavelet for time-frequency localization, which makes more kinds of signals for analyzing by wavelet. Similar to the notations from the extension of 2-band wavelets to 2-band wavelet packets, the theory framework of M -band wavelet packets is developed, a generalization of the notations and properties of 2-band wavelet packets to that of M -band wavelet packets is made and the corresponding proofs are given.

Key words 2-band wavelet, M -band wavelet, Wavelet packets

张建康: 男, 1960 年生, 讲师, 博士生, 研究兴趣为子波变换及应用, 多速率信号处理, 算术变换和快速算法, 数据压缩.

保 铮: 男, 1927 年生, 教授, 中国科学院院士、IEEE 高级会员、中国电子学会会士, 研究领域为信号处理与检测.

焦李成: 男, 1959 年生, 教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 主要研究方向为智能信号处理和非线性科学.